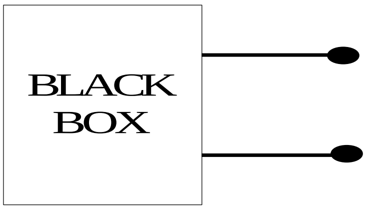
Appunti di "Elettrotecnica"

I bipoli

Introduzione

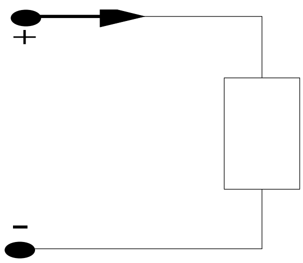
LA BLACK-BOX

Ci concentriamo sulla descrizione dei modelli dei circuiti e dei dispositivi elettronici. Cominciamo ovviamente dagli apparati più semplici, i quali presentano generalmente 2 soli terminali (da cui il nome di **bipoli**) mediante i quali sono collegati al "*mondo esterno*": tali due terminali costituiscono perciò la "**porta**" del dispositivo.



Il nome "**black-box**" viene dal fatto che *la teoria dei circuiti non si interessa al comportamento interno del dispositivo, ma solo al comportamento di quest'ultimo ai propri morsetti nel momento in cui lo si collega ai morsetti di altri dispositivi.*

Ovviamente, quello rappresentato è un dispositivo (sia pure generico) fisico: il corrispondente modello ideale è il cosiddetto **bipolo**, che si rappresenta così:



VARIABILI TERMINALI O VARIABILI DI PORTA

Il comportamento elettrico di un dispositivo elettrico a due terminali viene rappresentato, a livello circuitale, da un modello che abbiamo chiamato "bipolo": *perché questo bipolo simuli il comportamento elettrico del dispositivo, è necessario scegliere due variabili ai morsetti e successivamente individuare il legame funzionale esistente tra di esse;* l'individuazione di tale legame consente di tracciare, nel piano cartesiano individuato dalle due variabili, la cosiddetta **curva caratteristica**, o semplicemente **caratteristica** del bipolo, cioè il luogo di tutti i punti di funzionamento dell'elemento stesso. L'utilità di questa caratteristica è quella di poter stabilire se il bipolo scelto è in grado di rappresentare, a livello circuitale, il dispositivo elettrico in esame.

Una volta individuato il legame funzionale tra le due variabili terminali, possiamo dire di aver caratterizzato in modo completo il nostro bipolo.

Abbiamo parlato di **variabili terminali**: queste vanno scelte in modo che siano MISURABILI ed INDIPENDENTI. Ci sono allora 4 possibili candidate per svolgere il ruolo di variabili terminali di un bipolo e sono le seguenti:

- tensione V
- corrente elettrica I
- carica elettrica $q = \int_{-\infty}^{t} I(T)dT$
- flusso $\varphi = \int_{-\infty}^{t} V(T)dT$

Naturalmente, le possibili combinazioni di tali variabili terminali sono le seguenti:

1. V-I
2. V-q
3. I-φ
4. q-φ

Dobbiamo allora vedere se esiste una curva caratteristica che individua tutti i punti del funzionamento dell'elemento fisico nel piano individuato da ciascuna delle 4 coppie; per ciascuno di quei 4 legami esiste un corrispondente bipolo:

1. resistore
2. condensatore
3. induttore
4. memristore

Esempio

Facciamo un esempio concreto di ricerca di un bipolo corrispondente ad un preciso legame funzionale tra due determinate variabili terminali.

Come variabili terminali per il dispositivo in esame scegliamo corrente i(t) e tensione v(t) e supponiamo che il legame trovato, studiando il dispositivo elettrico, sia del tipo

$$i(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$\text{dove} \quad v(t) = V_{MAX}\sin(t)$$

Vogliamo allora vedere se esiste un bipolo in cui il legame tra la tensione e la corrente sia proprio questo. Le possibilità, come visto prima, sono 4: resistore, condensatore, induttore e memristore.

Cominciamo perciò a vedere se può trattarsi di un resistore. Intanto, nota la forma d'onda della tensione e nota la relazione che la lega alla corrente, abbiamo che

$$i(t) = \frac{dv(t)}{dt} = V_{MAX}\cos(t)$$

Fissato allora un generico istante di tempo t=α, si avrà, in tale istante, che

$$v(\alpha) = V_{MAX}\sin(\alpha)$$
$$i(\alpha) = V_{MAX}\cos(\alpha)$$

Consideriamo allora il grafico cartesiano (v,i) e rappresentiamo il punto P corrispondente ai valori $v(\alpha),i(\alpha)$. Dobbiamo verificare se tutti i punti di funzionamento del dispositivo cadono su di un'unica curva, che sarà, se esiste, la nostra caratteristica. Dato che le leggi con cui variano pressione e corrente sono

$$v(t) = V_{MAX}\sin(t)$$
$$i(t) = V_{MAX}\cos(t)$$

il luogo dei punti di funzionamento del dispositivo si può ottenere elevando al quadrato e quindi sommando: in tal modo si ottiene

$$v^2 + i^2 = V_{MAX}^2$$

Questa equazione non rappresenta, nel piano (v,i), una curva unica, in quanto, al variare di V_{max}, i punti di lavoro si espandono lungo il piano.

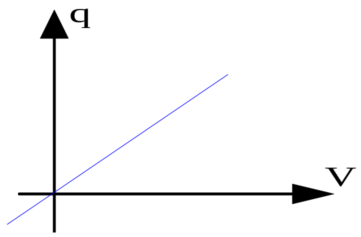
Scartato il resistore, proviamo con il condensatore, nel quale le variabili terminali sono la carica q e ancora una volta la tensione v. La prima cosa da fare è dunque quella di trovarsi l'espressione della carica: abbiamo, usando la semplice definizione, che

$$q = \int_{-\infty}^{t} i(T)dT = \int_{-\infty}^{+\infty} V_{max}\cos(T)dT = V_{max}\sin(t)$$

Quindi, le variabili terminali sono in questo caso

$$\begin{cases} q(t) = V_{max}\sin(t) \\ V(t) = V_{max}\sin(t) \end{cases}$$

e si vede subito come il loro legame, ossia il luogo di funzionamento del dispositivo, sia q=V a prescindere dal valore assunto da V_{MAX}:



Abbiamo dunque trovato che, per t fissato e a prescindere dal valore di V_{MAX}, la curva carica-tensione è sempre la stessa, ossia tutti i possibili punti di funzionamento del dispositivo si trovano su tale curva. Possiamo dunque concludere che <u>il bipolo rappresentativo del nostro dispositivo è un condensatore la cui caratteristica è lì rappresentata</u>.

PRINCIPI DELLA COSTANZA DELLA CARICA ELETTRICA E DEL FLUSSO

Ci soffermiamo un attimo sulla carica q e sul flusso φ per enunciare 2 importanti principi che li riguardano.

Partiamo dalla carica: intanto, essa è legata al concetto di corrente elettrica mediante la nota legge

$$q(t)=\int_{-\infty}^{t} i(T)dT$$

Possiamo spezzare questo integrale in due parti e scrivere che

$$q(t)=\int_{-\infty}^{t} i(T)dT=\int_{-\infty}^{0} i(T)dT+\int_{0}^{t} i(T)dT=q_0+\int_{0}^{t} i(T)dT$$

Il **principio di conservazione della carica elettrica** afferma allora che, *se la corrente i(T) è limitata nell'intervallo (0,t), ossia se* $|i(T)|\le M \quad \forall T\in(0,t)$*, allora la funzione q(t) è continua nell'intervallo (0,t).*

In termini pratici, questo teorema ci dice questo: supponiamo che la corrente i(t) abbia un andamento che presenta un picco elevato ma comunque finito nell'istante t=α, ossia una variazione istantanea del proprio valore: se q(t) è una funzione continua, questo principio afferma che NON ritroviamo in q(t) la stessa variazione istantanea cui è invece soggetta la corrente, ossia vale la relazione di continuità

$$q\left(\alpha^-\right)=q(\alpha)=q\left(\alpha^+\right)$$

Il discorso è analogo per il flusso: intanto si ha che

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{t} v(T)dT=\int_{-\infty}^{0} v(T)dT+\int_{0}^{t} v(T)dT=V_0+\int_{0}^{t} v(T)dT$$

Il **principio della costanza del flusso** afferma che, *se la funzione v(T) è limitata nell'intervallo (0,t), ossia risulta valida la relazione* $|v(T)|\le M \quad \forall T\in(0,t)$*, allora la funzione* $\varphi(T)$ *è continua in (0,t).*

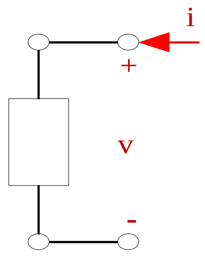
Quindi, a brusche ma limitate variazioni di V(t) non corrispondono uguali variazioni del flusso.

Ovviamente, il principio della costanza della carica e quello della costanza del flusso non valgono più quando le variazioni rispettivamente di I(t) e V(t) non sono limitate (nell'intervallo considerato).

