

ISTITUTO TECNICO STATALE PER GEOMETRI
"G. MARTINO"
ROMA

COMPENDIO DI COSTRUZIONI

* * *

Prof. Arch. Domenico Natale



*** I ***
1993-94 rev 2003

INDICE SCHEDE

Unità di misura	1.0
Statica: le forze	1.2
Corpi rigidi vincolati	1.3
Geometria delle masse	1.4
Calcolo reazioni vincolari	2.1
Arco a 3 cerniere - trave Gerber	2.2
Caratteristiche di sollecitazione	2.3
Sollecitazioni semplici	2.4
Tensioni interne	2.5
Travi reticolari	2.6
Statica dei sistemi elastici	3.1
Sistemi iperstatici	3.2
Travi continue	3.3
Analisi dei carichi	4.1
Strutture in legno	5.1.1
Strutture in acciaio	5.1.2
Strutture in muratura	5.1.3
Cemento armato	5.2
Strutture compresse	5.3
Strutture inflesse	5.4
Trave a T	5.5
Sforzo di taglio	5.6
Plinti	6.1
Trave rovescia in c.a.	6.2
Pilastri in c.a.	6.3
Soletta in c.a.	6.4
Nervature solette	6.5
Solai misti in c.a. e laterizi	6.6
Scale in c.a.	6.7
Spinta delle terre	7.1
Muri di sostegno	7.2
Progetto muri di sostegno	7.3
Ponti	8.1
Ponti in legno	8.2
Ponti in acciaio	8.3
Ponti misti in acciaio e c.a.	8.3.3
Ponti in c.a.	8.4
Ponti in muratura	8.5
Idraulica	9.0

Nel *Sistema Internazionale (SI)* adottato in Italia dal 1982 l'unità di misura delle forze è il **newton (N)** definito come quella forza richiesta per imprimere ad una massa di 1 Kg l'accelerazione di 1 m al secondo per ogni secondo; la definizione è ottenuta dalla 2° legge della dinamica (o legge di Newton) $F = ma$.

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \times 1 \text{ m/s}^2$$

Nel *Sistema Tecnico (ST)* precedentemente utilizzato invece l'unità di misura delle forze era il kilogrammo-forza (Kgf) che poteva generare confusione visto che lo stesso nome è impiegato per definire **forze** (nel sistema ST) e **masse** (nel sistema SI).

Il kilogrammo-forza è la forza (peso) con cui una massa di 1 kg è attratta verso la terra, dove l'accelerazione di gravità vale $9,81 \text{ m/s}^2$ per cui:

$$1 \text{ kgf} = 1 \text{ kgm} \times 9,81 \text{ m/s}^2 = 9,81 \text{ kg m/s}^2$$

- **Conversione**

$$1 \text{ kgf} = 9,81 \text{ N} \approx 10 \text{ N} \text{ (approssimazione ammessa nel campo delle costruzioni)}$$

- **Unità multiple**

nel settore delle costruzioni: **tonnellata t** nel ST, **chilonewton KN** e **meganeutron MN** nel SI. (per carichi concentrati)

$$1 \text{ t} = 1.000 \text{ kg} = 10.000 \text{ N} = 10 \text{ KN}$$

$$1 \text{ KN} = 1.000 \text{ N} = 0,1 \text{ t} = \mathbf{100 \text{ kg}}$$

$$1 \text{ MN} = 1.000.000 \text{ N} = 100 \text{ t}$$

(per carichi ripartiti)

$$1 \text{ KN/m} = 1.000 \text{ N/m} = 100 \text{ kg/m} = 10 \text{ N/cm} = 1 \text{ kg/cm}$$

- **Unità derivate**

utilizzate per misurare *pressioni* o *tensioni* definite come rapporto tra forza e superficie:

kg/cm² o **t/m²** nel SI; **pascal Pa** e **megapascal MPa** nel SI

$$1 \text{ t/m}^2 = 0,1 \text{ kgf/cm}^2$$

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$$

$$1 \text{ Kgf/cm}^2 = \mathbf{0,1 \text{ N/mm}^2} = 0,1 \text{ MPa} = 10 \text{ N/cm}^2 = 100.000 \text{ N/m}^2 = 100.000 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ N/mm}^2 = 0,1 \text{ kgf/mm}^2 = 10 \text{ Kgf/cm}^2 = \mathbf{100 \text{ N/cm}^2} = 1.000.000 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ MPa}$$

$$1 \text{ N/cm}^2 = 0,1 \text{ kgf/cm}^2 = \mathbf{0,01 \text{ N/mm}^2}$$

(per momenti)

$$1 \text{ KN}\cdot\text{m} = 100 \text{ kgf}\cdot\text{m} = \mathbf{100.000 \text{ N}\cdot\text{cm}} = 10.000 \text{ kgf}\cdot\text{cm}$$

- **Massa volumica**

$$1 \text{ kgf/m}^3 = 0,01 \text{ KN/m}^3 = 10 \text{ N/m}^3$$

Nota. Le unità di misura riferite a **lunghezze** (m, cm, mm) e **superfici** (m², cm², mm²) si convertono da una dimensione superiore ad una inferiore moltiplicando per 100, 1000, o 10.000 o 1.000.000, viceversa dividendo per convertire da una dimensione inferiore ad una superiore, essendo 1m = 100cm (10²) = 1000mm (10³) e 1m² = 10.000cm² (10⁴) = 1.000.000mm² (10⁶).

