

Appunti di Campi Elettromagnetici

Capitolo 2 parte I

Elettrostatica

IL CAMPO ELETTRICO	2
<i>Il campo elettrico e la legge di Coulomb</i>	2
<i>Vettore spostamento elettrico</i>	4
Richiami sull'induzione elettrica	5
<i>Vettore densità di spostamento elettrico</i>	5
<i>Il vettore polarizzazione</i>	6
Linee di flusso elettrico.....	6
<i>Flusso di un campo vettoriale</i>	7
<i>Il teorema di Gauss per la densità di spostamento elettrico</i>	7
<i>Natura conservativa del campo elettrico</i>	9
<i>Teorema della circuitazione del campo elettrico</i>	10
<i>L'energia potenziale elettrica</i>	11
<i>La funzione potenziale</i>	12
<i>Derivazione del campo elettrico dal potenziale elettrico</i>	12
<i>Equazione di Poisson ed equazione di Laplace</i>	13
<i>La funzione di Green</i>	13
Calcolo della funzione di Green (in coordinate sferiche) per una carica puntiforme	14
Calcolo della funzione di Green (in coordinate cilindriche) per una carica puntiforme	17
<i>Le superfici equipotenziali</i>	19
CONDUTTORI METALLICI IN EQUILIBRIO IN UN CAMPO ELETTRICO.....	19
<i>Campo interno nullo</i>	19
<i>Campo elettrico in superficie al conduttore</i>	20
<i>Distribuzione superficiale di carica</i>	21
CAPACITÀ.....	23
<i>Capacità elettrostatica di un conduttore isolato</i>	23
<i>Cariche e potenziali su un sistema di conduttori</i>	23
<i>Condensatori</i>	25
<i>Energia elettrostatica</i>	26
<i>Densità di energia</i>	27

Il campo elettrico

Il campo elettrico e la legge di Coulomb

Molti concetti di elettrostatica si basano sulla **legge di Coulomb**, che andiamo perciò ad enunciare. Studiando come due corpi diversi B e C, entrambi elettrizzati, interagiscono con uno stesso corpo A, anch'esso elettrizzato, si osserva che le forze sentite da B e C quando vengono avvicinati (in momenti diversi) ad A, dipendono sia dal fattore $1/r^2$ (dove r è la distanza da A) sia anche dallo stato di elettrizzazione dei corpi stessi; al contrario, il rapporto tra le forze sentite dai due corpi risulta indipendente da $1/r^2$, mentre risulta dipendere esclusivamente dallo stato di elettrizzazione. La costanza di tale rapporto si può tradurre, in termini formali, scrivendo che ciascuna delle forze F_B e F_C sentite rispettivamente da B e C è data dal prodotto di un certo termine q , che dipende dallo stato di elettrizzazione del corpo, e da un secondo termine, che invece dipende sia dallo stato di elettrizzazione del corpo A sia dalla distanza r da A stesso: in generale, possiamo cioè scrivere che

$$F_B = q_B E(q, r)$$

$$F_C = q_C E(q, r)$$

In queste espressioni, il termine $E(q, r)$ è quello che dipende dallo stato di elettrizzazione e dalla distanza. Facendo il rapporto membro a membro di quelle due relazioni, otteniamo

$$\boxed{\frac{F_B}{F_C} = \frac{q_B}{q_C}}$$

Il termine $E(q, r)$ prende il nome di **campo elettrico** generato dalla carica q alla distanza r . Una definizione rigorosa di campo elettrico è la seguente: si definisce "**campo elettrico**" la forza che agisce sulla carica unitaria, ossia il rapporto tra la forza F e la carica q che la sente.

In base ad una qualsiasi delle relazioni ricavate prima, se prendiamo una carica campione q_0 , la carica q_1 di un altro corpo avvicinato a tale carica sarà data dalla semplice relazione

$$q_1 = \frac{F_1}{F_0} q_0$$

Adesso supponiamo di avere due cariche q_1 e q_2 poste a una certa distanza r una dall'altra; siano F_1 la forza che q_1 esercita su q_2 e F_2 la forza che q_2 esercita su q_1 ; supponendo che le due cariche siano puntiformi e applicando il noto **principio di azione e reazione**, possiamo scrivere che

$$F_1 = q_1 E(q_2, r) = F_2 = q_2 E(q_1, r)$$

da cui si ricava che

$$\boxed{\frac{E(q_1, r)}{E(q_2, r)} = \frac{q_1}{q_2}}$$

Questa relazione dice che il campo elettrico generato dalla carica q_1 deve essere direttamente proporzionale alla stessa carica q_1 , come anche il campo elettrico generato dalla carica q_2 deve essere direttamente proporzionale alla stessa carica q_2 . Dato però che anche le forze elettriche F_1 ed F_2 erano proporzionali alle due cariche ed erano proporzionali anche all'inverso della distanza tra le due cariche, possiamo riassumere il tutto con una unica relazione:

$$F_1 = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Questa relazione ci fornisce il *modulo* del **vettore forza elettrica F_1** .

Per poter determinare in modo completo la definizione di tale vettore, dobbiamo precisarne direzione e verso. Per quanto riguarda la direzione, abbiamo già detto che è quella della congiungente le due cariche: allora, indicato con $\vec{a}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ il versore del vettore \vec{r} che individua la carica q_2 rispetto alla carica q_1 , la relazione diventa

$$\vec{F}_1 = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}$$

Questa espressione prende il nome di **legge di Coulomb per l'elettrostatica** ⁽¹⁾.

La costante **K** che compare in quella legge ha un valore che dipende dall'unità di misura scelta, cioè dal sistema di misura a cui ci si riferisce, e da questo valore dipende evidentemente l'unità di misura della carica elettrica. Nel *sistema CGS*, **K** ha valore unitario e la carica elettrica risulta misurata in **statcoulomb**. Nel *sistema MKS razionalizzato*, invece, il valore di **K** è $9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ (valido nello spazio vuoto) e la carica si misura in **coulomb**.