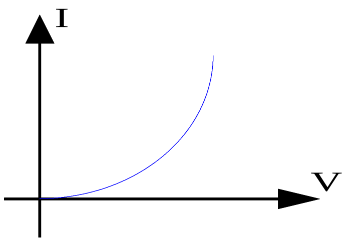
CONVENZIONI DI SEGNO PER TENSIONE E CORRENTE

Conosciamo la necessità di fissare un verso di percorrenza della corrente e una polarità della tensione ai capi di ciascun elemento circuitale: abbiamo detto che la scelta è del tutto arbitraria da parte dell'analista. Vogliamo ora vedere quali sono le 4 possibili scelte che si possono fare e quali i riflessi di tale scelta sulla curva caratteristica dell'elemento, ossia su quella curva che abbiamo definito come il luogo di tutti i punti di funzionamento dell'elemento stesso.

Supponiamo di avere il generico bipolo e supponiamo che corrente e tensione siano le variabili terminali che usiamo per caratterizzarlo:

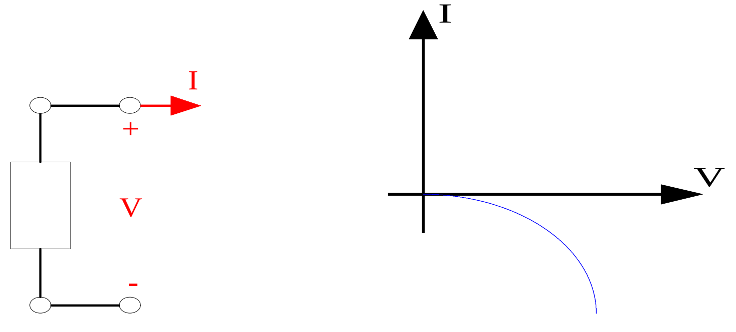


Supponiamo che, con la convenzione indicata nella figura precedente, per cui il terminale positivo è quello da cui entra la corrente I, si ottenga per il bipolo considerato la seguente caratteristica:



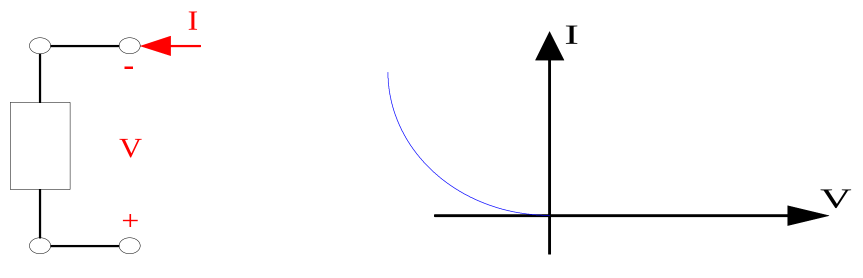
Questa è dunque la prima possibile convenzione: essa prende il nome di **convenzione dell’utilizzatore** ed è quella normalmente usata. Si tratta cioè della convenzione per cui la corrente entra dal morsetto a potenziale maggiore.

Un’altra possibilità è quella di invertire il verso della corrente, ossia di farla uscire dal nodo a potenziale maggiore:



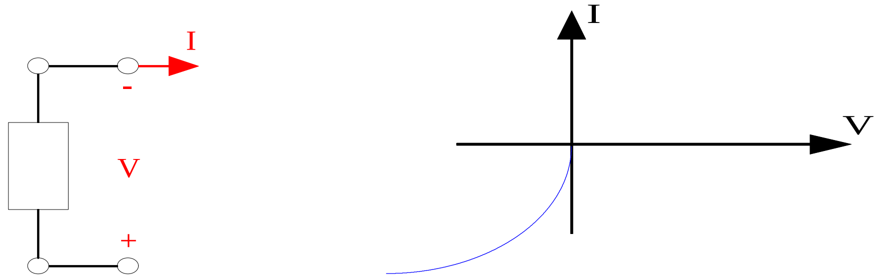
Si nota che l’inversione del verso di percorrenza della corrente corrisponde ad una inversione della curva rispetto all’asse delle tensioni.

Se, invece, lasciassimo inalterato il verso della corrente e invertissimo la polarità della tensione V, avremmo quanto segue:



Quindi, questa volta, la simmetria viene fatta rispetto all’asse delle correnti.

L'ultima possibilità è l'inversione sia del verso della corrente sia della polarità della tensione: è intuitivo aspettarsi una caratteristica simmetrica rispetto ad entrambi gli assi, ossia rispetto all'origine.



Si tratta adesso di stabilire quale sia la più conveniente: abbiamo già accennato al fatto che si tratta della prima, quella dell'utilizzatore, ma adesso vogliamo vedere perché: *la scelta deve ricadere sulla convenzione, tra quelle 4, tale che la potenza istantanea* $p(t) = v(t)i(t)$ *rappresenti una potenza entrante quando p(t)>0.*

E' possibile dimostrare che a questo requisito risponde solo la prima convenzione ed è per questo che noi la utilizziamo.

BIPOLI LINEARI

Consideriamo ancora una volta il nostro generico bipolo: indichiamo le sue variabili terminali genericamente con u ed y e supponiamo che il loro legame funzionale sia del tipo $y = T(u)$, ossia che, noto il valore della variabile u ad un certo istante, il valore della variabile y, allo stesso istante, si ottenga applicando ad u la *trasformazione* indicata genericamente con T.

Allora, diremo che il nostro bipolo è **lineare** se e solo se risultano verificate 2 proprietà fondamentali:

1. **<u>proprietà di additività:</u>** $\forall \begin{matrix} u_1 & y_1 = T(u_1) \\ u_2 & y_2 = T(u_2) \end{matrix} \quad : \quad y_S = T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = y_1 + y_2$

2. **<u>proprietà di omogeneità</u>**: $\forall \alpha \in R: \quad y_\alpha = T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha y$

Esempi vari

Supponiamo che le variabili terminali di un generico bipolo siano y ed u e siano legate da una relazione del tipo

$$y = ku$$

(la corrispondente caratteristica è la bisettrice del primo quadrante). E' facile verificare come questo legami soddisfi entrambe le condizioni prima enunciate, per cui il bipolo è lineare.

Questo esempio è importante in quanto ci evidenzia che *si possono considerare lineare tutti i bipoli la cui caratteristica è una retta passante per l'origine.*

Supponiamo adesso di avere un altro bipolo, per il quale il legame tra le variabili terminali sia

$$y = ku + m$$

(la corrispondente caratteristica è una retta non passante per l'origine). Vediamo se è lineare, cominciando a verificare se quel legame soddisfa la proprietà additiva: presi $y_1=ku_1+m$ e $y_2=ku_2+m$, abbiamo che

$$y_S = k(u_1+u_2) + m = ku_1 + ku_2 + m$$

e quindi il valore di y_S è diverso dalla somma di y_1 e y_2. Deduciamo che il bipolo non è lineare.

Bipoli tempo-invarianti

Consideriamo sempre il generico bipolo caratterizzato dalle variabili circuitali y ed u. Cominciamo con l'introdurre il cosiddetto **operatore traslazione**: si tratta di quell'operatore Q che, applicato ad una funzione qualsiasi, ne opera una traslazione. In termini matematici si ha che

$$Q(u(t)) = u(t-\alpha) \qquad \forall \alpha > 0$$

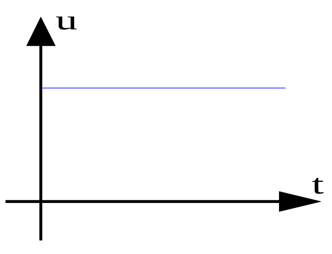
Supponiamo allora che il legame funzionale tra y ed u nel nostro bipolo sia y= T(u). Diremo che il bipolo è **tempo-invariante** o anche "stazionario" se

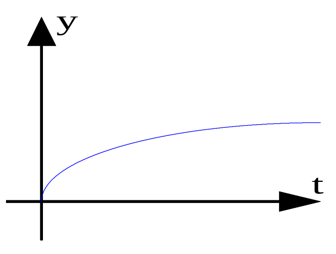
$$y_\alpha = T(Q(u(t))) = Q(T(u(t))) = Q(y) = y(t-\alpha)$$

ossia se, applicando l'operatore traslazione ad u, risulta traslata, della stessa quantità, anche y.

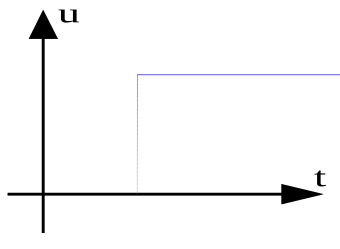
Esempio

Supponiamo che le variabili y ed u del nostro bipolo abbiano i seguenti andamenti temporali:

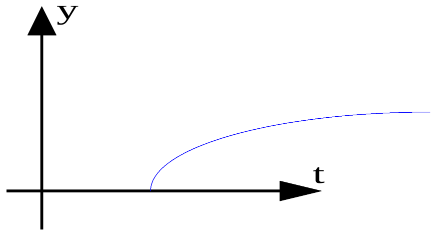




Supponiamo allora che venga applicata una traslazione della u, per cui l'andamento nel tempo di questa variabile divenga il seguente:



Allora, potremo affermare che il bipolo è tempo-invariante se anche l'andamento della y risulta semplicemente traslato della stessa quantità, ossia se si ha che



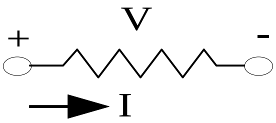
In caso contrario, diremo che il bipolo non è tempo-invariante.

