Appunti di “Controlli Automatici 1”

Sistemi dinamici lineari del 1° ordine

INTRODUZIONE

Si definisce **sistema (elementare) del primo ordine** un sistema (lineare tempo-invariante) che sia caratterizzato da una funzione di trasferimento che, a meno di un fattore costante, si può porre nella forma seguente:

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{1+\tau s}}$$

Si tratta cioè di una funzione razionale strettamente propria avente il denominatore di 1° grado. La **costante di tempo** τ è quella, come si vedrà in seguito, che caratterizza il comportamento dinamico del sistema. Essa determina anche l’unico polo della funzione H(s), che è $s=-1/\tau$.

RISPOSTA AL GRADINO UNITARIO

Per studiare il comportamento di un simile sistema, lo si eccita mediante uno dei **segnali canonici** (gradino, impulso, rampa e rampa parabolica). Per esempio, supponiamo di porre in ingresso al sistema il **gradino unitario** $x(t)=H(t)$: la sua trasformata di Laplace è 1/s per cui, nell’ipotesi di condizioni iniziali nulle, l’uscita (forzata) assume l’espressione

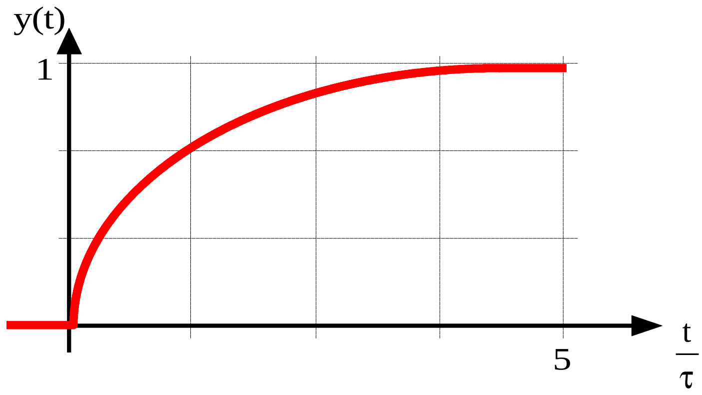
$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s(1+\tau s)}$$

Antitrasformando questa funzione, otteniamo l’andamento dell’uscita (forzata) nel tempo:

$$Y(s) = \frac{1}{s(1+\tau s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1+\tau s} = \frac{1}{s} + \frac{-\tau}{1+\tau s} \longrightarrow \boxed{y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

da cui si comprende quanto detto prima a proposito della costante τ.

L’andamento nel tempo di y(t) è del tipo raffigurato nella figura seguente, dove la scala dei tempi (in ascisse) è stata normalizzata in rapporto alla costante di tempo τ:



Quando t=τ, la risposta assume un valore pari al 63.2% del valore finale di regime, che si raggiunge approssimativamente dopo 5τ; per t=2τ, il valore è pari all’86.5% del valore finale, mentre per t=3τ si passa al 95% .

Si definisce **tempo di assestamento** del sistema il tempo necessario perché y(t) rimane entro il 5% del valore finale. Analiticamente, il tempo di assestamento corrisponde all’istante t_S che verifica la condizione

$$\left|y(\infty)-y(t_S)\right| = \frac{5}{100}$$

Nel nostro caso, sostituendo l’espressione di y(t), abbiamo quanto segue:

$$\begin{cases} y(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 1 \\ y(t_S) = 1-e^{-\frac{t_S}{\tau}} \end{cases} \longrightarrow e^{-\frac{t_S}{\tau}} = \frac{5}{100} \longrightarrow \boxed{t_S = 3\tau}$$

Abbiamo dunque trovato che il tempo di assestamento di un sistema del 1° ordine è pari a circa 3τ. Per t=5τ, come detto, l’uscita raggiunge il 99.3% del valore di regime, mentre, per t=7τ, si arriva al 99.91%.