La relazione che intercorre tra il coulomb e lo statcoulomb è la seguente:

$$1 \text{ coulomb} = 3 \times 10^9 \text{ statcoulomb} \text{ (2)}$$

Per questioni formali legate all'espressione di altre leggi che si vedranno in seguito ⁽³⁾, si preferisce scrivere la costante **K** in un altro modo:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon}$$

In questa nuova espressione, **ϵ** è la cosiddetta **costante dielettrica (o permittività dielettrica) del mezzo** che si sta considerando. Quando il mezzo è il vuoto oppure anche l'aria, il valore di tale costante è

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

¹ E' abbastanza evidente la similitudine con la legge della gravitazione universale, con la differenza fondamentale che, in quel caso, l'interazione è solo di tipo attrattivo

² E' bene precisare che il coulomb è una unità molto grande per i fenomeni elettrostatici: tanto per avere una idea, se noi prendiamo due cariche q e Q di 1 coulomb, poste ad un metro di distanza, la forza di repulsione che si sviluppa tra di esse è dell'ordine di 10^6 tonnellate!! Si ricorre perciò molto spesso all'uso dei sottomultipli del coulomb, in particolare il nanocoulomb (10^{-9}) e il microcoulomb (10^{-6})

³ Ci riferiamo alle 4 leggi fondamentali di Maxwell per l'elettromagnetismo

Tramite la legge di Coulomb, possiamo esprimere anche il campo elettrico generato da una carica Q isolata:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{a}_r$$

Alla carica q si dà il nome di **carica sonda**, proprio per il fatto che si tratta della carica campione utilizzata per valutare il campo prodotto da Q . Tuttavia, è bene precisare che *il campo elettrico esiste anche se non c'è una carica sonda che risente della sua azione*. Questo significa che, se $q=0$, $F=0$ ma $E \neq 0$.

In base all'espressione del campo elettrico appena trovata, è evidente che il modulo di \vec{E} è $Q/4\pi\epsilon r^2$, mentre la direzione è quella individuata dal versore \vec{a}_r , che è quello della congiungente Q a q .

Dato che nel sistema MKS l'unità di misura della carica è il coulomb e quella della forza è il N, si deduce che l'unità di misura del campo elettrico è il **Newton/Coulomb**. Spesso si usa però un'altra unità di misura, il **Volt/metro**, sulla cui utilità si tornerà più avanti quando si parlerà del *potenziale elettrostatico* e della sua unità di misura (che è appunto il Volt).

Per concludere, si definisce **linea di forza elettrica** quella curva che, in ogni punto, è tangente al vettore campo elettrico esistente in quello stesso punto: in altre parole, in ciascun punto la direzione del campo elettrico è quella della tangente alla linea di forza elettrica in quel punto.

Le linee di forza elettrica servono a darci una visione qualitativa dell'andamento del campo elettrico nella regione considerata. Servono però anche a darci una idea quantitativa, visto che il numero di linee di forza elettrica per unità di superficie è proporzionale all'ampiezza del vettore \vec{E} .

Vettore spostamento elettrico

Abbiamo detto che il campo elettrico prodotto, in un punto a distanza r , da una carica puntiforme isolata Q , è valutabile come

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{a}_r$$

dove q è la carica sonda posta nel punto in esame.

In base a questa relazione, è evidente che il campo elettrico dipende sia dal valore Q della carica e dalla sua posizione (rappresentata da r) sia anche dalla permittività dielettrica ϵ del mezzo in cui il campo viene misurato. E' opportuno allora definire un'altra grandezza, sempre legata alla carica Q , che invece non dipenda da ϵ , cioè dalla natura del mezzo: si tratta del cosiddetto **spostamento elettrico** Ψ (detto anche "flusso elettrico"), il quale, nel sistema MKS, è esattamente pari alla carica che lo produce, ossia

$$\Psi = Q$$

(questa definizione sarà chiara più avanti).

Evidentemente, dato che la carica si misura in coulomb, lo stesso si farà per Ψ .

Il significato dello spostamento elettrico è dato dalla nota *esperienza di Faraday delle sfere concentriche*: consideriamo due sfere concentriche e supponiamo che su quella interna sia stata depositata una carica $+Q$; questa carica "induce" sulla sfera esterna una carica esattamente pari a $-Q$ e questo indipendentemente dalla dimensione della sfera stessa e dalla natura del materiale dielettrico eventualmente disposto tra le sfere.

Richiami sull'induzione elettrica

In generale, ogni volta che un conduttore metallico, isolato e allo stato neutro, viene avvicinato ad un corpo elettrizzato, il conduttore si elettrizza a sua volta per **induzione**: esso si carica cioè di elettricità di segno contrario a quella del corpo induttore nella parte più vicina a questo e di elettricità dello stesso segno in quella più lontana.

Se il corpo induttore viene allontanato (oppure scaricato), il conduttore metallico (che prende il nome di "indotto") ritorna allo stato di partenza (cioè allo stato neutro).

Naturalmente il termine "caricare" non indica che, dal nulla, si viene a creare una carica elettrica all'interno del conduttore: con quel termine si vuol dire che, a seguito della vicinanza dell'induttore, si ha all'interno dell'indotto la separazione delle cariche elettriche di segno opposto. Solo se ci fosse il contatto tra l'indotto e l'induttore (e in questo caso non si parla più di induzione), allora la carica di quest'ultimo verrebbe trasferita, tutta o in parte, all'indotto il quale quindi "acquista" tale carica.

