Considerazioni sul Big Bang*

Ing. Guido Antonelli

15 agosto 2002

1 Sommario

Queste note si propongono di esaminare alcune conseguenze deducibili dal modello cosmologico del Big Bang, che ipotizza che l'universo sia nato da una esplosione primordiale di straordinaria violenza, in seguito alla quale, con un processo durato parecchi miliardi di anni, si sono venuti formando tutti gli attuali corpi celesti.
In quest'articolo verrà riproposto lo schema elementare descritto da S. Weinberg nel famoso libro "I primi tre minuti"[2], che suppone che l'universo sia piano, cioè si espanda infinitamente con velocità tendente a 0 per $t \to \infty$. L'equazione matematica che descrive il modello sarà da noi corretta introducendo l'espressione relativistica dell'energia cinetica, per tener conto delle elevate velocità con cui la materia stellare si è andata espandendo.
Le conclusioni a cui si perviene pongono alcuni interrogativi riguardo al modo di interpretare la legge di Hubble, nell'ipotesi che vi siano due differenti espansioni del nostro universo, una associata alla radiazione elettromagnetica (fotoni), ed un'altra ai corpi dotati di massa.

2 Simbologia

I simboli che verranno usati sono così definiti:

t = tempo assoluto contato a partire dal Big Bang (s)
r = coordinata spaziale in geometria sferica (m)
v = velocità di espansione al raggio r (m/s)
m_0 = massa a riposo di un corpo di riferimento posto al raggio r (kg)
m = massa relativistica corrispondente alla massa a riposo m_0 (kg)
M = massa contenuta nella sfera di raggio r (kg)
α = lunghezza caratteristica associata alla massa M (m)
r_m = raggio dell'universo materiale (m)
r_f = raggio dell'universo fotonico (m)
M_m = massa di tutta la materia dell'universo (kg)
α_m = lunghezza caratteristica dell'universo associata alla massa M_m (m)
k = costante di gravitazione universale pari a $6.67 \cdot 10^{-11}\, m^3/(kg \cdot s^2)$
c = velocità della luce nel vuoto pari a $\approx 3 \cdot 10^8\ m/s$
l = lunghezza misurata in unità α_m
β = rapporto tra la velocità di un corpo materiale e quella della luce
$\varrho(l)$ = rapporto tra i raggi dell'universo materiale e fotonico per $r_m = l\,\alpha_m$
$\beta(l)$ = rapporto tra le velocità di espansione dell'universo materiale e fotonico per $r_m = l\,\alpha_m$

*Questo articolo è stato scritto con LaTeX [1].

3 Modello fisico-matematico

Dopo circa 700 000 anni a partire dal Big Bang secondo quanto previsto dal modello di S. Weinberg, la temperatura media dell'universo, formato da una miscela indistinta di materia e radiazione tra loro interagenti, era scesa a circa 3 000 K; da questo momento, con la cattura di elettroni da parte di protoni e nuclei di elio e la formazione dei rispettivi atomi, la materia divenne trasparente alla radiazione e le due componenti dell'universo iniziarono ad evolvere separatamente.
La radiazione proseguì l'espansione a velocità c, raffreddandosi e producendo, circa 13 miliardi di anni dopo, quella radiazione fossile corrispondente alla radiazione di corpo nero alla temperatura di $\approx 2.7\,K$ prevista da Gamow intorno al 1940, ma rilevata sperimentalmente solo negli anni Sessanta.
Questa radiazione, trascorsi alcuni minuti a partire dall'istante iniziale, non era stata più in grado di produrre spontaneamente materia sotto forma di particelle elementari (protoni, neutroni, neutrini ed elettroni) e nuclei di elio (particelle α), perché la sua temperatura era divenuta troppo bassa per permettere che tale fenomeno avvenisse senza violare le leggi di conservazione dell'energia.
La materia proseguì anch'essa l'espansione da una velocità estremamente prossima a c, dando via via origine a tutti quegli oggetti celesti, dai più grandi ai più piccoli, che possiamo adesso osservare nel cielo.
A causa della presenza della forza gravitazionale la materia andava tuttavia progressivamente rallentando; questo rallentamento continua tuttora e anche nell'ipotesi di universo piano, proseguirebbe all'infinito nel tempo mentre l'universo continuerebbe ad espandersi indefinitamente.
Poiché il tempo al quale è avvenuta la separazione tra materia e radiazione è praticamente irrilevante rispetto alla vita attuale dell'universo, possiamo trascurare tranquillamente la fase precedente, assumendo l'istante $t = 0$ come inizio del fenomeno di separazione.
Consideriamo perciò una sfera omogenea di materia di raggio arbitrario r e di massa M, la cui superficie si stia espandendo al tempo t con velocità v.
Nell'ipotesi di universo piano, l'energia potenziale gravitazionale di una qualsiasi massa elementare m situata sulla superficie di questa sfera[1] deve uguagliare l'energia cinetica di tale massa in modo che l'energia totale sia nulla[2].
Per migliorare l'approssimazione del modello utilizziamo l'espressione relativistica dell'energia cinetica $(m - m_0)\,c^2$ invece della forma classica $\frac{1}{2}\,m_0\,c^2$ e scriviamo:

$$\frac{k\,M\,m_0}{r} \;=\; (m - m_0)\,c^2 \tag{1}$$

dove:

$$m \;=\; \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad\qquad \beta \;=\; \frac{v}{c} \;=\; \frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

Poiché la massa M contenuta nella sfera di raggio r si conserva costante durante l'espansione, possiamo introdurre per comodità il parametro α :

$$\alpha \;=\; \frac{k\,M}{c^2} \tag{2}$$

[1] L'energia potenziale gravitazionale è quella corrispondente alla massa della sfera interna sottostante supposta concentrata nel centro della sfera stessa.

[2] L'energia totale, che si conserva durante l'espansione, deve essere nulla in quanto questo valore corrisponde alla condizione $v = 0$ per $r \to \infty$. Nella espressione relativistica dell'energia cinetica per $v = 0$ si ha $m = m_0$.

Effettuando le sostituzioni indicate ed elaborando l'espressione ottenuta[3] la (1) si trasforma nella seguente equazione differenziale lineare a variabili separabili:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \;=\; c\,\frac{\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\alpha+2r}}{\alpha+r} \tag{3}$$

Integrando tra i corrispondenti limiti $[\,0, r\,]$ e $[\,0, t\,]$, si può scrivere:

$$\int_0^r \frac{\alpha+r}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha+2r}}\,\mathrm{d}r = \int_0^t c\,\mathrm{d}t \;=\; c\,t$$

Per eseguire l'integrazione del primo membro conviene usare la sostituzione:

$$u^2 \;=\; \alpha + 2r \qquad\qquad \mathrm{d}\,r \;=\; u\,\mathrm{d}u$$

La formula finale a cui si perviene è la seguente:

$$\frac{(2\alpha+r)\,\sqrt{\alpha+2r}}{3\,\sqrt{\alpha}} - \frac{2}{3}\,\alpha \;=\; c\,t \tag{4}$$

Poiché la sfera di materia considerata è arbitraria, ai fini dei nostri ragionamenti possiamo supporre che questa sfera contenga tutta la materia dell'universo, cioè M_m, e che di conseguenza la (1) si riferisse ad una massa elementare che al tempo t si trovava al raggio r_m, cioè ai confini dell'universo materiale.
Assegnando quindi ad α il particolare valore α_m che si ottiene dalla (2) sostituendo M con M_m, la (4) fornisce in forma implicita la dipendenza dal tempo del raggio dell'universo materiale, mentre si deve ritenere che il raggio dell'universo fotonico sia pari a $c\,t$, in quanto la luce, secondo la teoria della relatività di Einstein, si muove sempre a velocità c.
Come si vede dall'analisi dimensionale poiché α_m è una lunghezza, la possiamo utilizzare come unità di misura delle lunghezze nel nostro universo, in quanto dipende solo da costanti universali e dalla massa totale della materia in esso contenuta.
Misurando quindi r_m in unità α_m, cioè scrivendo $r_m = l\,\alpha_m$, otteniamo:

$$\frac{\alpha_m}{3}\left[\,(2+l)\,\sqrt{1+2l} - 2\,\right] \;=\; c\,t \tag{5}$$

[3] Per comodità del lettore si riportano i singoli passaggi:

$$mc^2 \;=\; k\,\frac{M\,m_0}{r} + m_0\,c^2 \qquad \frac{m}{m_0}\,c^2 \;=\; \frac{k\,M}{r} + c^2 \qquad \frac{c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \;=\; \frac{k\,M}{r} + c^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \;=\; \frac{\alpha}{r} + 1 \qquad \sqrt{1-\beta^2} \;=\; \frac{r}{\alpha+r} \qquad 1-\beta^2 \;=\; \frac{r^2}{(\alpha+r)^2}$$

$$\beta^2 \;=\; 1 - \frac{r^2}{(\alpha+r)^2} \;=\; \frac{\alpha^2+2\alpha r}{(\alpha+r)^2} \qquad \beta \;=\; \frac{\sqrt{\alpha^2+2\alpha r}}{\alpha+r} \qquad v \;=\; c\,\frac{\sqrt{\alpha^2+2\alpha r}}{\alpha+r}$$

E' utile a questo punto definire la funzione adimensionata $\varrho(l)$ nel modo seguente:

$$\varrho(l) \;=\; \frac{r_m}{c\,t} \;=\; \frac{l\,\alpha_m}{c\,t} \;=\; \frac{3\,l}{\left[\,(2+l)\sqrt{1+2l}-2\,\right]} \tag{6}$$

Questa funzione, che rappresenta il rapporto tra il raggio dell'universo materiale e dell'universo fotonico, varia da 1 a 0 al variare di l da 0 ad ∞, ed è stata riportata in Tabella 1 per una serie di valori indicativi di l.

Table 1: Rapporto tra i raggi e le velocità degli universi materiale e fotonico

l	0	1	2	5	10	50	100	500	1000
$\varrho(l)$	1.0000	0.9386	0.8640	0.7070	0.5661	0.2881	0.2077	0.0945	0.0669
$\beta(l)$	1.0000	0.8660	0.7454	0.5528	0.4166	0.1971	0.1404	0.0632	0.0447

Nella stessa tabella viene riportata la funzione adimensionata $\beta(l)$, facilmente ottenibile dalla (3), che rappresenta il rapporto tra le velocità della materia e della radiazione ai confini dell'universo, ed è così definita:

$$\beta(l) \;=\; \frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\sqrt{1+2\,l}}{1+l} \tag{7}$$

Appare quindi evidente come al crescere di l, cioè del raggio dell'universo materiale misurato in unità α_m, e di conseguenza del tempo contato a partire dal Big Bang, i confini degli universi materiale e fotonico si separino sempre di più tra loro.
Viene inoltre spontaneo porsi la questione se, anche nell'ipotesi di universo chiuso, non si debba limitare questa chiusura alla sola parte materiale dell'universo, mentre la radiazione continuerebbe ad espandersi all'infinito, di fatto rendendo l'universo globalmente inteso sempre e comunque aperto.
In effetti la separazione tra materia e radiazione, avvenuta 700 000 anni dopo il Big Bang, e la diversità del loro comportamento nella fase di espansione, con una velocità decrescente per la materia e costante per la radiazione, sembra rendere improbabile che, nel caso di universo chiuso, esse possano invertire la loro direzione di espansione contemporaneamente ed iniziare il cammino a ritroso verso il Big Crunch.
Inoltre per quanto concerne la radiazione, questa inversione si svolgerebbe in modo continuo nell'ambito dell'energia, che si ridurrebbe fino ad annullarsi per poi risalire gradatamente durante la contrazione dell'universo, ma in modo assai singolare per quanto riguarda la velocità che subirebbe un cambiamento di direzione di 180 gradi, come se la luce urtasse perpendicolarmente contro uno specchio.
Può essere ora interessante trovare il valore della lunghezza caratteristica α_m, ma questo richiede la conoscenza della massa totale dell'universo M_m, quantità quest'ultima sulla quale non vi è attualmente concordanza tra gli astronomi a causa della presenza di materia oscura o di particelle non facilmente rilevabili come i neutrini.
Assumendo indicativamente un'incertezza pari a 2 ordini di grandezza, costruiamo la Tabella 2 assegnando ad M_m i due seguenti valori:

1. $M_m = 4 \cdot 10^{50}\ kg \approx 2 \cdot 10^{20}$ masse solari, corrispondenti ad 1 miliardo di galassie contenenti ciascuna 200 miliardi di stelle come il Sole. A questo valore, che rappresenta la massa della materia osservabile, corrisponde $\alpha_m = 2.96 \cdot 10^{23}\ m = 3.12 \cdot 10^7$ anni luce.