• LUNGHEZZE •

chilometro	km	1.000 m	10^3	↑↑
ettometro	hm	100 m	10^2	dividere - moltiplicare
decametro	dam	10 m	10^1	
METRO	m	1	1	
decimetro	dm	0,1 m	10^{-1}	
centimetro	cm	0,01 m	10^{-2}	↓↓
millimetro	mm	0,001 m	10^{-3}	

• SUPERFICIE •

chilometro quadrato	km ²	1.000.000 m ²	10^6	↑↑
ettometro quadrato	hm ²	10.000 m ²	10^4	dividere - moltiplicare
decametro quadrato	dam ²	100 m ²	10^2	
METRO QUADRATO	m ²	1	1	
decimetro quadrato	dm ²	0,01 m ²	10^{-2}	
centimetro quadrato	cm ²	0,000.1 m ²	10^{-4}	↓↓
millimetro quadrato	mm ²	0,000.001 m ²	10^{-6}	

• VOLUME •

chilometro cubo	km ³	1.000.000.000 m ³	10^9	↑↑
ettometro cubo	hm ³	1.000.000 m ³	10^6	dividere - moltiplicare
decametro cubo	dam ³	1.000 m ³	10^3	
METRO CUBO	m ³	1	1	
decimetro cubo	dm ³	0,001 m ³	10^{-3}	
centimetro cubo	cm ³	0,000.001 m ³	10^{-6}	↓↓
millimetro cubo	mm ³	0,000.000.001 m ³	10^{-9}	

• PESO •

tonnellata	t	1.000 kg	10 q	dividere - moltiplicare
quintale	q	100 kg		
miriagrammo	Mg	10 kg		
CHILOGRAMMO	kg	1	1.000 g	
ettogrammo	hg		100 g	
decagrammo	dag		10 g	
GRAMMO	g		1	
decigrammo	dg		0,1 g	
centigrammo	cg		0,01 g	
milligrammo	mg		0,001 g	

• **Rappresentazione di una forza**

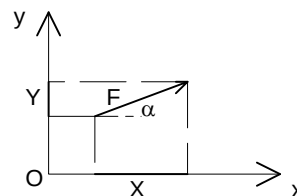
- *grafica*.: freccia caratterizzata da *direzione, verso, intensità* (**Vettore**)
- *analitica*.: coppia (oppure terna se nello spazio) ordinata di numeri associato alle sue componenti cartesiane.

• **componenti cartesiane**

$$X = F \cos \alpha$$

$$Y = F \sin \alpha$$

$$F = \sqrt{x^2 + y^2}$$



• **risultante di un sistema di forze**

a. componenti:

$$X_R = \sum X$$

$$Y_R = \sum Y$$

b. intensità:

$$R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2}$$

c. momento:

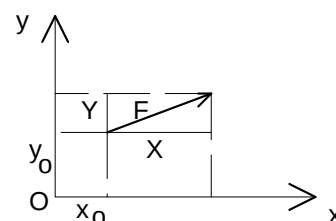
$$M_R = \sum (Xy_c - Yx_c)$$

d. equazione della retta d'azione:

$$Y_R x - X_R y + M_R = 0$$

e. coefficiente angolare:

$$\tan \alpha = Y_R / X_R$$



• **condizioni di equilibrio**

di un corpo rigido soggetto a forze complanari.

- la *somma (vettoriale) delle forze* deve essere **nulla**
- la *somma dei momenti* rispetto a un polo C comunque scelto deve essere **nulla**.

$$\sum F = 0$$

vettorialmente:

$$\sum M = 0$$

analiticamente:

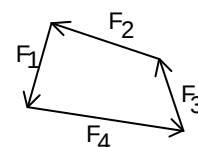
$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \end{cases}$$

$$\sum (Xy_c - Yx_c) = 0$$

• **approccio grafico** (casi particolari)

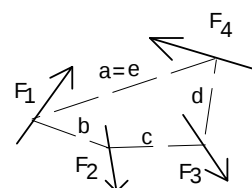
1. **forze complanari qualsiasi**

- il *poligono delle forze* deve essere **chiuso** (risultante nulla)
- il *primo e l'ultimo lato* del poligono funicolare devono essere **coincidenti** (momento nullo)



2. **sistema di 3 forze complanari**

- il *triangolo delle forze* deve essere **chiuso** (risultante nulla)
- le 3 forze devono essere **coincidenti** (momento nullo)



- **Vincolo**

dispositivo che applicato a un corpo rigido ne impedisce una o più componenti di movimento (traslazioni e rotazioni). Può essere *semplice*, *doppio*, *triplo*, a seconda dei gradi di libertà impediti, come *l'appoggio semplice* o *carrello*, *la cerniera*, *l'incastro*.

Ogni vincolo esercita sul corpo forze o coppie, a priori incognite, dette **reazioni vincolari**.

- **Corpo rigido piano**

ha *3 gradi di libertà*; perché vi sia equilibrio è necessario che il numero complessivo dei vincoli sia maggiore di 3 e disposti correttamente.: $n_v < 3$ (corpo **labile**), $n_v = 3$ (corpo **isostatico**), $n_v > 3$ (corpo **iperstatico**).

- **Reazioni vincolari**

a) *metodo analitico*.

Scrivere le equazioni di equilibrio della statica.

b) *metodo grafico*.

Determinare il poligono delle forze.

- **Sistemi articolati di corpi rigidi**

Sistemi realizzati con corpi rigidi, vincolati tra loro (**vincoli interni**) e a terra (**vincoli esterni**).

I vincoli interni impediscono spostamenti relativi tra 2 corpi e danno luogo a *reazioni mutue*.

I sistemi possono essere con gerarchia di corpi componenti o con corpi mutuamente necessari.