Vettore densità di spostamento elettrico

Consideriamo una carica Q isolata e consideriamo un punto qualsiasi di una superficie sferica, di raggio r , centrata nella carica stessa: prende il nome di "spostamento elettrico per unità di superficie", o **densità di spostamento elettrico**, la quantità

$$\vec{D} = \frac{\Psi}{4\pi r^2} \vec{a}_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{a}_r$$

Lo spostamento elettrico per unità di superficie è dunque una quantità vettoriale e questo deriva dal fatto che essa dipende dalla "orientazione" della superficie: infatti, la sua direzione è quella della normale all'elemento di superficie per cui la densità di spostamento elettrico risulta massima.

Chiaramente, per una carica Q isolata in un mezzo isotropo, la direzione è quella radiale con centro nella carica stessa e coincide perciò con quella del campo elettrico.

L'unità di misura del vettore \vec{D} è il **Coulomb/metro²**.

Se confrontiamo la relazione di poco fa con quella che definisce il campo elettrico, possiamo senz'altro affermare che, dato un mezzo isotropo (cioè caratterizzato da una costante dielettrica ϵ che non dipende dal campo elettrico) ed omogeneo (cioè con ϵ costante, indipendente dalla posizione), sussiste la relazione

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}.$$

Il vettore polarizzazione

Supponiamo di avere un materiale dielettrico (cioè isolante, privo di cariche elettriche libere) soggetto all'azione di un campo elettrico: questa "azione" consiste nel perturbare le orbite di elettroni e molecole nel mezzo e questa perturbazione dà luogo ad un "dipolo di polarizzazione per unità di volume". In particolare, l'applicazione del campo esterno tende ad allineare tutti i dipoli nella stessa direzione del campo, il che comporta una diminuzione dell'intensità del campo elettrico all'interno del materiale. Allora, è ovvio che il vettore densità di spostamento elettrico, che dipende dal campo elettrico, sarà la somma di due contributi: quello del campo applicato dall'esterno e quello del campo prodotto dai dipoli del dielettrico.

Possiamo dire, perciò, che il vettore densità di spostamento elettrico per un materiale isotropo viene definito mediante la relazione

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

dove si nota subito il contributo del cosiddetto **vettore polarizzazione**, definito dalla relazione

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto, χ_e la **suscettibilità dielettrica lineare** ed \vec{E} il campo elettrico.

Quando il mezzo considerato non è isotropo, come ad esempio alcuni mezzi cristallini, la permittività dielettrica ϵ varia a seconda delle direzioni del campo elettrico: ciò implica che i vettori \vec{D} ed \vec{E} abbiano in genere direzioni diverse. In questi casi, la relazione $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ va interpretata come una "operazione tensoriale", cioè un prodotto matriciale: in particolare, se ci mettiamo in un sistema di coordinate cartesiane, quella relazione diventa

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

ossia

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{aligned}$$

Linee di flusso elettrico

Si definisce **linea di flusso elettrico** la curva che in ogni punto è tangente al vettore \vec{D} presente in quello stesso punto. Così come le linee di forza elettrica ci davano una visione qualitativa del campo elettrico, le linee di flusso elettrico ci danno una visione qualitativa del vettore densità di spostamento elettrico.

Il numero di linee di flusso per unità di superficie dà una indicazione della grandezza del vettore \vec{D} .

In base a quanto detto prima, è evidente che, in un mezzo omogeneo e isotropo, nel quale cioè sussiste la relazione $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ con ϵ scalare e costante punto per punto, le linee di forza elettrica (vettore \vec{E}) e le linee di flusso elettrico (vettore \vec{D}) hanno la stessa direzione.

Flusso di un campo vettoriale

Supponiamo di avere un campo vettoriale qualsiasi $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ e supponiamo di avere un elemento di superficie dS avente come normale positiva la semiretta \vec{n} . Si chiama allora **flusso elementare $d\phi$** del campo attraverso la superficie dS la seguente quantità:

$$d\phi = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

In questa espressione, $d\vec{S}$ è il vettore avente per modulo l'area dS dell'elemento di superficie e per direzione e verso quelli della normale orientata \vec{n} a dS . Inoltre, \vec{E} è il valore che il campo vettoriale assume nel punto in cui si trova dS .

Per avere una idea chiara di cosa sia il flusso di un campo vettoriale, pensiamo ai fluidi: il campo vettoriale \vec{E} rappresenterebbe la distribuzione di velocità in un fluido incompressibile, per cui il flusso definisce il volume di fluido che passa attraverso la superficie dS nell'unità di tempo. Infatti il fattore (scalare) $\vec{E} \cdot \vec{n} dS$ rappresenta il volume del prisma avente per base dS e per altezza la componente della velocità nella direzione ortogonale a dS .

Se la superficie attraverso la quale vogliamo calcolare il flusso è finita, è possibile sfruttare il principio di sovrapposizione sommando tutti i contributi infinitesimi attraverso gli elementi dS di tale superficie: in tal modo, il flusso totale del campo \vec{E} attraverso la superficie S sarà dato da

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_S E dS \cos \theta$$

dove θ è l'angolo che il campo \vec{E} forma con la normale positiva all'elemento generico dS considerato.

Se il campo vettoriale considerato è quello elettrico, si deduce, dalle formule appena fornite, che la misura del flusso del campo elettrico si misura, nel sistema S.I. in **Voltmetro**: infatti, il campo elettrico si misura in Volt/metro mentre l'area della superficie si misura in metro².

Il teorema di Gauss per la densità di spostamento elettrico

Il **teorema di Gauss per il vettore densità di spostamento elettrico** afferma quanto segue: *il flusso del vettore \vec{D} attraverso una qualsiasi superficie chiusa che circonda una certa carica Q è pari alla carica stessa.*

Dimostriamo questo risultato. Consideriamo una carica puntiforme Q situata in un mezzo omogeneo e isotropo con costante dielettrica ϵ . Consideriamo poi un

punto P a distanza r dal punto in cui si trova Q: per definizione, la densità di flusso elettrico nel punto P vale $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{a}_r$. Preso invece un generico elemento di superficie dS, il flusso del vettore \vec{D} , ossia il flusso elettrico, attraverso dS è dato, per definizione di flusso, da

$$d\Psi = \vec{D} \cdot \vec{n} dS = D dS \cos \theta$$

dove θ è l'angolo tra il vettore \vec{D} e la normale a dS.