2. $M_m = 4 \cdot 10^{52}\ kg \approx 2 \cdot 10^{22}$ masse solari. Questo valore, 100 volte maggiore del precedente è quello corrispondente alla cosiddetta densità critica pari a $4.5 \cdot 10^{-27}\ kg/m^3$ per un universo di raggio pari a $13 \div 14$ miliardi di anni luce, come dedotto dalla costante di Hubble. In questo caso si avrebbe $\alpha_m = 2.96 \cdot 10^{25}\ m = 3.12 \cdot 10^9$ anni luce.

La Tabella 2 riporta i raggi dell'universo materiale e fotonico in funzione del tempo trascorso dal Big Bang, insieme ai parametri l, $\varrho(l)$ e $\beta(l)$ per i due casi ipotizzati.
Per costruire la Tabella è necessario trovare la radice reale della (5), considerata come equazione nell'incognita l, per ciascun valore del tempo t.

Table 2: Raggi degli universi e loro rapporti caratteristici in funzione del tempo

Tempi (10^6 a.)	$M_m = 2 \cdot 10^{20}$ masse solari $\alpha_m = 3.12 \cdot 10^7\ a.l.$				$M_m = 2 \cdot 10^{22}$ masse solari $\alpha_m = 3.12 \cdot 10^9\ a.l.$			
r_f (10^6 a.l.)	l	r_m (10^6 a.l.)	$\varrho(l)$	$\beta(l)$	l	r_m (10^6 a.l.)	$\varrho(l)$	$\beta(l)$
1	0.0320	0.9998	0.9998	0.9995	0.0003	1.0000	1.0000	1.0000
2	0.0641	1.9988	0.9994	0.9982	0.0006	2.0000	1.0000	1.0000
5	0.1597	4.9829	0.9966	0.9905	0.0016	5.0000	1.0000	1.0000
10	0.3169	9.8880	0.9888	0.9706	0.0032	10.000	1.0000	1.0000
20	0.6206	19.361	0.9681	0.9238	0.0064	20.000	1.0000	1.0000
50	1.4485	45.194	0.9039	0.8062	0.0160	49.998	1.0000	0.9999
100	2.6371	82.279	0.8228	0.6887	0.0320	99.984	0.9998	0.9995
200	4.6289	144.421	0.7221	0.5690	0.0641	199.875	0.9994	0.9982
500	9.3071	290.382	0.5808	0.4297	0.1597	498.292	0.9966	0.9905
1 000	15.4037	480.597	0.4806	0.3438	0.3169	988.801	0.9888	0.9706
2 000	25.1362	784.248	0.3921	0.2740	0.6206	1936.149	0.9681	0.9238
5 000	47.3497	1477.312	0.2955	0.2023	1.4485	4519.379	0.9039	0.8062
10 000	75.9321	2369.081	0.2369	0.1607	2.6371	8227.904	0.8228	0.6887
15 000	99.9161	3117.384	0.2078	0.1404	3.6800	11481.674	0.7654	0.6178

La prima colonna riporta i tempi trascorsi a partire dal Big Bang e nello stesso tempo il raggio dell'universo fotonico in milioni di anni-luce, in quanto espresso dallo stesso numero.
Per mostrare come questa Tabella debba essere interpretata facciamo l'ipotesi che il nostro universo abbia 10 miliardi di anni, e di conseguenza indipendentemente dalla massa totale M_m della materia in esso contenuta, il suo raggio fotonico sarà evidentemente pari a 10 miliardi di a.l..
A questo punto si avrebbero due diverse situazioni in funzione della massa totale dell'universo:

1. $M_m \approx 2 \cdot 10^{20}$ masse solari: il raggio r_m dell'universo materiale (galassie, stelle, ecc.) è solamente 2.369 miliardi di a.l., corrispondenti a 75.9 volte la lunghezza caratteristica α_m, mentre la materia ai confini dell'universo si va espandendo con una velocità pari solamente al 16.07 % della velocità della luce.