- **Gradi di libertà e vincoli**

Il numero dei vincoli semplici deve essere pari ai gradi di libertà del sistema strutturale. Se il sistema è piano, i gradi di libertà si ottengono moltiplicando per 3 il numero dei corpi del sistema.

Grandezze concentrate. Sono rappresentabili con un punto e sono identificabili assegnando le coordinate del punto stesso ed il valore o intensità. La generica grandezza di un sistema di n grandezze concentrate è rappresentata dal simbolo m_i e sarà chiamata **massa**.

Sistema di masse. Un corpo può essere pensato come un insieme di punti materiali piccolissimi con massa (coefficiente di proporzionalità $m = F/a$) elementare che costituiscono un sistema.

- **Momento statico** nel caso generale di un sistema di grandezze concentrate qualunque (forze, superfici, masse ecc.) rispetto ad una retta r è:

$$S_r = \sum_{i=1}^n m_i d_i \quad \text{essendo } d_i \text{ la distanza dalla retta } r \text{ della massa generica } m_i \text{ (nei sistemi continui la sommatoria diventa integrale). (kg}\cdot\text{m)}$$

oppure: per una *forza* o *massa* a distanza d da r è: $S = F \cdot d$ oppure $S = m \cdot d$

Il momento statico può essere **positivo o negativo**.

Il momento statico può pensarsi come la capacità che ha una forza a produrre una rotazione (che non dipende dalla sola intensità, ma anche dalla posizione).

- Per il **teorema di Varignon** la somma algebrica dei momenti statici di un sistema di forze rispetto a un punto è uguale al momento statico della risultante rispetto allo stesso punto.

$$S = S \cdot F_i \cdot d_i = R \cdot d_r$$

Nel caso di una *superficie piana* la sua area A viene rappresentata con un vettore applicato nel baricentro della superficie stessa per cui:

$$S = A \cdot d \quad (\text{m}^3)$$

- **Baricentro** (o centro di gravità) di un sistema di forze o di una superficie piana è quel punto nel quale si immagina concentrata la risultante o l'area totale e rispetto al quale il sistema stesso è in equilibrio; per esso passano le rette rispetto alle quali risulta **nullo** il **momento statico**. Quindi per determinare il baricentro basta individuare due rette rispetto alle quali $S_r=0$; le sue coordinate x_0 y_0 in un riferimento cartesiano sono date analiticamente da:

$$x_0 = \frac{S_y}{m} \quad y_0 = \frac{S_x}{m} \quad (\text{in un sistema discontinuo di forze } m \text{ diviene } F)$$

- Ai fini del **calcolo del momento statico**, le grandezze distribuite si possono quindi considerare *concentrate nel loro baricentro* per il **Teorema di Varignon**.

- Per via grafica occorre trovare il punto di incrocio di 2 risultanti ottenute disponendo le forze secondo 2 direzioni (ad es. ortogonali).

- **Momento d'inerzia** (o del 2° ordine) nel caso generale di un sistema di grandezze concentrate qualunque (forze, superfici, masse ecc.) rispetto ad una retta r è:

$$I_r = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2 \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

oppure per una *forza* o un'area *infinitesima* è: $I_r = F d^2$ oppure $I_r = a d^2$ (m^4)

Il momento d'inerzia è **sempre positivo**.

Se ci si riferisce ai due assi cartesiani xy si ha:

$$\begin{aligned} - \text{rispetto all'asse } x: & \quad I_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 \\ - \text{rispetto all'asse } y: & \quad I_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2 \end{aligned}$$

Il momento di inerzia è una **caratteristica geometrica** della sezione, indipendente dal materiale ma direttamente proporzionale al *modulo di resistenza* ($W = \frac{I}{y}$), mentre la capacità di portata varia secondo il materiale, dalla cui tensione ammissibile dipende la sollecitazione sopportabile. Pertanto una trave la cui sezione ha un momento di inerzia maggiore si inflette di meno, ovvero resiste di più, ovvero è più rigida.

Assi centrali di inerzia sono due *rette baricentriche ed ortogonali* $x_O y_O$, rispetto alle quali risulta nullo il momento statico. I momenti di inerzia I_{xO} e I_{yO} rispetto agli assi principali di inerzia si chiamano *momenti principali di inerzia* ed hanno valore **minimo** l'uno, **massimo** l'altro, tra tutti i possibili momenti di inerzia baricentrici. Se vi è un *asse di simmetria* questo è uno degli assi centrali di inerzia e l'altro è ad esso ortogonale.

- Ai fini del **calcolo del momento** di inerzia di un sistema non discreto la massa *non può essere concentrata nel baricentro*. Si può comunque individuare a che **distanza** (ρ) *occorrerebbe concentrare tutta la massa* per avere il medesimo momento di inerzia rispetto ad un asse. Con riferimento agli assi centrali di inerzia si può porre:

$$\begin{aligned} I_x &= m r_x^2 & r_x &= \sqrt{\frac{I_x}{m}} \\ I_y &= m r_y^2 & r_y &= \sqrt{\frac{I_y}{m}} \end{aligned} \quad (m \text{ massa totale del sistema o risultante } R \text{ di un sistema di forze o area } A \text{ di una superficie piana})$$

Le grandezze r_x r_y sono dette *raggi di inerzia* o *giratori* (principali) e rappresentano i *semidiametri dell'ellisse centrale di inerzia*.