Il prodotto $dS \cos \theta$ non è altro che la proiezione del vettore $d\vec{S}$ nella direzione del raggio vettore, ossia nella direzione di \vec{a}_r : poniamo perciò

$$dS_n = dS \cos \theta$$

Inoltre, l'angolo solido che dal punto in cui si trova Q sottende l'elemento di superficie dS è dato da

$$d\Omega = \frac{dS_n}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

Adesso, il flusso totale, attraverso una superficie chiusa finita S che avvolge la carica Q si ottiene integrando il flusso elementare dΨ su tutta la superficie S:

$$\Psi = \int_S d\Psi = \int_S D dS \cos \theta = \int_S D r^2 d\Omega = \frac{Q}{4\pi} \int_S d\Omega = Q$$

Questo è proprio quello che volevamo dimostrare. Tra l'altro, da questa relazione è possibile comprendere meglio la definizione data in precedenza di flusso elettrico.

E' inoltre ovvio che il risultato appena dimostrato si può ulteriormente estendere al caso in cui la superficie S racchiuda N cariche puntiformi ed al caso in cui invece essa racchiuda delle cariche non più puntiformi, ma distribuite uniformemente con una certa densità.

Se ci sono N cariche puntiformi, avremo evidentemente che

$$\Psi = \sum_{i=1}^N Q_i$$

Se invece le cariche sono distribuite, in modo uniforme, entro un volume τ con densità spaziale di carica ρ (misurata in coulomb/metro³), allora avremo che

$$\Psi = \oint_{\tau} \rho(\vec{r}) d\tau$$

Quest'ultima relazione rappresenta l'espressione più generale del **teorema di Gauss in forma integrale**. Ne esiste anche un'altra, questa volta in forma differenziale, e si ottiene da quella applicando il *teorema della divergenza* (di cui si parlerà più avanti): in primo luogo, per definizione stessa di Ψ possiamo scrivere che

$$\Psi = \oint_{\tau} \rho(\vec{r}) d\tau = \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS$$

In base al suddetto teorema della divergenza, l'integrale di superficie è equivalente ad un integrale di volume e precisamente

$$\Psi = \oint_{\tau} \rho(\vec{r}) d\tau = \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_{\tau} \text{div} \vec{D} d\tau$$

Dall'uguaglianza tra i due integrali di volume otteniamo evidentemente che

$$\boxed{\text{div} \vec{D} = \rho}$$

Nel caso particolare in cui il mezzo sia isotropo e omogeneo, per cui vale la relazione $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, il **teorema di Gauss in forma differenziale** diventa

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

mentre invece in forma integrale diventa

$$\oint_{\text{SUP}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\rho_{\text{TOT}}}{\epsilon_0}$$

Natura conservativa del campo elettrico

Supponiamo di avere una certa distribuzione di carica che genera nella regione circostante un campo elettrico $\vec{E}(\vec{r})$ e supponiamo di avere una carica puntiforme q posta sotto l'influenza di tale campo: sulla carica q agirà una forza elettrica $\vec{F}_E = q\vec{E}$. Se si vuole mantenere la carica q fissa nella sua posizione, è necessario applicare dall'esterno un'altra forza F_A uguale in modulo e direzione e opposta in verso alla forza elettrica: deve cioè essere $\vec{F}_A = -\vec{F}_E$. In queste ipotesi, supponendo che la carica q fosse inizialmente in quiete, rimarrà in quiete.

Adesso immaginiamo di voler spostare questa carica puntiforme da un certo punto P_1 ad un altro punto P_2 ; tale spostamento deve però soddisfare due condizioni: innanzitutto, deve avvenire a velocità molto bassa, tanto da poter ritenere che l'energia cinetica della carica non vari durante il trasporto; inoltre, la carica dovrà ritornare in quiete nel punto P_2 .

Il lavoro compiuto dalle due forze agenti sulla carica durante lo spostamento è immediato da calcolare: se $d\vec{l}$ è lo spostamento infinitesimo dalla carica lungo un generico percorso, il lavoro della forza elettrica è

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_E \cdot d\vec{l}$$

Il lavoro della forza applicata sarà ovviamente uguale, ma di segno opposto, a quello della forza elettrica. Quindi, se l'agente esterno fa un lavoro positivo, la forza elettrica ne farà uno negativo, cioè "assorbirà" quello dell'altra e viceversa.

In generale dunque si ha che

$$L_E + L_A = 0$$

Adesso calcoliamo nel dettaglio quanto vale il lavoro del campo elettrico per lo spostamento di q da P_1 a P_2 . Il lavoro infinitesimo dL_E per un generico spostamento $d\vec{l}$ è dato da

$$dL_E = \vec{F}_E \cdot d\vec{l}$$

Se sostituiamo l'espressione della forza elettrica data dalla legge di Coulomb, otteniamo

$$dL_E = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\vec{a}_r \cdot d\vec{l})$$

In base alle proprietà dei due vettori in questione, si deduce che il prodotto scalare è pari a $dl\cos\theta$, dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori. Allora, ponendo

$$dr = dl\cos\theta$$

e integrando tra la posizione iniziale (r_1) e quella finale (r_2), otteniamo che il lavoro totale compiuto della forza elettrica è dato da

$$L_E = \int_{r_1}^{r_2} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Se ne deduce che il lavoro della forza elettrica non dipende in nessun modo dal percorso seguito dalla carica ma è legato solamente alla posizione iniziale e a quella finale. Questo risultato dice dunque che il campo prodotto da una carica puntiforme è di tipo **conservativo**.