I resistori

Resistore lineare tempo-invariante

L'elemento circuitale che si incontra più di frequente è il resistore a 2 terminali: *si definisce **resistore (a 2 terminali)** un bipolo il cui comportamento è completamente definito da una caratteristica nel piano (I,V).*

In particolare, un resistore che soddisfa la **legge di Ohm**, ossia quella legge secondo la quale *la tensione ai capi dell'elemento è proporzionale al flusso di corrente che lo attraversa,* prende il nome di **resistore lineare tempo-invariante** ed il suo simbolo circuitale è il seguente:



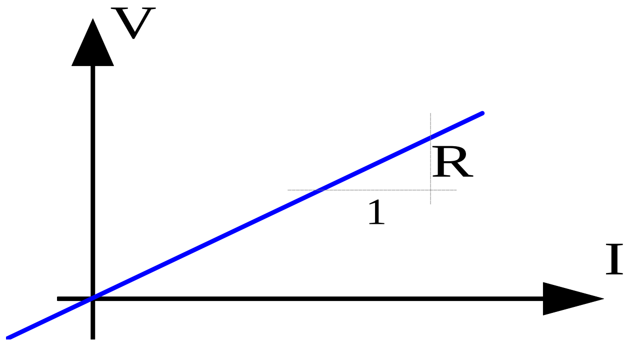
(dove abbiamo come al solito indicato la convenzione dell'utilizzatore).

In termini quantitativi, la legge di Ohm si scrive nella forma

$$\boxed{v(t) = Ri(t)}$$

La costante R prende il nome di **resistenza** del resistore: se la tensione si misura in *Volt* e la corrente in *Ampere*, la resistenza si misura in **ohm**. <u>Il valore di R è sufficiente per specificare completamente un resistore lineare tempoinvariante a 2 terminali</u>.

Rappresentando la legge di Ohm su un piano cartesiano (I,V) otteniamo quella che è la **caratteristica di un resistore lineare**:



Si tratta evidentemente di una retta passante per l’origine. Una cosa importante si può allora osservare: *un qualsiasi elemento a 2 terminali, la cui caratteristica nel piano (I,V) sia un retta, è certamente un resistore; se, poi, tale retta passa per l’origine, allora il resistore è anche lineare.*

E’ evidente dal grafico che il valore di R corrisponde esattamente alla pendenza della retta. Questo è importante per il seguente motivo: se, dato un resistore lineare, ce ne viene fornita solo la curva caratteristica, noi possiamo da essa ricavarci il valore di R. Basta operare in questo modo:

- in primo luogo si traccia una retta orizzontale che intersechi la caratteristica in un punto qualsiasi P;
- a partire da P si prende un tratto di lunghezza unitaria (rispetto all’asse orizzontale); sia Q l’altro estremo di questo segmento;
- da Q si manda una retta verticale che interseca ancora una volta la caratteristica nel punto S;
- il valore di R sarà allora pari alla lunghezza del tratto QS.

In modo ancora più immediato, se α è l’angolo che la caratteristica forma con l’asse delle ordinate, sarà

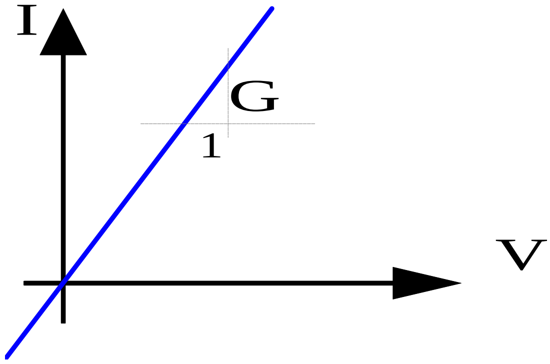
$$R = \mathrm{ctg}(\alpha)$$

La legge di Ohm si può anche scrivere nella forma

$$\boxed{i(t) = Gv(t)}$$

dove G=1/R è la cosiddetta **conduttanza** del resistore lineare. La sua unità di misura è il **siemens**, che equivale a ohm^{-1}, ossia a Ampere/Volt.

Rappresentando allora la legge di Ohm su un piano (V,I) abbiamo



Naturalmente, per la conduttanza valgono le stesse considerazioni fatte per la resistenza R: essa può essere ricavata dal grafico o con il metodo del tratto orizzontale unitario oppure mediante la formula

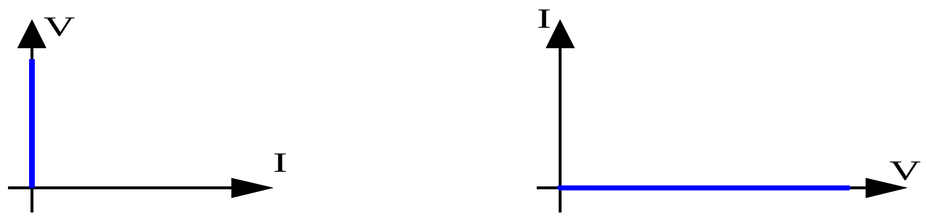
$$G = tg(\alpha)$$

dove, però, α è questa volta l'angolo che la curva forma con l'asse delle ascisse.

Circuito aperto

Consideriamo la legge di Ohm nella forma $v(t) = Ri(t)$, dove R=tg(α) e α è l'angolo che la caratteristica del resistore forma con l'asse delle ordinate (**asse delle tensioni**). E' evidente che l'angolo α può assumere un qualsiasi valore compreso nell'intervallo [0,π]. I due valori limite, ossia α=0 e α=π, costituiscono due casi particolari ed interessanti di resistori lineari.

Cominciamo dal caso in cui $\alpha = 0$. Quando l'angolo α è nullo, significa che R=∞ oppure, in modo equivalente, che G=0 e la caratteristica del resistore coincide con quella delle ordinate nel piano (I,V) e con l'asse delle ascisse nel piano (V,I):



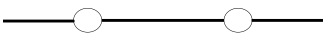
La proprietà di questo resistore lineare è dunque quella per cui *la corrente che lo attraversa è identicamente nulla a prescindere dal valore della tensione.* Per questo motivo gli si dà il nome di **circuito aperto**.

A livello circuitale, un circuito aperto si rappresenta con il simbolo seguente:

Cortocircuito

L'altro caso particolare è quello per cui $\alpha = \pi$. In questo caso, si ha che R=0 oppure, in modo equivalente, che G=∞. Le caratteristiche nei piani (V,I) e (I,V) diventano allora le seguenti:

La proprietà di questo nuovo resistore lineare è che *la tensione è nulla a prescindere dal valore della corrente che circola.* Si parla in questo caso di **corto circuito** e lo si indica con il simbolo seguente:



Se confrontiamo le due caratteristiche del cortocircuito con quelle corrispondenti del circuito aperto, notiamo che la curva del primo in un piano corrisponde a quella del secondo nell'altro piano e viceversa: per questa ragione, il circuito aperto viene definito come il **DUALE** del cortocircuito e viceversa. Il concetto di **dualità** di un circuito rispetto ad un altro è molto importante e sarà perciò approfondito più avanti.

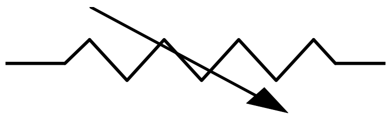
RESISTORI LINEARI TEMPO-VARIANTI

La differenza tra un resistore lineare tempo-invariante e uno lineare tempo-variante sta nel fatto che la caratteristica varia nel tempo, per cui ad ogni istante corrisponderà una diversa retta nel piano (I,V) o (V,I). Si ottiene cioè un *fascio di rette*.

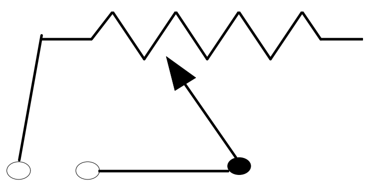
In questo caso, la relazione funzionale tra tensione v(t) e corrente i(t) è

$$\boxed{v(t) = R(t)i(t)}$$

Dal punto di vista della rappresentazione circuitale, il simbolo di un resistore lineare tempo-variante è il seguente:

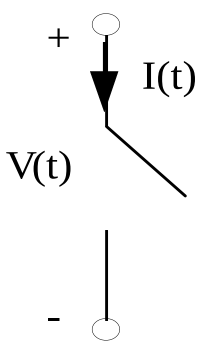


Da un punto di vista strettamente pratico, il dispositivo elettrico corrispondente ad un resistore lineare tempo-variante è il cosiddetto **reostato variabile**: c'è in pratica una resistenza sulla quale scorre un *contatto mobile*; i due morsetti del dispositivo sono uno della resistenza e l'altro quello del contatto mobile; il movimento del contatto mobile consente le variazioni della resistenza.



Esempio: l'interruttore

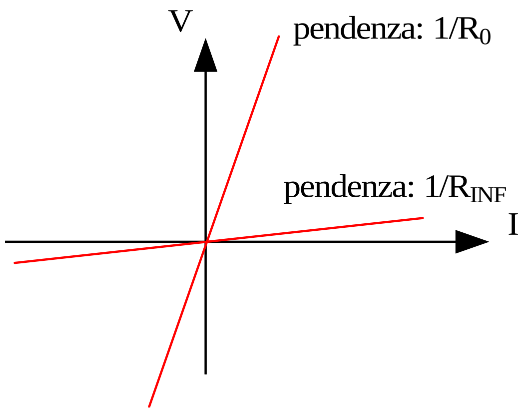
Un esempio interessante di resistore lineare tempo-variante è quello di un **interruttore** che si apre e chiude periodicamente con periodo T. Il simbolo circuitale di un interruttore è il seguente:



La caratteristica nel piano (I,V) di questo elemento è fatta nel modo seguente:

- quando l'<u>interruttore è chiuso</u>, la tensione è nulla e la caratteristica coincide con l'asse I (abbiamo cioè un *cortocircuito*);
- quando l'<u>interruttore è aperto</u>, la corrente è nulla e la caratteristica coincide con l'asse V (abbiamo cioè un *circuito aperto*).