Rispetto a un qualsivoglia asse a baricentrico, la direzione di ρ_a è legata da una particolare relazione di geometria descrittiva (direzioni *coniugate*)

- **Formula di trasposizione**

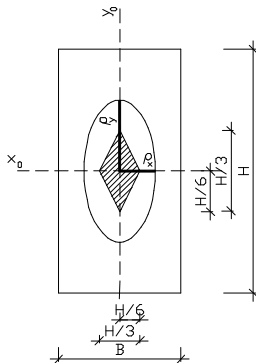
$$I_r = I_{r_O} + m d_G^2$$

I_{r_O} momento di inerzia rispetto a una retta baricentrica
parallela alla retta data
 m massa totale del sistema
 d_G distanza tra retta r e baricentro del sistema

Il momento di inerzia di un **sistema di forze** o di una **superficie piana** rispetto a un asse non baricentrico, ma parallelo all'asse baricentrico è dato da:

$$I_X = I_{xO} + A d^2$$

- **Ellisse centrale di inerzia.** Figura geometrica individuata dagli infiniti *raggi d'inerzia baricentrici*, che rappresenta il *diagramma di variazione del momento di inerzia* (diagramma polare dei momenti di inerzia); i raggi di inerzia principali sono i semidiametri principali dell'ellisse.
- **Nocciolo centrale di inerzia** è una superficie *luogo geometrico*, rispetto all'ellisse centrale di inerzia, *dei centri relativi* a tutti gli assi esterni o tangenti alla figura senza tagliarla.
Il *centro relativo* rappresenta il baricentro dei momenti statici. Il nocciolo centrale di inerzia dunque è un'area centrale delimitata da punti, i quali sono i centri relativi della figura rispetto a tutti i possibili assi tangenti al suo contorno.
- **Proprietà del nocciolo:** se un asse è esterno alla figura il centro relativo cade internamente al nocciolo, viceversa se un asse taglia la figura, il centro relativo cade esternamente al nocciolo (relazione biunivoca di antipolarità). Nel caso di pressione eccentrica abbiamo dunque che l'asse neutro è l'antipolare del centro di pressione rispetto all'ellisse centrale di inerzia.



ellisse centrale di inerzia e nocciolo centrale di inerzia in una sezione rettangolare.

ρ_x e ρ_y giratori o raggi di inerzia principali

Momenti di inerzia:

- rispetto al lato b : $I_b = \frac{1}{3} B \cdot H^3$; rispetto all'asse baricentrico x_0 : $I_x = \frac{1}{12} B \cdot H^3$

Ellisse centrale di inerzia:

- raggi di inerzia : $r_{x_0} = \frac{H}{\sqrt{12}}$; $r_{y_0} = \frac{B}{\sqrt{12}}$

Nocciolo centrale di inerzia

- diametri x_0, y_0 : $\frac{1}{3} B$; $\frac{1}{3} H$

• Computo dei vincoli

$$1a + 2c + 3i = 3n$$

(struttura isostatica)

per n elementi
a appoggi
c cerniere
i incastri

per le strutture *reticolari*:

$$n_a = 2n_n - 3 \quad e \quad V = 3$$

(struttura isostatica)

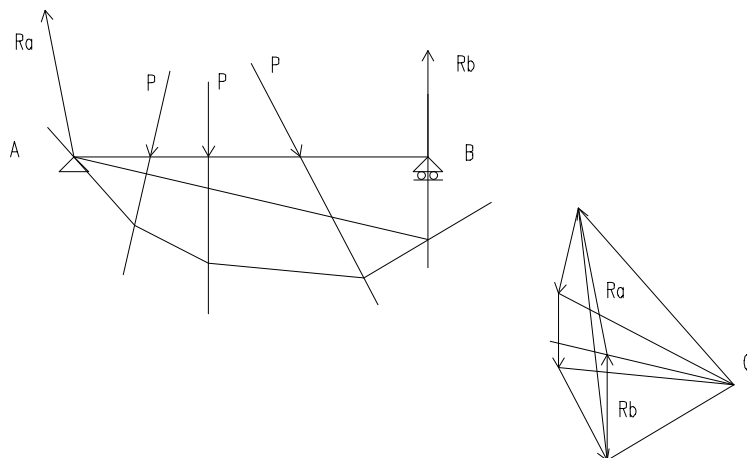
per n_a numero aste
 n_n numero nodi
V numero vincoli esterni

• CALCOLO COMPONENTI DELLE REAZIONI

- a) metodo grafico

si connettono **tutte le forze** (carichi e reazioni vincolari) con il *poligono funicolare*, che per l'equilibrio deve risultare **chiuso**.

In pratica si deve scomporre l'equilibrante della risultante dei carichi in due componenti che passino per i vincoli (reazioni):



- b) metodo analitico

- ogni vincolo è sostituito con le componenti della reazione.
- ogni forza inclinata è scomposta nelle due componenti orizzontale e verticale.
- nel calcolo le componenti della reazione sono **positive** e i carichi verticali sono **negativi**
- i momenti delle forze sono **positivi** se *orari* e **negativi** se *antiorari*

Si applicano le 3 equazioni di equilibrio:

$\Sigma P_x = 0$	somma algebrica di tutte le forze orizzontali
$\Sigma P_y = 0$	somma algebrica di tutte le forze verticali
$\Sigma M = 0$	somma algebrica dei momenti rispetto a un punto

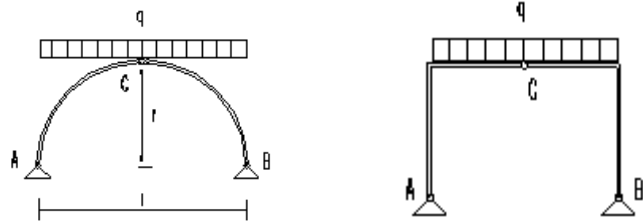
Per ottenere un'equazione con **una sola incognita** si assume il punto B (estremità di appoggio) per calcolare R_a (componente della reazione all'appoggio A)

• ARCO A TRE CERNIERE

- **Struttura ad arco a a portale** con cerniera di collegamento interna; è isostatica e staticamente determinata.