Teorema della circuitazione del campo elettrico

La natura conservativa del campo elettrico comporta una importante proprietà del campo stesso: infatti, se la esprimiamo con una formula, essa dice che

$$\oint_{\Gamma} \vec{F}_E \cdot d\vec{l} = 0$$

dove Γ è una qualsiasi linea chiusa.

Ma, considerando che la forza elettrica ha espressione $\vec{F}_E = q\vec{E}$, è chiaro che quella relazione può essere riscritta nella forma

$$\oint_{\Gamma} q \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

Questa proprietà, estesa al caso più generale possibile grazie al principio di sovrapposizione, si esprime dicendo che *la "circuitazione" del campo elettrostatico prodotto da una distribuzione qualsiasi di carica risulta sempre nulla.*

In termini differenziali, abbiamo che

$$\boxed{\text{rot} \vec{E} = 0}$$

Si dice che il campo elettrico è "irrotazionale".

L'energia potenziale elettrica

Dato che il lavoro per spostare una carica q da una certa posizione iniziale ad una finale non dipende dal cammino seguito, si può trovare una funzione $U(x,y,z)$ delle sole coordinate spaziali, che chiameremo funzione **energia potenziale elettrica**, tale che la differenza tra i valori che essa assume in P_2 e in P_1 dia proprio il lavoro per trasportare q da P_1 a P_2 : in particolare, dato che per spostare q nel campo generato da Q occorre compiere un lavoro pari a

$$L_A = -L_E = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

potremo sicuramente porre

$$\boxed{U(r) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

Per chiarire ancora meglio il significato di energia potenziale, facciamo il seguente ragionamento: per portare la carica q da P_1 a P_2 , la forza applicata dall'esterno fa un lavoro L_A (positivo) pari, in modulo, al lavoro assorbito dal campo elettrico ($L_E = -L_A$); quindi, il lavoro L_A non viene definitivamente perduto una volta che lo spostamento è stato ultimato, ma ci può essere restituito dal campo elettrico se riportiamo la carica nella posizione iniziale; infatti, nel trasporto, avremo $L_E' > 0$ e $L_A' < 0$. Questo si può anche esprimere dicendo il lavoro fatto dall'agente esterno viene "immagazzinato" nel sistema durante il trasporto sotto forma di energia potenziale, cioè

$$L_A = U_{\text{FIN}} - U_{\text{IN}}$$

L'aumento dell'energia potenziale avviene a spese del lavoro fatto dall'agente esterno. Dato però che $L_A = -L_E$, si ha evidentemente che la variazione dell'energia potenziale è pari al lavoro delle forze del campo cambiato di segno, cioè

$$U_{\text{FIN}} - U_{\text{IN}} = -L_E$$

L'energia potenziale è definita a meno di una costante arbitraria: questo significa che, dal punto di vista fisico, hanno importanza solo le variazioni

dell'energia potenziale e non il valore assoluto che attribuiamo a tale energia quando la carica puntiforme q si trova nei diversi punti dello spazio. Naturalmente, lo stesso vale se a generare il campo è una distribuzione continua di carica, e questo sempre in virtù del principio di sovrapposizione.

La funzione potenziale

Il campo elettrico può dunque essere caratterizzato dal lavoro necessario per spostare una carica puntiforme unitaria da un punto preso come riferimento (che comunemente è l'infinito) fino ad un punto di interesse P che si trovi ad una certa distanza R dalla carica Q che genera il campo stesso.

Si definisce **differenza di potenziale** (o "**tensione**") tra due punti P e B il lavoro W , cambiato di segno, fatto dal campo elettrico per spostare una carica unitaria da B a P : in termini analitici, si ha che

$$V_{PB} = V_P - V_B = \frac{W}{q} = - \int_{r_B}^{r_P} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_B} \right)$$

È inoltre ragionevole pensare che, quando B si trova all'infinito, ossia quando $r_B \rightarrow \infty$, sia $V_B = 0$. Allora, ponendo $r_P = R$, si definisce **potenziale elettrico** nel punto P dovuto alla carica puntiforme Q (distante R da P) la quantità

$$V(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}$$

Si tratta del lavoro fatto dalla forza elettrica per portare una carica unitaria dal punto P all'infinito. Il potenziale elettrico è dunque un "potenziale scalare".

Essendo il potenziale dato da un lavoro per unità di carica, la sua unità di misura è il Joule/Coulomb e si chiama **Volt**: diremo perciò che tra due punti c'è una differenza di potenziale (abbreviato **d.d.p.**) di 1 Volt se il lavoro fatto dalle forze del campo elettrico per trasportare dal primo al secondo punto una carica di 1 Coulomb è pari a -1 Joule.

In definitiva, il potenziale elettrico è quella funzione scalare $V(x,y,z)$ scelta in modo tale che il suo valore in ogni punto del campo elettrico rappresenti l'energia potenziale posseduta in quel punto dall'unità di carica positiva, la quale, a sua volta, rappresenta, a meno di una costante, il lavoro che occorre spendere per portare la carica in quella posizione dall'infinito.

Derivazione del campo elettrico dal potenziale elettrico

In base alla definizione matematica appena data di potenziale elettrico ed in base alla definizione di campo elettrico, ossia

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{R^2} \vec{a}_R$$

è possibile ricavare che

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

Questa relazione dice che la direzione del campo elettrico è quella del gradiente di V , ossia quella in cui il potenziale varia più rapidamente (in base alle proprietà del gradiente). Per convenzione, il verso è quello che va verso i potenziali decrescenti.