Naturalmente, questo è un **interruttore ideale**, in quanto, nella realtà, esso ha un comportamento leggermente diverso: infatti, invece di essere un circuito aperto o un cortocircuito, esso presenta una resistenza molto bassa ma non nulla quando è chiuso ed una resistenza molto alta ma non certo infinita quando è aperto. Perciò, la caratteristica nel piano (I,V) di un interruttore reale è quella rappresentata nella figura seguente:



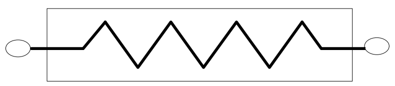
RESISTORI NON LINEARI

Un **resistore non lineare** è un elemento circuitale in cui il legame funzionale tra la tensione e la corrente è sempre del tipo

$$f(v,i) = 0$$

ma assume delle forme particolari che vedremo esaminando alcuni esempi. La cosa importante è che *il legame tra tensione e corrente, per un resistore non lineare, non soddisfa le proprietà di additività e omogeneità.*

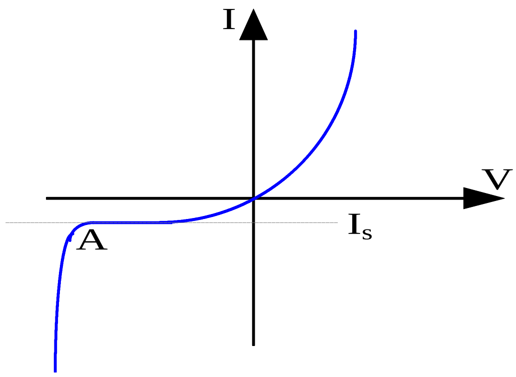
Il simbolo circuitale di resistore non lineare è il seguente:



Tutti i resistori che non sono lineari, si dicono <u>*non-lineari*</u>.

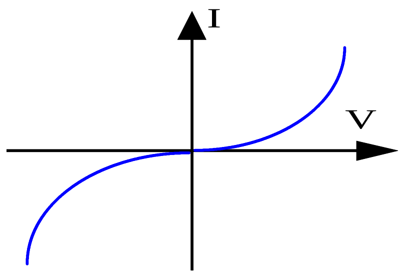
Il diodo a giunzione pn

Il cosiddetto **diodo a giunzione pn** è un elemento circuitale la cui caratteristica, ovviamente nel piano (V,I) visto che siamo sempre nell'ambito dei resistori, è del tipo rappresentato in figura:



La prima cosa che si osserva è che questa caratteristica non è simmetrica rispetto all’origine: questo implica che sia importante la **polarizzazione** del diodo, ossia è importante sapere con certezza quale sia il morsetto mantenuto a potenziale maggiore. Si parla per questo motivo di **resistore unilaterale**, a differenza di quelli visti in precedenza, che invece erano tutti **resistori bilaterali** in quanto le loro caratteristiche, essendo sempre delle rette, erano simmetriche rispetto all’origine.

N.B. Una normale **lampadina** è un esempio di resistore non lineare bilaterale: la sua caratteristica è simmetrica rispetto all’origine ed è del tipo



Per la maggior parte delle applicazioni, il punto di funzionamento del diodo a giunzione p-n si trova a destra del punto A, cioè a destra del “ginocchio” della curva. Nel normale intervallo di funzionamento, cioè a destra di A, la corrente obbedisce alla legge

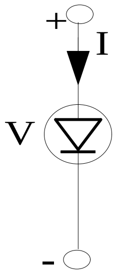
$$\boxed{I = I_s\left(e^{\frac{qV}{kT}} - 1\right)}$$

che prende il nome di **legge del diodo (ideale) a giunzione**. In tale legge, q è la carica dell’elettrone, k la costante di Boltzmann, T è la temperatura assoluta (misurata cioè in gradi Kelvin) e I_S è una costante (il cui valore è dell’ordine del mA) che rappresenta la cosiddetta **corrente di saturazione inversa**: si tratta della corrente che circola nel diodo quando esso è *polarizzato inversamente*, cioè quando la tensione ha cambiato segno. Dato il piccolissimo valore di I_S, è evidente che, quando viene invertita la polarità della tensione ai capi del diodo, esso lascia passare una corrente molto bassa.

Analizzando la caratteristica del diodo, si nota quanto segue: al crescere dei valori della tensione inversa (cioè muovendoci verso sinistra e verso A), la corrente assume un valore praticamente costante con la tensione; quando, invece, si arriva e si supera il punto A, la corrente aumenta molto rapidamente a tensione costante. Questo avviene a causa del fenomeno della cosiddetta "*rottura*" della giunzione, il quale rende la giunzione non più utilizzabile.

Una cosa importante è la seguente: quella legge dice che *la corrente I è univocamente definita per ogni valore della tensione V,* ossia, in altre parole, ad ogni valore di tensione applicata corrisponde uno ed un solo valore di corrente attraverso l'elemento. Allora, un qualsiasi resistore non lineare che gode di questa proprietà si dice che è un **resistore non lineare controllato in corrente**.

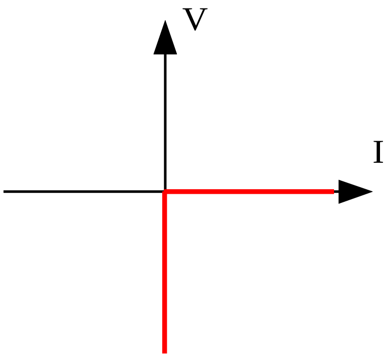
Per concludere, il simbolo circuitale di un diodo a giunzione pn è il seguente:



Con i segni messi in figura, il diodo è polarizzato direttamente, il che significa che, nel grafico, siamo nell'ambito delle tensione positive; se invertissimo, invece, il + ed il -, diremmo che è polarizzato inversamente, ossia ci troveremmo nell'ambito delle tensioni negative.

Il diodo ideale

Per definizione, *il cosiddetto "**diodo ideale**" è un resistore non lineare la cui caratteristica nel piano (I,V) è composta da due segmenti di linea retta, che sono l'asse V negativo e l'asse I positivo:*



Si tratta cioè di un elemento circuitale la cui caratteristica tensione-corrente è ottenuta *idealizzando* quella del diodo a giunzione p-n esaminato prima.

Analiticamente, il funzionamento del diodo ideale può essere espresso nel modo seguente:

$$\begin{cases} I = 0 & \text{per } V < 0 \\ V = 0 & \text{per } I > 0 \end{cases}$$

Quindi, se il diodo è polarizzato inversamente (ossia se V<0), esso non lascia passare corrente, cioè si comporta come un circuito aperto; invece, se il diodo è in conduzione (ossia se I>0), la tensione ai suoi capi è nulla, per cui si comporta come un cortocircuito.

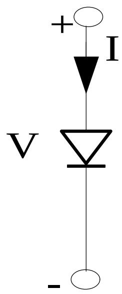
Ciò che si nota è che, in ogni caso, si ha

$$v(t)i(t) = 0$$

il che significa, in termini concreti, che *la potenza fornita da un diodo ideale è identicamente nulla in ogni istante.*

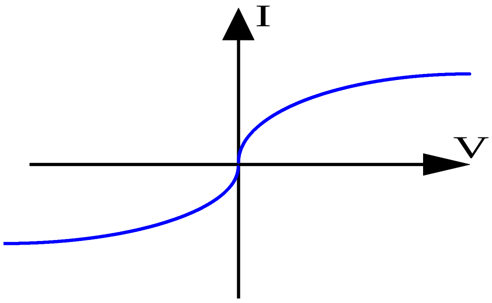
Per questo motivo, il diodo ideale rientra nella categoria degli elementi circuitali detti **non energetici**.

Il simbolo circuitale di questo elemento è il seguente:



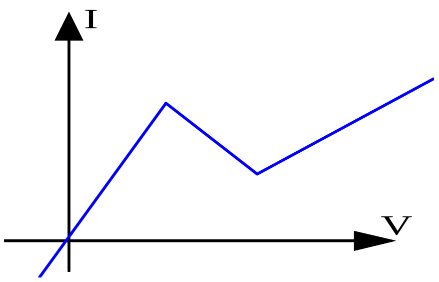
Il varistore

Il **varistore** è un altro esempio di resistore non-lineare. In questo caso, però, si tratta di un <u>*resistore bilaterale*</u>, in quanto presenta una caratteristica simmetrica rispetto all'origine:



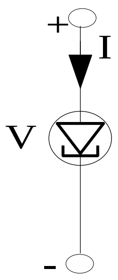
Il diodo tunnel

Il **diodo tunnel** è un altro esempio di <u>resistore non-lineare unilaterale</u>; la sua curva caratteristica (linearizzata a tratti) è del tipo seguente:



Si tratta evidentemente di un resistore controllato in tensione, in quanto, per ogni valore di tensione, abbiamo 1 solo valore di corrente, mentre non è evidentemente controllato in corrente, visto che ci sono dei valori di corrente per i quali è possibile avere 3 diversi valori di tensione.