– Reazioni vincolari:

$$\begin{cases} \Sigma X = X_A - X_B = 0 \\ \Sigma Y = Y_A + Y_B - Q = 0 \\ \Sigma M_B = Y_A \cdot l - Q \cdot \frac{l}{2} = 0 \end{cases}$$

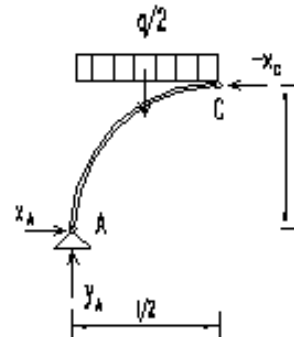


dalla 3^a equazione si ricava Y_A e dalla 2^a Y_B ; per trovare il valore di $X_A = -X_B$ bisogna scrivere una quarta equazione (**equazione ausiliaria**) di equilibrio alla rotazione intorno alla cerniera C di un **semiarco** (es. quello di sinistra):

$$\Sigma M_C = Y_A \cdot \frac{l}{2} - X_A \cdot f - \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0 \quad \text{da cui si ricava } X_A$$

Il calcolo può essere semplificato, considerando direttamente **l'equilibrio di un semiarco**; data la simmetria del sistema, la reazione in C è orizzontale (le reazioni in C del semiarco di sinistra e quello di destra devono essere per l'equilibrio uguali e contrarie). Pertanto si ha:

$$\begin{cases} \Sigma X = X_A - X_C = 0 \\ \Sigma Y = Y_A - \frac{Q}{2} = 0 \\ \Sigma M_C = X_C \cdot f - \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0 \end{cases}$$

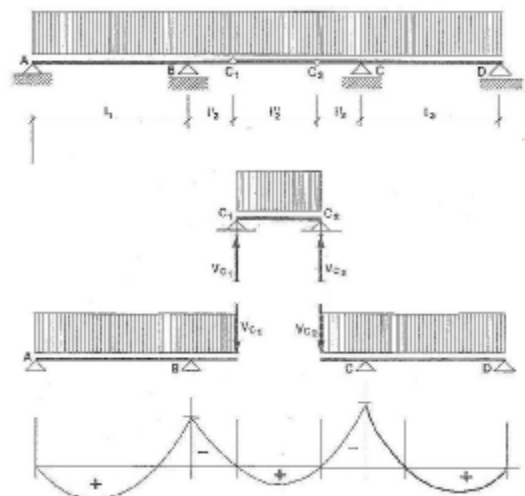


• TRAVE GERBER

Travi isostatiche su più appoggi, spezzate da cerniere interne.

- N° cerniere = n° appoggi - 2
- Non ci devono essere più di 2 cerniere fra 2 appoggi consecutivi

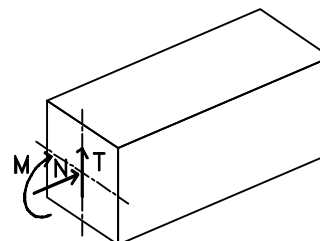
- § Si calcolano prima le **travi comprese tra 2 cerniere consecutive** o fra un appoggio e una cerniera, come travi semplicemente appoggiate
- § Le **reazione** di queste travi **cambiate di segno** costituiscono i carichi concentrati che gravano sugli sbalzi degli altri tronchi.



- **Caratteristiche di sollecitazione.** In una generica sezione di una struttura sono le *componenti della forza*, che viene esercitata mutuamente dalle 2 parti, in cui può essere pensata divisa la struttura, in modo tale che risultino soddisfatte le condizioni di equilibrio delle 2 parti considerate isolate.

Tali componenti sono, per le strutture piane:

- **sforzo normale** N
- **sforzo tagliente** T
- **momento flettente** M



- **Calcolo delle caratteristiche di sollecitazione**

scelta la sezione, si prende in considerazione la parte di struttura *a sinistra (o a destra)*, mettendo in evidenza **tutte le forze** che agiscono sulla parte considerata:

- *forze esterne* (**note** perché dati del problema)
- *reazioni vincolari* (**note** perché calcolate)
- *caratteristiche di sollecitazione* (sforzi interni **incogniti**)

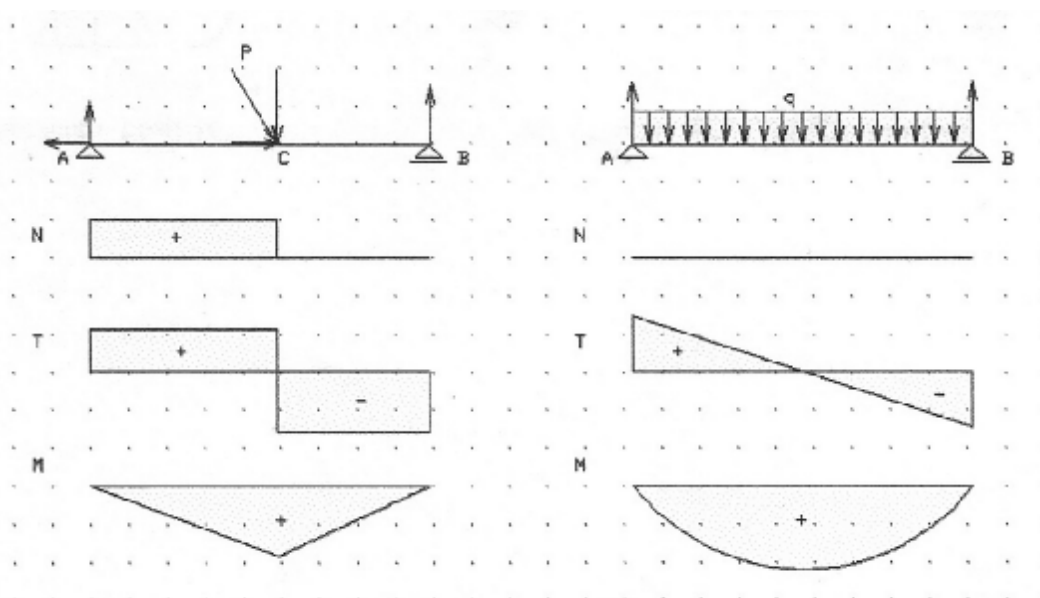
La parte di struttura esaminata deve essere considerata come un corpo rigido e le 3 caratteristiche di sollecitazione saranno calcolate scrivendo le 3 *equazioni di equilibrio*, utilizzando un sistema di riferimento locale.