2. $M_m \approx 2 \cdot 10^{22}$ masse solari: il raggio r_m dell'universo materiale (galassie, stelle, ecc.) è pari a 8.228 miliardi di a.l., corrispondenti a 2.637 volte la lunghezza caratteristica α_m, mentre la materia ai confini dell'universo si va espandendo con una velocità pari al 68.87 % della velocità della luce.

4 Il modello proposto e la legge di Hubble

L'equazione (3) che qui riscriviamo:

$$v = c \frac{\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\alpha + 2r}}{\alpha + r} \tag{8}$$

traduce la relazione tra velocità e distanza di un oggetto cosmologico rispetto al punto geometrico in cui è avvenuto il Big Bang.
Se la stessa trattazione venisse ripetuta utilizzando la forma classica $\frac{1}{2}\, m_0\, c^2$ dell'energia cinetica si sarebbe arrivati a dedurre la famosa relazione dovuta a Hubble:

$$v = H\, r \tag{9}$$

Infatti la relazione (1) sarebbe stata scritta più semplicemente:

$$k\,\frac{m_0\, M}{r} = \frac{1}{2}\, m_0\, v^2$$

da cui si deduce:

$$v^2 = 2\,\frac{kM}{r}$$

Ora indicando con d la densità media della sfera di massa M_m, e ricordando che il volume di tale sfera è $\frac{4}{3}\,\pi r^3$, otteniamo facilmente:

$$v^2 = \frac{8\,\pi\, k\, d}{3}\, r^2$$

e quindi estraendo la radice e prendendo il segno positivo in quanto durante l'espansione il raggio è crescente con il tempo, ritroviamo la (9), con la costante H di Hubble espressa da:

$$H = \sqrt{\frac{8\,\pi\, k\, d}{3}} \tag{10}$$

Si può osservare che nelle relazioni riportate sono presenti due grandezze incognite molto importanti per la cosmologia, l'età attuale dell'universo t e la massa totale M_m della materia in esso presente. Se quindi si potesse conoscere con sufficiente approssimazione, mediante misure di red-shift, la velocità di un oggetto supposto ai confini dell'universo materiale, sarebbe possibile costruire un diagramma che in funzione del tempo trascorso dal Big Bang, fornisca la distanza dell'oggetto, cioè il raggio di tale universo, e la massa totale di materia in esso contenuta.
Tuttavia si deve osservare che, studiando oggetti lontanissimi, noi non sappiamo se essi siano effettivamente ai confini dell'universo materiale; questo non pregiudica la trattazione, ma implica che la massa che entra in gioco in queste relazioni non sarebbe più la massa totale M_m, ma solamente quella contenuta nella sfera il cui raggio è pari alla distanza dell'oggetto.
In conclusione le formule di questo modello, unitamente alle altre informazioni, ottenibili da fenomeni, tecniche e modelli differenti, possono costituire un ulteriore strumento per avvicinarci al quadro complessivo del fenomeno, anche perché la loro semplicità ci permette di capire intuitivamente le relazioni che collegano i vari parametri, meglio di modelli più sofisticati, che richiedono atti di fede nella loro correttezza matematica e nelle loro conclusioni, talvolta di difficile comprensione per la nostra mente.

5 Conclusioni

Il modello descritto, pur essendo basato su equazioni di tipo classico, si avvale della espressione relativistica dell'energia cinetica. La soluzione dell'equazione differenziale che descrive questo modello, nell'ipotesi di universo piano, permette di trovare il moto di espansione dell'universo materiale e di quello fotonico.
Dalla conoscenza dell'età dell'universo e della velocità di recessione degli oggetti più lontani, questo modello permetterebbe di dedurre indirettamente uno dei parametri più importanti per la scienza cosmologica, cioè la massa totale M_m dell'universo materiale.

Contents

List of Tables

References

[1] Claudio Beccari, *LaTeX, Guida ad un sistema di editoria elettronica*, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 1991

[2] Steven Weinberg, *I primi tre minuti*, Oscar Saggi Mondadori, 1977

[3] Murray R. Spiegel, *Mathematical handbook of formulas and tables*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, 1968