Equazione di Poisson ed equazione di Laplace

In base al teorema di Gauss in forma differenziale, abbiamo appurato che $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$; allo stesso tempo, abbiamo visto che il campo elettrico è ottenibile mediante la relazione $\vec{E} = -\text{grad} V$, dove V è la funzione potenziale. Allora, sostituendo la seconda relazione nella prima, si trova che

$$\text{div}(\text{grad} V) = \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Questa relazione si chiama **equazione di Poisson**: si tratta evidentemente di una equazione differenziale dove l'incognita è la funzione scalare V . Essa esprime una condizione fondamentale cui deve soddisfare il potenziale elettrostatico nello spazio, una volta nota la distribuzione di carica mediante la sua densità.

Nel caso particolare che lo spazio preso in considerazione sia vuoto, cioè che non ci siano cariche elettriche, il valore della densità risulta nullo, per cui l'equazione di Poisson diventa una equazione differenziale omogenea che prende il nome di **equazione di Laplace**:

$$\text{div}(\text{grad} V) = \nabla^2 V = 0$$

La funzione di Green

Nella teoria dei campi, si ha spesso a che fare con funzione che sono continue insieme alle loro derivate; allora, per i calcoli matematici risulta di notevole aiuto l'uso della **funzione impulsiva unitaria δ di Dirac**, utile in particolare per la rappresentazione di sorgenti discrete (come una corrente lungo un filamento oppure una carica puntiforme).

Per capire meglio questo concetto, vediamo il seguente esempio: consideriamo una carica puntiforme q situata in un punto dello spazio; in base alla definizione di densità spaziale di carica, possiamo interpretare questa carica come una distribuzione uniforme di carica, con densità spaziale ρ , situata in un volume τ :

$$q = \int_{\tau} \rho(\vec{r}_0) d\tau$$

In questa espressione, \vec{r}_0 è il vettore che individua la posizione della carica rispetto all'origine del sistema di riferimento considerato.

Ovviamente, se la carica q fosse esterna al suddetto volume τ , dovrebbe essere

$$\int_{\tau} \rho(\vec{r}_0) d\tau = 0$$

Allora, ci si può chiedere quale sia la funzione densità spaziale di carica che soddisfa le condizioni espresse da queste ultime due. E' facile verificare che si tratta della funzione

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

dove il vettore \vec{r} individua il generico punto P nel quale valutiamo la densità di carica.

Abbiamo cioè trovato che la funzione $\rho(\vec{r})$ rappresenta la densità di carica di una carica puntiforme q situata nel punto $\vec{r} = \vec{r}_0$. Allora, se riprendiamo l'equazione di Poisson e sostituiamo l'espressione appena trovata della densità di carica, otteniamo

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\epsilon}$$

Questa equazione impone dunque un preciso vincolo al potenziale elettrico generato, nel punto P (rappresentato dal vettore \vec{r}), dalla carica q considerata (situata nel punto individuato da \vec{r}_0).

Nel caso particolare in cui la carica q sia unitaria, il potenziale da essa generato (e soddisfacente quella relazione) prende il nome di **funzione di Green** e viene solitamente indicato con $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$. Questa funzione deve dunque soddisfare alla relazione

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\epsilon}$$

Calcolo della funzione di Green (in coordinate sferiche) per una carica puntiforme

Vediamo quanto vale la funzione di Green in un caso particolarmente semplice: consideriamo una carica isolata (ovviamente unitaria) situata nel punto individuato dal vettore \vec{r}_0 ; tale vettore individua questo punto nel sistema di riferimento prescelto e, in questo caso, si tratta del sistema di coordinate sferiche (4).

In un sistema di coordinate sferiche, le coordinate sono r, θ, φ , per cui, in linea di massima, la funzione G dipende da tutte e tre tali coordinate. Tuttavia, nel problema che stiamo esaminando adesso, evidenti motivi di simmetria indicano che l'unica coordinata dalla quale G può dipendere è quella radiale, ossia r . Sulla base di ciò, l'equazione scritta prima può essere senz'altro semplificata: in primo luogo,

4 Si ricordi che il sistema di riferimento può essere scelto a proprio arbitrio, ma è ovvio che è consigliabile scegliere quello che più si addice al problema in esame

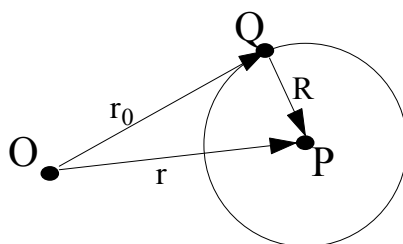
essendo nulle le derivate parziali rispetto alle coordinate θ e φ (per i motivi di simmetria di cui si diceva), abbiamo semplicemente

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right)$$

per cui l'equazione che da risolvere è

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) = -\frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\epsilon}$$

Integriamo l'equazione su una sfera centrata nel punto P e di raggio R pari alla distanza tra P (punto potenziato) ed il punto Q (punto potenziante):



Possiamo subito osservare quanto segue:

- l'integrale del secondo membro è quello esteso al volume racchiuso dalla sfera,

per cui è
$$-\int_{\tau} \frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\epsilon} d\tau$$

- senz'altro più complessa è l'integrazione del primo membro: in primo luogo, essendo in coordinate sferiche, dobbiamo effettuare una tripla integrazione del primo membro; le variabili di integrazione sono, nell'ordine, r , θ e φ ; se l'integrazione è estesa ad una sfera, φ varia tra 0 e 2π , θ varia tra 0 e π ed r varia tra r ed r_0 , dato che il raggio della sfera è R e sussiste la relazione $|r - r_0| = R$; infine, l'elemento di volume in coordinate sferiche è $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$, per cui possiamo concludere che l'integrale del primo membro è

$$\int_{|r_0|}^{|r|} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

In definitiva, abbiamo che

$$\int_{|r_0|}^{|r|} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = -\int_{\tau} \frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\epsilon} d\tau$$