- la somma di **tutte** le componenti di forza, **perpendicolari** alla sezione, rappresenta lo **sforzo normale**;
- la somma di **tutte** le componenti di forza, **tangenti** alla sezione, rappresenta lo **sforzo tagliente**;
- la somma di **tutti i momenti** rappresenta il **momento flettente**.

- **Tracciamento dei diagrammi.**

si disegnano riportando, in scala opportuna, rispetto alla linea d'asse assunta come *linea di riferimento*, i valori calcolati delle **caratteristiche di sollecitazione**.

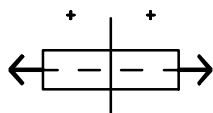
I **momenti positivi** vengono disegnati nella parte di fibre tese (*in basso*); N e T saranno riportati se **positivi al di sopra** della linea di riferimento.



Regole generali per il calcolo delle sollecitazioni e convenzioni sui segni.

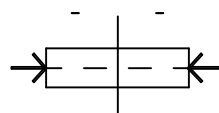
· **SFORZO NORMALE**

In una determinata sezione è dato dalla somma algebrica di tutte le forze assiali agenti a sinistra o a destra della sezione stessa



TRAZIONE

sollecitata con segno **positivo**



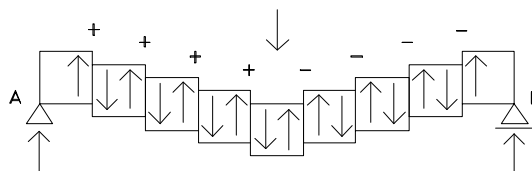
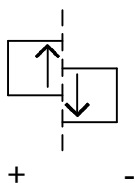
COMPRESSIONE

sollecitata con segno **negativo**

· **SFORZO DI TAGLIO**

In una determinata sezione è dato dalla somma algebrica di tutte le forze perpendicolari all'asse della trave agenti a sinistra o a destra della sezione.

Uno sforzo di taglio è **positivo** quando è diretto verso l'alto a sinistra e **negativo** quando è diretto verso il basso a destra della sezione.

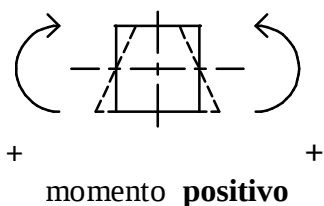


TAGLIO lungo la trave

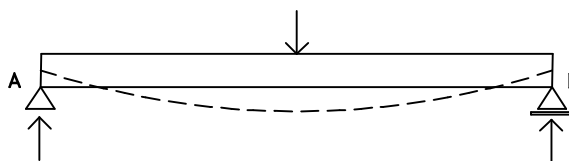
· **MOMENTO FLETTENTE**

In una determinata sezione è dato dalla somma algebrica dei momenti flettenti (coppia dovuta alla risultante relativa alla sezione dei carichi esterni) di tutte le forze agenti a sinistra o a destra della sezione.

Il momento è **positivo** se orario a sinistra della sezione e **negativo** se antiorario a destra della sezione.



momento **positivo**



MOMENTO FLETTENTE positivo

Le **tensioni** sono le *forze interne unitarie* che si oppongono alle deformazioni elastiche dovute alle forze esterne (carichi e reazioni vincolari); la natura e gli effetti prodotti dalle tensioni interne sono le *sollecitazioni interne* o *sforzi*. (Kgf/cm^2 - N/cm^2)

· Legge di Hooke

$s = E \cdot e$ Kg/cm^2 (proporzionalità tra tensioni e deformazioni entro i limiti di elasticità)

$$e = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{cm} \quad (\text{deformazione unitaria o allungamento})$$

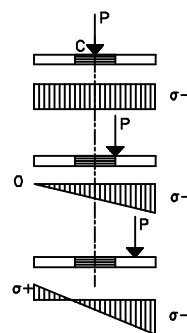
$$E = \frac{s}{e} \quad \text{Kg/cm}^2 \quad (\text{modulo di elasticità o di Young})$$

- **strato neutro**: insieme di fibre che non subiscono deformazione ($\sigma = 0$)

- **asse neutro**: retta d'intersezione dello strato neutro con il piano della sezione.

- **nocciolo centrale di inerzia**: è quella zona della sezione attorno al baricentro che rappresenta il luogo geometrico dei centri C (di pressione o trazione) relativi a tutti gli assi (neutri) tangenti o esterni alla figura.