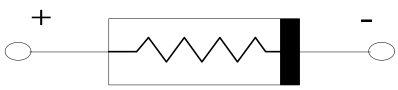
Il simbolo circuitale del diodo tunnel è il seguente:



Osservazioni sui resistori non lineari

I resistori non lineari appena elencati hanno tutti una caratteristica nel piano (I,V) o (V,I) non simmetrica rispetto all'origine. Questo comporta che, invertendo le polarità della tensione e della corrente, la loro caratteristica cambi: come detto, tali resistori prendono perciò il nome di resistori **non bilaterali**, a differenza degli altri che sono invece **bilaterali**.

Per i resistori non bilaterali è dunque importante indicare, nei simboli circuitali, l'orientamento: di solito, si usa la notazione



dove la *parte annerita* è collegata al morsetto a tensione più bassa: questa notazione indica che la caratteristica del bipolo è quella specificata solo se la tensione e la corrente hanno polarità in accordo a quelle disegnate.

Se, invece, il resistore non lineare è bilaterale (ad esempio una normale lampadina), allora la parte annerita non serve.

RESISTORI CONTROLLATI IN TENSIONE ED IN CORRENTE

Come abbiamo già detto altre volte, è possibile operare una ulteriore classificazione dei resistori, sulla base della relazione funzionale esistente tra le variabili terminali di corrente e tensione:

- se il legame può essere scritto nella forma V=V(I), ossia se la tensione è definita in modo univoco per ciascun valore della corrente, allora diremo che il resistore è **controllato in corrente**;

- se invece il legame è del tipo I=I(V), per cui ad ogni valore della tensione corrisponde un preciso valore della corrente, allora si parla di resistore **controllato in tensione**.

Esistono resistori per i quali è possibile sia il controllo in tensione sia quello in corrente, ma ne esistono anche degli altri in cui è possibile solo uno dei due controlli: un esempio di resistore controllato in corrente è il diodo Shookley, mentre un esempio di resistore controllato in tensione è il diodo a giunzione. Per i resistori nei quali è possibile sia il controllo in tensione sia quello in corrente parleremo di **resistori multi-valved**.

Caratterizzazione di un bipolo da un punto di vista energetico

Consideriamo un qualsiasi bipolo in cui sia adottata la convenzione dell'utilizzatore per quanto riguarda i versi della tensione e della corrente. Per definizione, la **potenza istantanea** in un bipolo è data dalla relazione

$$p(t) = v[I(t)]i(t)$$

ossia dal prodotto del valore istantaneo della tensione per quello istantaneo della corrente. Questa potenza risulta essere "entrante" nel bipolo (ossia viene fornita al bipolo dall'esterno) se risulta positiva, mentre invece, se risulta negativa, è uscente dal bipolo (ossia viene fornita dal bipolo all'esterno).

La potenza istantanea è un primo parametro utile alla caratterizzazione di un bipolo dal punto di vista energetico. Tuttavia, *dato che la potenza è un indice di dissipazione, si preferisce spesso far riferimento all'energia.* In primo luogo, considerato un intervallo di tempo infinitesimo di ampiezza dt, l'energia associata al bipolo in tale intervallo è quantificabile come

$$dw = p(t)dt$$

Ovviamente, così come per la potenza istantanea, anche l'energia, se è positiva, è entrante nel bipolo. Si definisce quindi **energia entrante** in un bipolo, nel generico intervallo di tempo (α,β), la quantità

$$W(\alpha,\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} v(i(t))i(t)dt$$

Per ogni punto di lavoro, ossia per ogni coppia tensione-corrente, l'area sottesa dalla curva v(t)i(t) ci dà la potenza istantanea.

Nella definizione di energia entrante nel bipolo risulta evidente come essa dipenda dall'intervallo di tempo cui si fa riferimento; viceversa, *quando si vogliono confrontare due bipoli da un punto di vista energetico, è necessario far riferimento ad un indice di trasferimento che sia indipendente dall'intervallo scelto.* Questo indice è la cosiddetta **potenza media**, definita come

$$P_M = \lim_{\beta\to\infty} \frac{W(0,\beta)}{\beta} = \lim_{\beta\to\infty}\left(\int_0^{\beta} \frac{1}{\beta} v(i(t))i(t)dt\right)$$

Ancora una volta, possiamo distinguere due casi:

- quando la potenza media è positiva, significa che viene trasferita al bipolo che la trasforma in qualche altra forma di energia: si tratta cioè di *potenza entrante*, che non verrà più restituita;

- se, invece, la potenza media è negativa, allora è il bipolo a fornire energia all'esterno.

Ad ogni modo, a prescindere dal fatto che essa venga fornita al bipolo o dal bipolo, *la potenza media può essere considerata come un trasferimento definitivo di energia*.

POTENZA ED ENERGIA NEI RESISTORI

Fatta questa premessa, vogliamo adesso esaminare i resistori lineari e non lineari dal punto di vista energetico.

Resistori lineari

Per quanto riguarda i resistori lineari, i calcoli sono immediati: infatti, usando la definizione $p(t)=v[i(t)]i(t)$ e tenendo conto che la relazione caratteristica dei resistori lineari è $v(i(t))=Ri(t)$, è chiaro che la potenza istantanea risulta

$$p(t)=Ri^2(t)$$

oppure anche $p(t)=Gv^2(t)$, tenendo conto che $i(t)=Gv(t)$.

L'energia complessiva, riferita sempre al generico intervallo (α,β), è allora

$$W(\alpha,\beta)=\int_\alpha^\beta p(t)dt=\int_\alpha^\beta Ri^2(t)dt=R\int_\alpha^\beta i^2(t)dt$$

La potenza media, infine, è

$$P_M=\lim_{\beta\to\infty}\frac{W(0,\beta)}{\beta}=\lim_{\beta\to\infty}\frac{R\int_\alpha^\beta i^2(t)dt}{\beta}$$

Resistori non lineari

Per quanto riguarda invece i resistori non lineari, abbiamo visto che possono essere classificati in vario modo:

- controllati in tensione;
- controllati in corrente;
- controllati in tensione e corrente.

Ci accingiamo allora a valutare, per tutti questi resistori, la potenza istantanea, l'energia e la potenza media.

Cominciamo da un *resistore controllato sia in tensione sia in corrente*, per il quale cioè il legame tensione-corrente si possa esprimere in modo equivalente nelle forme

$$v(t)=v[i(t)] \quad \text{oppure} \quad i(t)=i[v(t)]$$

La potenza istantanea è evidentemente

$$p(t)=\begin{cases} v(t)i(v(t)) \\ i(t)v(i(t)) \end{cases}$$

e le due espressioni sono ovviamente perfettamente equivalenti.

L’energia complessiva sarà allora

$$W(\alpha,\beta)=\int_\alpha^\beta p(t)dt=\begin{cases}\int_\alpha^\beta v(t)i(v(t))dt\\ \int_\alpha^\beta i(t)v(i(t))dt\end{cases}$$

Infine, la potenza media è

$$P_M=\lim_{\beta\to\infty}\frac{W(0,\beta)}{\beta}=\begin{cases}\lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{1}{\beta}\int_0^\beta v(t)i(v(t))dt\right)\\ \lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{1}{\beta}\int_0^\beta i(t)v(i(t))dt\right)\end{cases}$$

Naturalmente, per i resistori controllati solo in tensione o solo in corrente varranno solo le rispettive espressioni.

Resistori attivi e passivi

In generale, un resistore (lineare o non lineare) si dirà **passivo** se

$$p(t)\ge 0 \qquad \forall t$$

ossia se la potenza istantanea ad esso associata è comunque positiva, ossia comunque entrante. In caso contrario, si dirà **attivo**, il che significa che il resistore fornisce energia al circuito esterno.

Ad esempio, per i resistori lineari tempo-invarianti abbiamo visto che

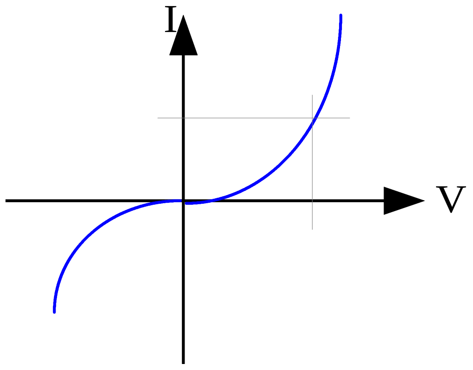
$$p(t)=Ri^2(t)=Gv^2(t)$$

Allora, essendo R>0, è evidente che P(t)>0: possiamo cioè osservare che *i resistori lineari sono resistori passivi.*

Per vedere se un resistore è attivo o passivo, senza andarsi a calcolare la potenza istantanea, basta esaminare la sua caratteristica:

- se corrente e tensione sono o entrambe positive o entrambe negative, cioè se la caratteristica si trova nel 1° o nel 3° quadrante, allora il resistore è passivo;
- in caso contrario, il resistore è attivo.

Per esempio, è passivo un resistore la cui caratteristica è del tipo seguente:



Un esempio di resistore attivo è invece ciò che definiremo come **generatore di tensione**.