Procediamo adesso con i calcoli, a partire dal primo membro: intanto, non c'è nessuna funzione o variabile che dipenda dalla coordinata φ , per cui possiamo facilmente risolvere la prima integrazione e ottenere che

$$2\pi \int_{|r_0|}^{|r|} \int_0^\pi \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta = - \int_{\tau} \frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\epsilon} d\tau$$

Adesso, possiamo tirar fuori dall'integrale in θ quei termini che non dipendono da θ stesso:

$$2\pi \int_{|r_0|}^{|r|} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta = - \int_{\tau} \frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\epsilon} d\tau$$

L'integrale in θ è adesso immediato, in quanto vale $-\cos\theta$, per cui

$$2\pi [-\cos\theta]_0^\pi \int_{|r_0|}^{|r|} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) r^2 dr = - \int_{\tau} \frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\epsilon} d\tau$$

Ci rimane dunque l'ultimo integrale, quello in dr : possiamo subito semplificare r^2 e dr , per cui rimane

$$4\pi \int_{|r_0|}^{|r|} d \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) = - \int_{\tau} \frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\epsilon} d\tau$$

L'integrale definito del differenziale di una funzione è pari alla funzione stessa calcolata tra i due estremi di integrazione, per cui

$$4\pi \left[r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right]_{|r_0|}^{|r|} = - \int_{\tau} \frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\epsilon} d\tau$$

A questo punto, avendo detto che G può dipendere solo dalla coordinata r , possiamo sostituire il segno di derivata parziale con quello di derivata totale; successivamente, possiamo valutare tale derivata nei due estremi di integrazione: ricordando che $|r - r_0| = R$, abbiamo che

$$4\pi R^2 \frac{dG}{dR} = - \int_{\tau} \frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\epsilon} d\tau$$

Passiamo adesso al secondo membro: ricordandoci semplicemente che l'integrale della funzione di Dirac vale 1, abbiamo che

$$4\pi R^2 \frac{dG}{dR} = - \frac{1}{\epsilon}$$

Dato che vogliamo l'espressione della funzione G e, in questa relazione, essa compare derivata, è ovvio che dobbiamo effettuare una nuova integrazione: in questo caso, però, le cose ci vengono facilitate dal fatto che si tratta di una equazione a variabili separabili. Quindi, ponendola nella forma

$$dG = - \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{R^2} dR$$

e integrando in modo indefinito, otteniamo che

$$G(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon R}$$

dove abbiamo evidentemente posto $G(R \rightarrow \infty) = 0$.

Questo è dunque il potenziale nel punto P prodotto dalla carica unitaria puntiforme situata nel punto Q a distanza R da P. Evidentemente, se la carica non fosse unitaria ma avesse valore q, avremmo ottenuto

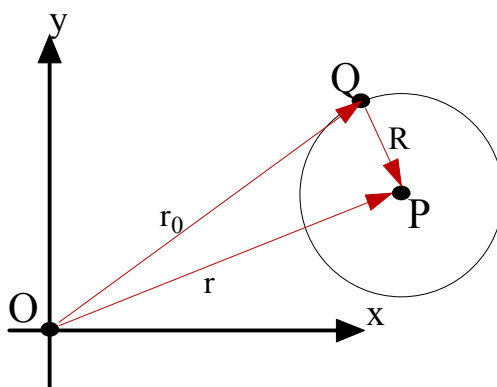
$$V(R) = qG(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon R}$$

Nel caso, invece, in cui la carica sia distribuita con continuità in un certo volume τ con densità spaziale ρ , quest'ultima relazione diventa

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{1}{R} \rho(r_0) d\tau$$

Calcolo della funzione di Green (in coordinate cilindriche) per una carica puntiforme

Consideriamo lo stesso problema del caso precedente, con la differenza che intendiamo questa volta ragionare in coordinate cilindriche (ρ, φ, z) anziché in coordinate cartesiane (x, y, z) . Per semplificarci la vita, possiamo supporre che z sia stato fissato, per cui la situazione è quella di figura:



Le coordinate sono dunque la distanza ρ del punto P di interesse dall'origine e l'angolo φ che il vettore che individua P forma con l'asse delle ascisse.

La relazione generale da cui partire è sempre

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\epsilon}$$

Essa può essere semplificata tenendo conto che l'unica coordinata dalla quale G può dipendere è ρ , per cui essa assume la forma

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{\partial G}{\partial \rho} \right) = -\frac{\delta(\rho - \rho_0)}{\epsilon}$$

L'integrale è un integrale di superficie: la superficie di integrazione S è un cerchio con centro in Q e raggio pari alla distanza di P da Q stesso: essendo $dS = \rho d\rho d\phi$ l'elemento di superficie in coordinate cilindriche, abbiamo che

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{\partial G}{\partial \rho} \right) \rho d\rho d\phi = -\frac{1}{\epsilon} \int_{\text{SUP}} \delta(\rho - \rho_0) dS$$

L'integrale a secondo membro è pari ad 1, per cui

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{\partial G}{\partial \rho} \right) \rho d\rho d\phi = -\frac{1}{\epsilon}$$

Vediamo allora quanto vale l'integrale doppio a primo membro: intanto, non ci sono termini che dipendono dalla coordinata ϕ , per cui possiamo risolvere la prima integrazione e scrivere che

$$2\pi \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{\partial G}{\partial \rho} \right) \rho d\rho = -\frac{1}{\epsilon}$$

Ora possiamo semplificare ρ e $d\rho$:

$$2\pi \int_{\rho_0}^{\rho} d \left(\rho \frac{\partial G}{\partial \rho} \right) = -\frac{1}{\epsilon}$$