Se il centro di pressione C è interno al nocciolo il diagramma della tensione è intrecciato (l'asse neutro taglia la sezione, che risulta compressa e tesa); se è esterno, l'asse neutro è esterno e quindi si hanno tensioni dello stesso tipo (sezione tutta tesa o compressa).



· FLESSIONE

Le sezioni si mantengono piane, le deformazioni variano linearmente e se vale la legge di Hooke, anche le tensioni variano linearmente.

- **Flessione retta**

quando l'asse neutro coniugato all'asse di sollecitazione è normale ad esso.

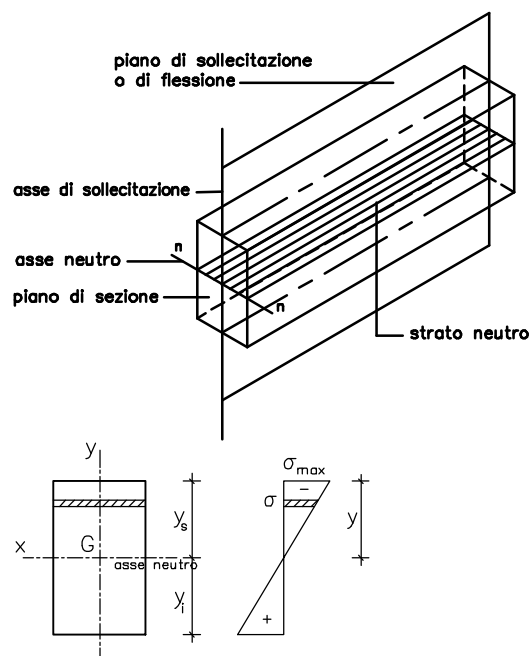
$$s = \frac{M}{I_x} \cdot y \quad (\text{formula di Navier})$$

dove: I_x momento d'inerzia sezione rispetto asse x
y distanza fibra considerata dall'asse neutro
per le fibre al *limite superiore*:

$$s_s = \frac{M}{W_s} \quad \text{essendo } W_s = \frac{I_x}{y_s}$$

per le fibre al *limite inferiore*:

$$s_i = \frac{M}{W_i} \quad \text{essendo } W_i = \frac{I_x}{y_i}$$



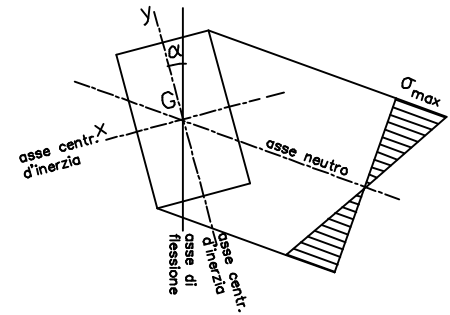
- Flessione deviata

quando l'asse neutro coniugato all'asse di sollecitazione è obliquo rispetto ad esso

$$\tan j = -\frac{I_x}{I_y} \tan a$$

la tensione è calcolata *sovrapponendo gli effetti*:

$$s_{\max} = s_x + s_y = \frac{M \cos a}{I_x} y + \frac{M \sin a}{I_y} x$$



· SFORZO NORMALE ASSIALE

compressione (-) o trazione (+) semplici

$$s = \frac{N}{A}$$

· SFORZO NORMALE ECCENTRICO

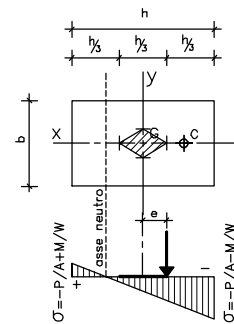
pressoflessione (sollecitazione composta)

nel caso di flessione retta per sovrapposizione di effetti:

$$s = -\frac{N}{A} \pm \frac{M}{I_x} y = -\frac{N}{A} \pm \frac{M}{W_x}$$

- *eccentricità*:

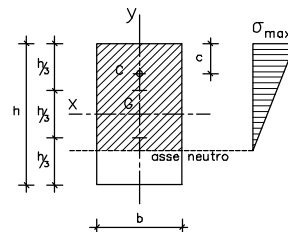
$$e = \frac{M}{N}$$



· SOLIDI NON RESISTENTI A TRAZIONE

la sezione è *parzializzata*

$$s_{\max} = \frac{2N}{3cb}$$



· TAGLIO

in presenza di flessione retta; provoca lo *scorrimento* reciproco delle facce di contatto con la sezione.

Tensione tangenziale media:

$$t_m = \frac{T \cdot S}{I \cdot b}$$

T sforzo di taglio nella sezione

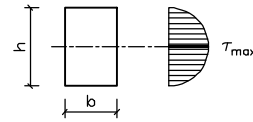
S mom. statico rispetto all'asse neutro della parte di sezione al di sopra o al di sotto della corda considerata

I mom. d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse neutro

b larghezza della corda considerata

- Per la **sezione rettangolare**:

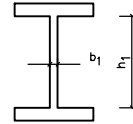
$$t_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{bh}$$



- Per la sezione **a doppio T**

$$t_m = \frac{T}{b_1 h_1}$$

$$t_{\max} \approx 2,5 t_m$$



· TORSIONE

sforzo tangenziale dovuto a *due coppie* uguali e contrarie agenti nelle sezioni di estremità di una trave.