I Condensatori

INTRODUZIONE

Cominciamo anche in questo caso con la semplice definizione: *si definisce **condensatore** un elemento a 2 terminali il cui comportamento è completamente definito da una caratteristica nel piano (V,q).*

L'elemento circuitale con cui noi rappresentiamo un condensatore è il seguente:

Così come accade per i resistori, abbiamo 4 classi di condensatori:

1. lineari tempo-invarianti
2. lineari tempo-varianti
3. non lineari tempo-invarianti
4. non lineari tempo-varianti

CONDENSATORI LINEARI TEMPO-INVARIANTI

In un **condensatore lineare tempo-invariante**, la relazione funzionale tra la carica q e la tensione v è la seguente:

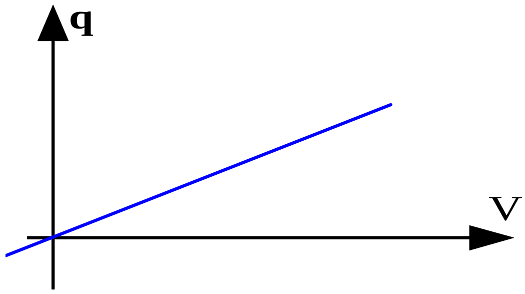
$$\boxed{q(t) = Cv(t)}$$

La costante C prende il nome di **capacità** del condensatore: se misuriamo la carica in *coulomb* e la tensione in *volt*, l'unità di misura della capacità è

$$\text{Farad} = \frac{\text{coulomb}}{\text{volt}}$$

E' bene osservare che una capacità di 1 solo Farad è comunque una capacità enorme: questo è il motivo per cui si preferisce usare alcuni suoi sottomultipli, che sono $\mu F=10^{-6}F$, $\eta F=10^{-9}F$ o $pF=10^{-12}F$.

Se rappresentiamo la relazione q(t)=Cv(t) sul piano cartesiano (V,q) otteniamo evidentemente una retta per l'origine:



Se indichiamo con θ l'angolo che tale retta forma con l'asse delle ascisse, è evidente che

$$C = tg(\theta)$$

La relazione q=CV può anche essere scritta nella forma

$$\boxed{v(t) = \frac{1}{C} q(t) = Sq(t)}$$

Alla costante S si dà il nome di **elastanza** e si misura evidentemente in $farad^{-1}$: si tratta del reciproco della capacità.

Anche se la relazione funzionale coinvolge, nei condensatori, la tensione e la carica, possiamo comunque trovare il legame tra la tensione V e la corrente I che circola in questo elemento: infatti

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(Cv(t)) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

Il legame tra corrente e tensione (dette "*variabili circuitali*") in un condensatore è dunque

$$\boxed{i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}}$$

E' interessante ricercare anche il legame inverso: si ha infatti che

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(T)dT = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(T)dT + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(T)dT$$

Se poniamo il primo integrale pari a V_0, concludiamo che

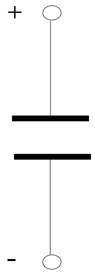
$$\boxed{v(t) = V_0 + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} v(T)dT}$$

Troviamo cioè che, per un generico istante t, la tensione ai capi del condensatore è pari alla somma di due termini:

- il primo (V_0) tiene conto della corrente che attraversa il condensatore fino all'istante t=0, cioè l'istante di osservazione;
- il secondo termine tiene invece conto della corrente circolata a partire da t=0 per finire all'istante considerato t.

Il fatto che sia importante considerare la "storia" del condensatore prima di t=0 ci porta ad affermare che il condensatore è un **elemento dotato di memoria**.

Il simbolo circuitale del condensatore lineare tempo-invariante è il seguente:



Esempio

Un tipico condensatore lineare tempo-invariante è costituito da due sottili piastre metalliche parallele, di superficie S, collocate nel vuoto a distanza d una dall'altra. Dalla fisica, ci ricordiamo che, applicando una tensione v(t)>0, sull'armatura a potenziale maggiore viene indotta, all'istante t, una carica uguale a q(t)=Cv(t) e una carica uguale, ma di segno opposto, viene indotta, allo stesso istante, sull'armatura a potenziale inferiore. La costante di proporzionalità, cioè la capacità, è data approssimativamente da $C = \varepsilon_0 S/d$, dove ε_0 è la costante dielettrica del vuoto.

Il principio della costanza della tensione

Per i condensatori vale il cosiddetto <u>*principio della costanza della tensione*</u>: *a brusche ma limitate variazioni della corrente, non corrisponderanno variazioni altrettanto brusche della tensione.*

In termini matematici, questo significa che, considerato un istante $t=\alpha$, anche se dovesse essere

$$i(\alpha^-) \neq i(\alpha) \neq i(\alpha^+)$$

comunque si avrebbe

$$v(\alpha^-) \neq v(\alpha) \neq v(\alpha^+)$$

Naturalmente, questo vale per variazioni LIMITATE della corrente che fluisce nell'elemento: in presenza di un *impulso di corrente*, quanto detto adesso non vale più.

CONDENSATORI LINEARI TEMPO-VARIANTI

In un **condensatore lineare tempo-variante**, la relazione funzionale tra carica e tensione è la stessa del caso precedente, con la differenza che varia nel tempo anche la capacità: quindi

$$\boxed{q(t)=C(t)v(t)}$$

Un esempio facile potrebbe essere un condensatore in cui cambiano le superfici affacciate delle due armature oppure la distanza tra di esse, in modo comunque da far cambiare anche la capacità.

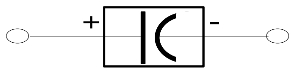
Per questi condensatori, la relazione tra corrente e tensione è la seguente:

$$\boxed{i(t) = C(t)\frac{dv(t)}{dt} + \frac{dC(t)}{dt}v(t)}$$

e questa relazione differisce da quella trovata per i condensatori tempo-invarianti non solo per la sostituzione di C con C(t), ma anche per il termine aggiuntivo che compare a secondo membro.

CONDENSATORI NON LINEARI

Un generico **condensatore non lineare** presenta una curva caratteristica che non è più una retta nel piano q-V o V-q, ma una curva generica. L'elemento circuitale con cui rappresentiamo questo tipo di condensatore è il seguente:



Tutti o quasi questi condensatori sono unilaterali (o non bilaterali): è quindi necessario conoscere la polarizzazione ad essi applicata. Al contrario, *tutti i condensatori lineari sono bilaterali.*

Quando abbiamo parlato dei resistori non lineari, abbiamo parlato di *controllo in tensione* (quando per ogni valore della tensione c'è un unico valore di corrente) e *controllo in corrente* (un valore di tensione in corrispondenza di ogni valore di corrente). Lo stesso accade per i condensatori, anche se qui abbiamo il *controllo in tensione*, ossia q=q(v), ed il *controllo in carica*, ossia v=v(q).

Prendiamo allora un generico condensatore non lineare controllato in tensione: questo significa che carica e tensione sono legate da una relazione del tipo $q = q(v)$. Calcoliamoci la corrente che attraversa l'elemento: per definizione si ha che $i = \frac{dq(v)}{dt}$; i base ad un noto teorema di analisi, abbiamo che

$$i(t) = \frac{dq(v)}{dt} = \frac{dq}{dv}\frac{dv(t)}{dt}$$

Possiamo d'altra parte scrivere che

$$q(v) = C(v)v \longrightarrow \frac{dq}{dv} = C(v)$$

e quindi possiamo concludere che

$$\boxed{i = C(v)\frac{dv}{dt}}$$

A C(v) si dà il nome di **capacità incrementale** e corrisponde sempre alla pendenza della caratteristica nel piano q-V per quel prefissato valore di tensione v.

POTENZA ED ENERGIA NEI CONDENSATORI

Consideriamo un generico condensatore controllato in carica, per il quale, cioè, carica e tensione sono legate da una legge del tipo $v = v(q)$. La potenza istantanea che fluisce attraverso il condensatore in un qualsiasi istante t è per definizione data da

$$p(t) = v(q) * i(t)$$

e si tratterà di una potenza entrante o uscente a seconda che essa risulti positiva o negativa.

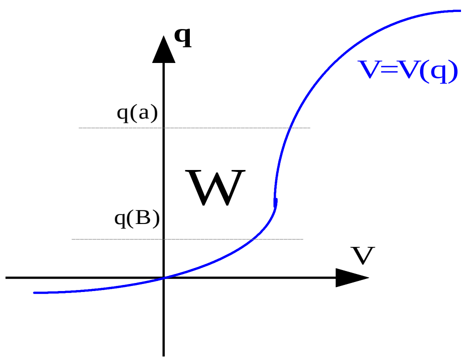
Se vogliamo calcolare l'energia totale che fluisce in un intervallo di tempo (α,β), abbiamo che essa è data da

$$W(\alpha,\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} v(q) i(t) dt$$

Sapendo poi che $i = \frac{dq(v)}{dt}$, abbiamo anche che

$$W(\alpha,\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} v(q) \frac{dq}{dt} dt = \int_{q(\alpha)}^{q(\beta)} v(q) dq$$

Questa formula ci dice in pratica quanto segue: considerata la curva rappresentativa della relazione $v = v(q)$, l'energia che fluisce nell'intervallo (α,β) è pari all'area racchiusa da questa curva, dall'asse delle ordinate (cioè l'asse q) e dai valori di q(α) e q (β); ad esempio, consideriamo la seguente curva carica-tensione:



Esempio: condensatore lineare tempo-invariante

Consideriamo ad esempio un condensatore lineare tempo-invariante, per il quale cioè vale la relazione $v(t) = \frac{1}{C} q(t)$. L'energia entrante nel generico intervallo (α,β) sarà la seguente:

$$W(\alpha,\beta) = \int_{q(\alpha)}^{q(\beta)} v(q) dq = \int_{q(\alpha)}^{q(\beta)} \frac{1}{C} q dq = \frac{1}{2C}\left(q^2(\alpha) - q^2(\beta)\right) = \frac{1}{2} C\left(v^2(\alpha) - v^2(\beta)\right)$$

Questa relazione mostra una cosa importante che differenzia il condensatore dal resistore: mentre, nella formula trovata per il resistore, l’energia veniva a dipendere dalla forma d’onda della tensione (o, ciò che è lo stesso, della corrente) ai capi del resistore, abbiamo trovato che l’energia entrante in un condensatore, durante l’intervallo (α,β) non dipende dalla forma d’onda della tensione o della carica, ma è univocamente determinata dalla carica o dalla tensione del condensatore nei punti estremi dell’intervallo.