E’ interessante osservare che, se calcoliamo la quantità y’(t=0), otteniamo la *velocità con cui parte la risposta* (corrispondente alla tangente ad y(t) nell’origine):

$$y' t = 0) = \left[\frac{d}{dt}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right]_{t=0} = \left[\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_{t=0} = \frac{1}{\tau}$$

Quindi, la velocità con cui parte la risposta del sistema ad un gradino unitario è il reciproco della costante di tempo τ (e corrisponde dunque al valore assoluto del polo della funzione di trasferimento): ciò significa che la risposta parte tanto più velocemente quanto minore è τ.

RISPOSTA ALLA RAMPA

Vediamo adesso cosa succede applicando in ingresso al sistema non più il gradino unitario, bensì la **rampa unitaria** x(t)=h(t)r(t): la sua trasformata di Laplace è $1/s^2$ per cui, sempre nell’ipotesi di condizioni iniziali nulle, l’uscita (forzata) assume l’espressione

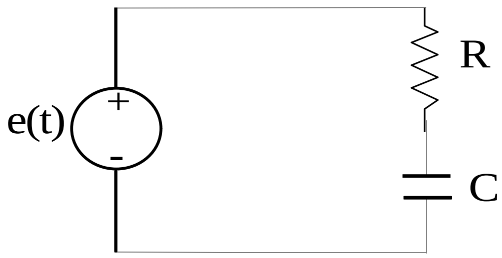
$$Y(s)=H(s)X(s)=\frac{1}{s^2(1+\tau s)}$$

Antitrasformando questa funzione, otteniamo l'andamento dell'uscita (forzata) nel tempo. Per effettuare l'antitrasformazione possiamo procedere sia mediante l'*espansione in fratti semplici* sia mediante l'applicazione della *proprietà di integrazione nel tempo* della trasformata di Laplace (visto che r(t) non è altro che l'integrale del gradino unitario): seguendo quest'ultima strada, basta ricordare che la risposta al gradino era $1-e^{-\frac{t}{\tau}}$ per scrivere che la risposta alla rampa è

$$y(t)=\int_0^t\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)dT=\int_0^t dT-\int_0^t e^{-\frac{T}{\tau}}dT \longrightarrow \boxed{y(t)=t-\tau\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)}$$

ESEMPIO

Consideriamo un semplice circuito RC serie:



Applicando la LKC e la LKT al circuito, otteniamo l'equazione integro-differenziale

$$e(t)=Ri(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(T)dT$$

Se facciamo inoltre l'ipotesi di condizioni iniziali nulle (cioè supponiamo che il condensatore sia scarico all'istante $t=0^-$), l'estremo inferiore dell'integrale diventa 0 e quindi l'equazione diventa

$$e(t)=Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(T)dT$$

Applicando l'operatore trasformata di Laplace, otteniamo dunque

$$E(s)=RI(s)+\frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) \longrightarrow I(s)=\frac{1}{R+\frac{1}{Cs}}E(s)$$

Considerando E(s) come ingresso e la tensione V(s) sul condensatore come uscita, otteniamo

$$V(s)=\frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s)=\frac{1}{C}\frac{1}{s}\frac{1}{R+\frac{1}{Cs}}E(s)=\frac{1}{RCs+1}E(s)$$

dal che deduciamo che la funzione di trasferimento del sistema è

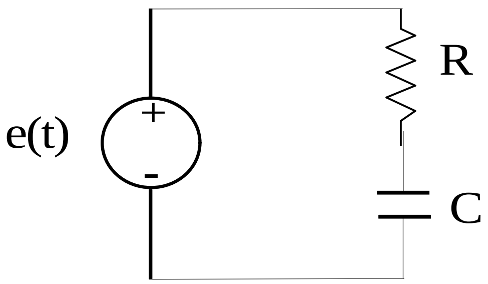
$$H(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$

La costante di tempo è dunque τ=RC e quindi il polo della funzione di trasferimento è s=-1/RC. Applicando in ingresso al sistema il gradino unitario, otteniamo l'uscita