- Sezione **circolare piena**

$$t_{\max} = \frac{16}{p} \cdot \frac{M_t}{D^3}$$

- sezione **rettangolare**

$$t_{\max} = \alpha \frac{M_t}{bh^2}$$

α coefficiente dipendente dal rapporto a/h

a/h	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00
α	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267

- CARICO DI PUNTA

instabilità alla flessione laterale di solidi **snelli** sottoposti a compressione assiale.

$$P_{crit} = \frac{p^2 EI_{\min}}{nl_o^2} \leq P$$

(formula di Eulero)

E modulo di elasticità

$i_{\min}$ mom.d'inerzia minore della sez

l_o luce libera di inflessione

P carico reale gravante

$i_{\min}$ raggio d'inerzia minimo della sez.

$$s = \frac{Pw}{A} \leq s_{amm}$$

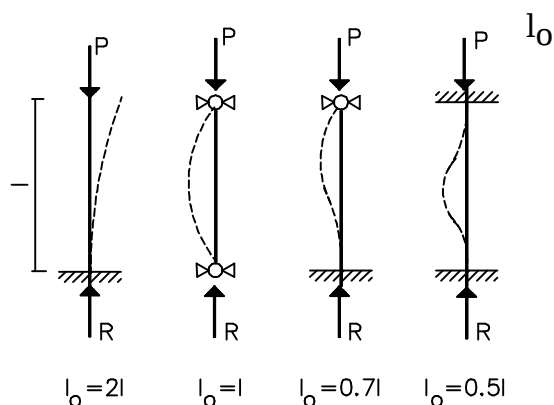
n coefficiente di sicurezza

ω coefficiente di maggiorazione del carico

- **snellezza**

$$l = \frac{l_o}{i_{\min}}$$

luce libera di inflessione



- Le **travature reticolari** sono travi costituite da aste (in legno, acciaio, cemento armato) e nodi (cerniere) che le collegano mutuamente secondo una disposizione geometrica in modo da formare un sistema rigidamente indeformabile. Possono essere:
 - **Travature piane**, quando le aste giacciono tutte nello stesso piano, i nodi sono considerati cerniere cilindriche;
 - **Travature spaziali**, quando le aste non giacciono tutte nello stesso piano, i nodi sono considerati cerniere sferiche;

Carichi esterni: sono forze concentrate nei nodi e giacenti nel piano medio della trave; le aste in tale ipotesi sono sollecitate esclusivamente a trazione (aste dette **tiranti**) o a compressione (aste dette **puntoni**).

Il peso proprio genera momenti trascurabili e le travi reticolari sono adatte a sopportare forti carichi ed a coprire grandi luci, con minor impiego di materiale rispetto alle travi a parete piena.

Equazione dei nodi e delle aste

$$n_a = 2 \cdot n_n - 3$$

(sistema isostatico, purché anche il numero dei vincoli esterni sia $v = 3$)

Al sistema reticolare più elementare strettamente indeformabile, costituito da 3 aste e 3 nodi (triangolo), si aggiungono per ogni nodo 2 aste

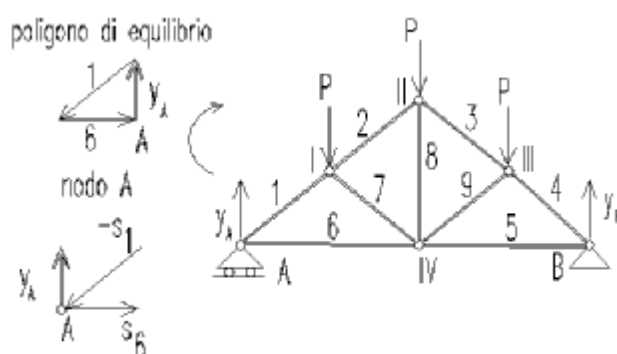
Calcolo degli sforzi nelle aste:

– Metodo dei poligoni di equilibrio ai nodi (grafico)

⇒ Si applica quando la travatura dispone almeno di un nodo nel quale concorrono 2 sole aste e vi sia applicata una forza esterna nota (nodo canonico).

Per l'equilibrio il **poligono delle forze** relativo al nodo, ottenuto scomponendo la forza nota secondo le direzioni delle due aste concorrenti, deve essere chiuso.

1. Fissata una scala delle forze si riporta la forza nota e si tracciano le parallele alle aste concorrenti nell'ordine in cui si trovano, immaginando di girare intorno al nodo in senso per es. destrogiro. Se il verso dello sforzo va contro il nodo lo sforzo è di **compressione** (puntone), se è diretto all'esterno del nodo è di **trazione** (tirante).



2. Si passa al successivo nodo canonico prendendo lo sforzo determinato precedentemente con il verso cambiato.

Il **cremoniano** è un unico diagramma in cui si raccolgono in tutti i poligoni di equilibrio ai nodi.

– Metodo delle sezioni o di Ritter (analitico)

⇒ Si applica quando si può praticare una sezione che tagli non più di 3 aste di cui 2 concorrenti in un nodo e la terza è quella di cui si deve calcolare lo sforzo.

Praticata la sezione x di Ritter e isolato il tronco, per es. di sinistra, insieme alle forze esterne agenti, si calcolano i momenti delle forze applicate al tronco, compreso lo sforzo incognito, rispetto al *nodo* nel quale concorrono le altre 2 aste tagliate, cosicché in questa **equazione di equilibrio alla rotazione** figuri quale unica incognita lo sforzo da determinare:

$$S_i^x r_i = \Sigma P \cdot d$$

(il momento dello sforzo interno S_i deve essere uguale e contrario alla somma dei momenti delle forze esterne P e Y).

Pertanto assumendo nell'equazione come positivo il verso del momento dello sforzo incognito, allora se il risultato ottenuto è positivo si conferma il senso destrogiro assunto, altrimenti il verso del momento dello sforzo interno deve essere sinistrogiro. Da ciò si desume se l'asta è un **puntone** (sforzo diretto verso la sezione) o un **tirante** (sforzo che si allontana dalla sezione).