Inoltre, se, in quella formula, noi poniamo $v(\beta)=0$ e $\alpha=t$, abbiamo che

$$\boxed{W=\frac{1}{2}Cv^2}$$

Potenza media

Se volessimo la potenza media, sarebbe

$$P_M=\lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{1}{\beta}\int_0^{q(\beta)}v(q)dq\right)=\lim_{\beta\to\infty}\frac{W(0,\beta)}{\beta}$$

In base a questa formula, sembrerebbe P_M=¥, ossia sembrerebbe che il condensatore sia in grado di accumulare energia all’infinito. E’ ovvio che questo non è fisicamente possibile: difatti, considerando che $W(0,\beta)$ deve essere una quantità limitata, si trova che quel limite è nullo, ossia che

$$P_M=0$$

Questo significa che l’energia accumulata dal condensatore non viene dissipata, ma viene ceduta a “qualcosa”: per questo motivo, si dice che i condensatori sono elementi **conservativi** (oltre che dotati di memoria). Il contrario accade invece per i resistori, che invece dissipano la potenza assorbita.

Gli induttori

INTRODUZIONE

Un **induttore** è un elemento a due terminali la cui curva caratteristica si trova nel piano I-φ. Così come abbiamo visto per resistori e condensatori, anche qui abbiamo 4 diverse classi di induttori:

1. lineari tempo-invarianti
2. lineari tempo-varianti
3. non lineari tempo-invarianti
4. non lineari tempo-varianti.

INDUTTORI LINEARI TEMPO-INVARIANTI

In un **induttore lineare tempo-invariante**, la relazione funzionale tra il flusso φ(t) e la corrente i(t) è del tipo seguente:

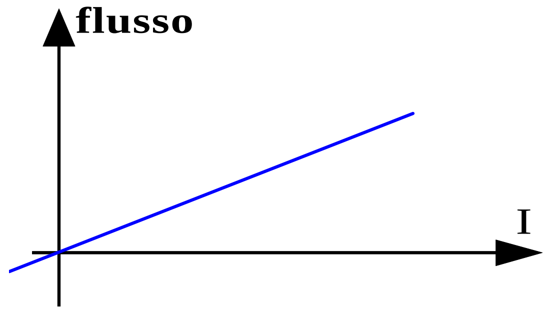
$$\boxed{\varphi(t)=Li(t)}$$

Alla costante di proporzionalità L si dà il nome di **induttanza**: misurando il flusso in *Weber* e la corrente in *ampere*, l'unità di misura dell'induttanza è

$$\text{Henry}=\frac{\text{Weber}}{\text{ampere}}$$

Anche in questo caso, come per la misura della capacità di un condensatore, si usano spesso i sottomultipli dell'Henry.

Rappresentano il legame funzionale prima enunciato in un piano cartesiano (φ,I), si ottiene la generica curva caratteristica di un induttore lineare:



Naturalmente, se θ è l'angolo che questa caratteristica forma con l'asse delle ascisse, allora

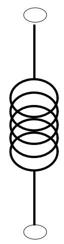
$$L=\operatorname{tg}(\theta)$$

Il legame φ=LI può anche essere invertito per scrivere

$$\boxed{i(t)=\frac{1}{L}\varphi(t)=\Gamma\varphi(t)}$$

Alla costante Γ si dà il nome di **induttanza reciproca** o meglio **inertanza** e si misura evidentemente in *Henry*$^{-1}$.

L'elemento circuitale con cui noi rappresentiamo un induttore lineare è il seguente:



Vediamo adesso di ricavare quale sia il legame tra le variabili circuitali v(t) ed i(t): si ha che

$$\boxed{v(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = L\frac{di(t)}{dt}}$$

e questa relazione prende il nome di **legge di Faraday**. Invertendola si ha che

$$\boxed{i(t) = \int_{-\infty}^{t} v(T)dT = I_0 + \int_{0}^{t} v(T)dT}$$

Da qui si deduce che *anche un induttore lineare tempo-invariante, così come un condensatore lineare tempo-invariante, è un elemento dotato di memoria.*

Esempio

Un tipico induttore lineare tempo-invariante è costituito da un filo conduttore avvolto intorno ad un toroide di materiale non metallico, come ad esempio il legno. Dalla fisica, ci ricordiamo che, facendo circolare una corrente $i(t)>0$, viene indotto, all'istante t, un flusso pari a $\varphi(t)=Li(t)$ circolante all'interno del toroide. La costante di proporzionalità, cioè l'induttanza, è data approssimativamente da $L = \mu_0 N^2 S/l$, dove ε_0 è la costante dielettrica del vuoto, N il numero di spire, S la sezione trasversale del toroide e l la semicirconferenza.

INDUTTORI LINEARI TEMPO-VARIANTI

La relazione funzionale flusso-corrente per un **induttore lineare tempo-invariante** è la stessa del caso precedente, con la differenza per cui adesso anche l'induttanza varia nel tempo: quindi si ha qualcosa del tipo

$$\boxed{\varphi(t) = L(t)i(t)}$$

Per questi induttori, il legame tensione-corrente è

$$\boxed{v(t) = L(t)\frac{di(t)}{dt} + \frac{dL(t)}{dt}i(t)}$$

e questa relazione differisce da quella trovata per gli induttori tempo-invarianti non solo per la sostituzione di L con L(t), ma anche per il termine aggiuntivo che compare a secondo membro.

Anche tra gli elementi di questo tipo, possiamo distinguere quelli unilaterali e quelli bilaterali.

CONTROLLO IN FLUSSO E CONTROLLO IN CORRENTE

Anche per gli induttori, possiamo parlare in "*controllo in ...*": quando ad ogni valore della corrente corrisponde un solo valore del flusso, noi parliamo di **induttore controllato in corrente** e si ha $\varphi=\varphi(i)$, mentre, invece, quando ad ogni valore di flusso corrisponde un solo valore della corrente, noi parliamo di **induttore controllato in flusso**, per il quale si ha $i=i(\varphi)$.

Consideriamo in particolare un induttore controllato in flusso, per il quale cioè si ha $\varphi=\varphi(i)$. Troviamo il legame tra corrente e tensione:

$$v(t)=\frac{d\varphi(t)}{dt}=\frac{d\varphi(i)}{di}\frac{di(t)}{dt}=L(i)\frac{di}{dt}$$

Ad $L(i)$ si dà il nome di **induttanza incrementale** e rappresenta la pendenza della caratteristica in corrispondenza del valore I di corrente.

POTENZA ED ENERGIA NEGLI INDUTTORI

Consideriamo un generico induttore controllato in flusso, per il quale, cioè, corrente e flusso sono legati da una legge del tipo $i=i(\varphi)$. La potenza istantanea è per definizione data da

$$p(t)=v(t)i(\varphi)$$

e si tratterà ancora una volta di potenza entrante o uscente a seconda che risulti positiva o negativa.

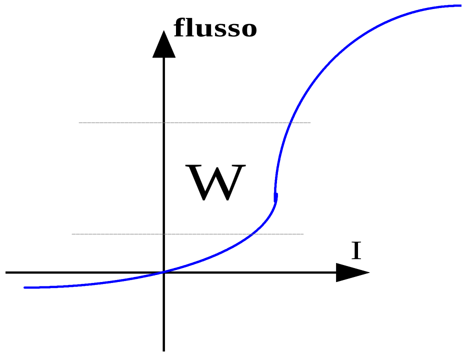
Se vogliamo calcolare l'energia totale relativamente ad un intervallo di tempo (α,β) abbiamo che essa è data da

$$W(\alpha,\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} v(t)i(\varphi)dt$$

Sapendo poi che $v(t)=\frac{d\varphi(t)}{dt}$, abbiamo che

$$W(\alpha,\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{d\varphi}{dt}I(\varphi)dt=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}I(\varphi)d\varphi$$

Questa formula ci dice in pratica quanto segue: considerata la curva rappresentativa della relazione $i=i(\varphi)$, l'energia entrante, nell'intervallo (α,β), è pari all'area racchiusa da questa curva, dall'asse delle ordinate (cioè l'asse φ) e dai valori di $\varphi(\alpha)$ e $\varphi(\beta)$: ad esempio



Consideriamo ad esempio un induttore lineare tempo-invariante, per il quale cioè $i(t)=\frac{1}{L}\varphi(t)$. L'energia entrante nel generico intervallo (α,β) sarà la seguente:

$$W(\alpha,\beta)=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} i(\varphi)d\varphi=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}\frac{1}{L}\varphi d\varphi=\frac{1}{2L}\left(\varphi^2(\alpha)-\varphi^2(\beta)\right)=\frac{1}{2}L\left(i^2(\alpha)-i^2(\beta)\right)$$

Questa relazione mostra una cosa importante che differenzia l'induttore dal resistore e, allo stesso tempo, lo assimila ad un condensatore: mentre, nella formula trovata per il resistore, l'energia veniva a dipendere dalla forma d'onda della tensione o della corrente ai capi del resistore, abbiamo adesso trovato, così come accadeva anche per i condensatori lineari tempo-invarianti, che l'energia entrante in un induttore, durante l'intervallo (α,β), non dipende dalla forma d'onda della tensione o del flusso, ma è univocamente determinata dalla corrente o dal flusso dell'induttore nei punti estremi dell'intervallo.