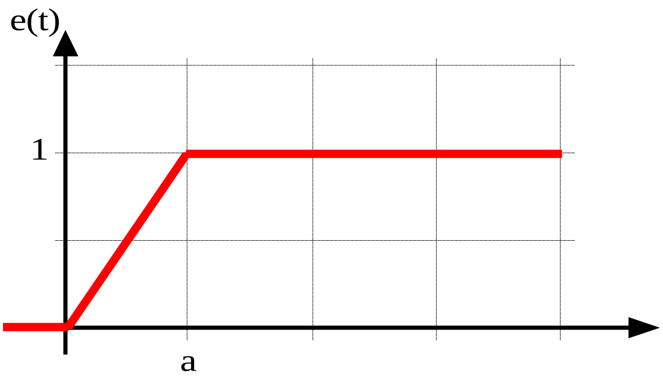
$$I(s) = \frac{1}{RCs+1}\frac{1}{s} = \frac{1}{(RCs+1)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{RCs+1} = \frac{1}{s} + \frac{-RC}{RCs+1} \xrightarrow{L^{-1}} y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$$

ESEMPIO

Consideriamo nuovamente il circuito RC serie dell'esempio precedente:



Vogliamo calcolare la tensione v(t) sul resistore provocata dal segnale e(t) fatto nel modo seguente:



Nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle, abbiamo visto nell'esempio precedente che vale la relazione

$$e(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(T)dT$$

Applicando l'operatore trasformata di Laplace, otteniamo dunque che

$$E(s) = RI(s) + \frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) \longrightarrow I(s) = \frac{1}{R+\frac{1}{Cs}}E(s) \longrightarrow V(s) = RI(s) = \frac{R}{R+\frac{1}{Cs}}E(s) = \frac{1}{1+\frac{1}{RCs}}E(s)$$

Adesso dobbiamo sostituire l'espressione di E(s): considerando che la il segnale in ingresso è esprimibile, nel dominio del tempo, nella forma

$$e(t)=\frac{1}{a}r(t)-\frac{1}{a}r(t-a)$$

deduciamo che $E(s)=\frac{1}{as^2}\left(1-e^{-as}\right)$, per cui la trasformata dell'uscita (forzata) è

$$V(s)=\frac{RCs}{RCs+1}\frac{1}{as^2}\left(1-e^{-as}\right)=\frac{RC}{a}\frac{1-e^{-as}}{(RCs+1)s}$$

Antitrasformare questa funzione non è semplice, per cui applichiamo il **teorema di sovrapposizione degli effetti**, calcolando prima la risposta al segnale $e_1(t)=\frac{1}{a}r(t)$ e poi quella al segnale $e_2(t)=-\frac{1}{a}r(t-a)$, che corrisponde ad $e_1(t)$ traslato di a e moltiplicato per -1.

La risposta ad $e_1(t)$ ha chiaramente espressione

$$V_1(s)=\frac{RCs}{RCs+1}\frac{1}{as^2}=\frac{RC}{a}\frac{1}{(RCs+1)s}=\frac{RC}{a}\left(\frac{A}{(RCs+1)}+\frac{B}{s}\right)=\frac{RC}{a}\left(\frac{-RC}{(RCs+1)}+\frac{1}{s}\right)$$

e quindi la sua antitrasformata è

$$_1(t \;=\frac{RC}{}L^{-1}\left[\frac{-RC}{(\qquad +1)}+\frac{}{s}\right]=\frac{RC}{}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

La risposta ad $e_2(t)$, invece, sarà nient'altro che $v_1(t)$ traslata di a e moltiplicata per -1, per cui sarà

$$v_2(t)=H(t-a)\frac{RC}{a}\left(e^{-\frac{t-a}{RC}}-1\right)$$

La risposta (forzata) complessiva è dunque la seguente:

$$v(t)=v_1(t)+v_2(t)=\frac{RC}{a}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)+H(t-a)\frac{RC}{a}\left(e^{-\frac{t-a}{RC}}-1\right)$$

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: www.sandropetrizzelli.it
succursale: users.iol.it/sandry