Inoltre, se, nella formula appena ottenuta, poniamo I(β)=0 e α=t, abbiamo che

$$\boxed{W=\frac{1}{2}Li^2}$$

Se poi volessimo la potenza media, sarebbe

$$P_M=\lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{1}{\beta}\int_0^{\varphi(\beta)} i(\varphi)d\varphi\right)=\lim_{\beta\to\infty}\frac{W(0,\beta)}{\beta}=0$$

Questo significa, così come accade anche per i condensatori, che l'energia entrante nell'induttore non viene dissipata, ma viene accumulata in attesa di cederla, senza alcuna perdita, all'esterno: per questo motivo, si dice che anche gli induttori, come i condensatori, sono elementi **conservativi** (oltre che dotati di memoria).

I Generatori indipendenti

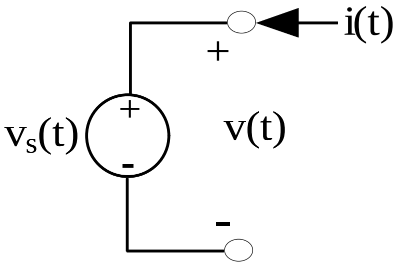
INTRODUZIONE

Nella teoria dei circuiti, i **generatori indipendenti** svolgono lo stesso ruolo delle forze esterne nella meccanica. Si tratta di *elementi circuitali*, ossia modelli ideali, impiegati per creare modelli di dispositivi come la batteria oppure il generatore di segnali. Qui tratteremo due tipi di generatori:

1. generatore indipendente di tensione
2. generatore indipendente di corrente

GENERATORI DI TENSIONE

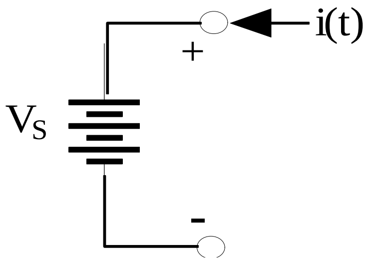
Si definisce **generatore indipendente di tensione** un elemento a due terminali tale che la tensione ai suoi capi sia una forma d'onda $v_S(t)$ indipendente dalla flusso di corrente che attraversa l'elemento stesso. Con il termine "forma d'onda" ci riferiamo ad una funzione (del tempo) che può essere un valore costante, una sinusoide, un'onda quadra e così via. Un generatore (indipendente) di tensione si rappresenta col simbolo circuitale



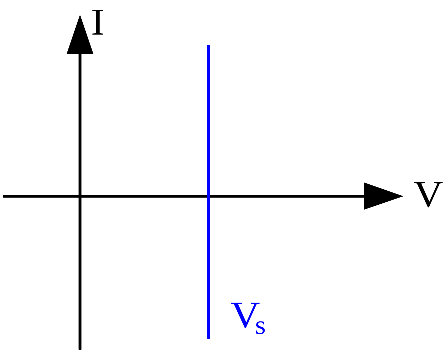
La forma d'onda del generatore, ossia la tensione del generatore, è

$$\boxed{v(t) = v_s(t) \qquad \forall t \text{ e } \forall i(t)}$$

Nel caso particolare in cui $v_S(t)$ sia costante nel tempo, si parla di **generatore di tensione continua** o anche **batteria** e la rappresentazione circuitale utilizzata diventa la seguente:



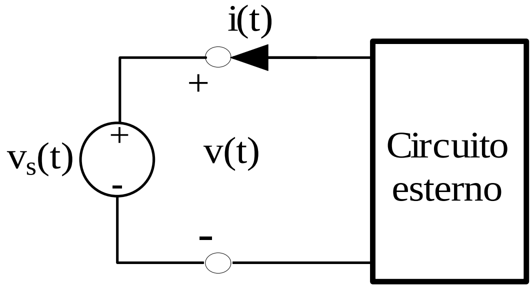
Fssato un arbitrario istante t e il corrispondente valore $v_S(t)$ della tensione applicata dal generatore considerato, è chiaro che la curva caratteristica del generatore stesso è la seguente:



Qesta curva caratteristica mette subito in perfetta evidenza come la tensione non dipenda in alcun modo dalla corrente passante per l'elemento. Inoltre, dato che si tratta di una retta, situata nel piano (V,I) e non passante per l'origine, deduciamo che generatori di questo tipo sono dei resistori non lineari. La non-linearità scompare nel caso in cui V_s=0: se così fosse, la caratteristica verrebbe a coincidere con quella del cortocircuito, ossia si tratterebbe dell'asse delle ordinate. Questa proprietà per cui un generatore indipendente di tensione diventa un cortocircuito (cioè un resistore con resistenza nulla) è di notevole importanza nell'analisi dei circuiti.

Infine, sempre dalla curva caratteristica di prima, si deduce che <u>un generatore indipendente di tensione è un resistore non lineare controllato in corrente</u>.

Nella figura seguente è rappresentato un generatore indipendente di tensione collegato ad un circuito esterno generico:



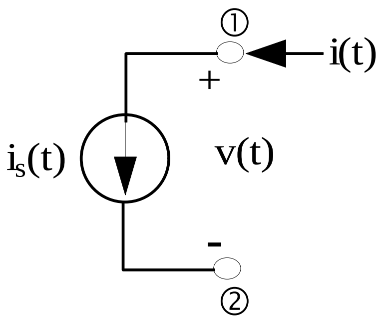
Il significato fisico della definizione di generatore indipendente di tensione data all'inizio sta nel fatto che *la tensione ai capi del generatore viene mantenuta uguale alla prescritta forma d'onda $v_S(t)$, indipendentemente dal circuito esterno.*

<u>La natura del circuito esterno influenza soltanto il flusso di corrente i(t) attraverso il generatore</u>. Questo accade perché si assume che questo dispositivo abbia "<u>*resistenza interna nulla*</u>", a differenza di una "<u>*batteria reale*</u>", che invece presenta una resistenza finita diversa da zero: questo è il motivo per cui una batteria reale si rappresenta, a livello circuitale, mediante un collegamento in serie tra un generatore indipendente di tensione ed un resistore.

GENERATORI DI CORRENTE

Si definisce **generatore indipendente di corrente** un elemento a due terminali tale che la corrente che fluisce attraverso di esso sia una forma d'onda $i_s(t)$ specifica e indipendente dalla tensione applicata ai capi dell'elemento stesso.

Un generatore (ideale indipendente) di corrente si rappresenta col simbolo circuitale



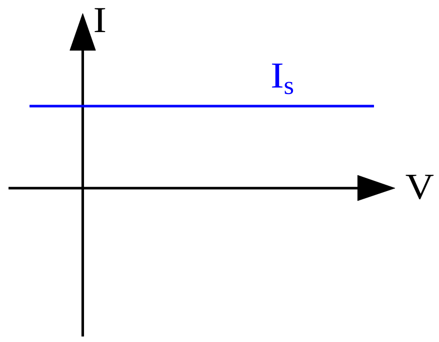
La freccia all'interno del cerchio rappresenta la direzione positiva della corrente: quindi $i_s(t)>0$ significa che la corrente attraversa il generatore dal terminale 1 al terminale 2.

La forma d'onda del generatore, ossia la corrente generata dal generatore nel circuito esterno cui è collegato, è data da

$$\boxed{i(t) = i_s(t) \qquad \forall t \text{ e } \forall v(t)}$$

Anche qui esistono generatori che generano una corrente I_s costante.

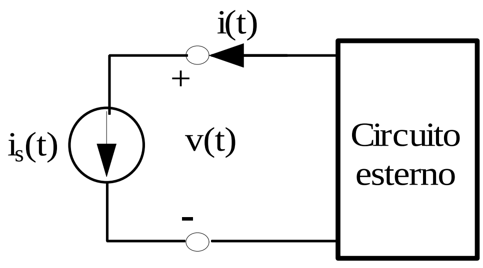
La curva caratteristica di un generatore indipendente di corrente è data da



e quindi questi bipoli possono essere visti perciò come *resistori non lineari controllati in tensione*.

Si nota anche come, per i_S=0, la caratteristica coincide con quella di un circuito aperto.

Nella figura seguente è rappresentato un generatore indipendente di tensione collegato ad un circuito esterno generico:



Il significato fisico della definizione di generatore indipendente di corrente data all'inizio è che *la corrente del generatore mantiene la prescritta forma d'onda $i_S(t)$, mentre la tensione ai suoi capi è determinata dal circuito esterno.*

Questo accade perché si assume che questo dispositivo abbia "*resistenza interna infinita*".

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1