L'integrale definito del differenziale di una funzione è pari alla funzione stessa calcolata tra gli estremi di integrazione: quindi

$$2\pi \left[\rho \frac{\partial G}{\partial \rho} \right]_{\rho_0}^{\rho} = -\frac{1}{\epsilon}$$

Ponendo adesso $\rho_0=0$, abbiamo che $2\pi\rho \frac{\partial G}{\partial \rho} = -\frac{1}{\epsilon}$, ossia

$$\partial G = -\frac{1}{\epsilon} \frac{1}{2\pi\rho} \partial\rho$$

Il simbolo di derivata parziale può essere eliminato, in quanto abbiamo detto che G può dipendere solo da ρ : quindi la relazione diventa

$$dG = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\pi\rho} d\rho$$

Integrando in modo indefinito, abbiamo che

$$G(\rho) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \log \rho + \text{cost}$$

Infine, imponendo che $G(\infty)=0$, concludiamo che

$$G(\rho) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \log \rho$$

Le superfici equipotenziali

Si definisce **superficie equipotenziale** una superficie in ogni punto della quale la funzione potenziale elettrico assume lo stesso valore. Evidentemente, questo significa che il campo elettrico lungo una superficie equipotenziale è nullo ovunque, ossia, meglio, che è nulla la componente del campo elettrico parallela al campo, ossia, ancora, che il campo elettrico è ortogonale alla superficie equipotenziale.

Conseguenza di ciò è che non è necessario spendere alcun lavoro per spostare una qualsiasi carica lungo i punti di una superficie equipotenziale.

Tanto per fare un esempio concreto, data una carica puntiforme q , il potenziale elettrico da essa generato ha l'espressione

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon R}$$

per cui sono superfici equipotenziali le infinite sfere centrate nella carica e di raggio R : su ciascuna di esse il potenziale è sempre lo stesso.

Conduttori metallici in equilibrio in un campo elettrico

Campo interno nullo

Nei conduttori metallici sono presenti i cosiddetti “elettroni di conduzione” o **elettroni liberi**, i quali non sono vincolati a particolari posizioni nel reticolo cristallino e si possono perciò muovere liberamente, formando ciò che viene definito **gas elettronico**. Supponiamo perciò di avere un corpo conduttore sottoposto ad un campo elettrico applicato dall'esterno: le cariche mobili del conduttore, sotto l'azione del campo, sentono l'azione di una forza elettrica, per cui si spostano verso quelle posizioni che fanno assumere al sistema di cariche la minima energia potenziale, quindi verso posizioni di *equilibrio stabile*. In particolare, possiamo far

vedere che l'equilibrio elettrico all'interno di un conduttore deve sempre corrispondere ad un campo elettrico interno nullo.

Il motivo è evidente: se il campo elettrico interno fosse diverso da zero, sarebbero anche diverse da zero le forze $F=qE$ agenti sulle cariche mobili e tali forze solleciterebbero le cariche stesse a muoversi anziché a fermarsi nelle posizioni di equilibrio.

Campo elettrico in superficie al conduttore

Il campo elettrico applicato dall'esterno interessa inizialmente l'intero conduttore, sia cioè la sua superficie esterna sia la regione interna, e sollecita le cariche mobili a muoversi. Segue poi una brevissima fase transitoria durante la quale il conduttore si porta nella condizione di campo interno nullo.

Consideriamo ciò che succede all'interno del conduttore: una piccola frazione degli elettroni mobili va a concentrarsi da una parte del conduttore, lasciando un eccesso di cariche positive nella parte opposta; tale separazione di cariche genera evidentemente un campo elettrico, il quale, sommato a quello che viene imposto dall'esterno (e che genera la separazione di cariche) porta ad una situazione di equilibrio elettrico nella quale, come detto, il campo totale interno risulta nullo.

Vediamo di valutare il campo elettrico nei punti immediatamente esterni ad un conduttore. Abbiamo visto che, se il conduttore in questione è in equilibrio, necessariamente il campo elettrico deve essere nullo in tutti i punti interni del conduttore. Vedremo invece che, nei punti immediatamente esterni al conduttore, il campo elettrico risulta normale alla superficie stessa del conduttore.

Supponiamo di avere un conduttore di forma generica; prendiamo un particolare cammino, tale da essere in parte interno e in parte esterno al conduttore e da avere il lato esterno parallelo alla superficie e a distanza infinitesima. Per il teorema della circuitazione, la circuitazione del campo elettrico lungo questo cammino deve risultare nulla (in quanto il campo è conservativo) a prescindere dalla forma del cammino stesso:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Tuttavia, il campo elettrico totale nei punti di tale cammino è dato dalla somma del campo elettrico interno e di quello esterno; allo stesso modo, la circuitazione del campo totale è la somma della circuitazione del campo interno più la circuitazione del campo esterno:

$$0 = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_{INT}} \vec{E}_{INT} \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma_{EST}} \vec{E}_{EST} \cdot d\vec{l}$$

Tuttavia, il campo interno sappiamo essere nullo, da cui si deduce che deve essere nulla la circuitazione del campo esterno:

$$\int_{\Gamma_{EST}} \vec{E}_{EST} \cdot d\vec{l} = 0$$

Ragioniamo allora su tale campo esterno. Abbiamo detto che il cammino preso in considerazione ha i due lati paralleli alla superficie del conduttore e a distanza

infinitesima. Nella circuitazione, possiamo allora trascurare il contributo che deriva dai due tratti infinitesimi perpendicolari alla superficie. Il campo esterno avrà due componenti: una ortogonale alla superficie e una tangenziale. Ora, nell'integrale della circuitazione, $d\vec{l}$ indica lo spostamento infinitesimo parallelo alla superficie del conduttore; allora, la circuitazione del campo elettrico esterno sarà la somma di due integrali estesi al cammino scelto: nel primo integrale bisogna effettuare il prodotto scalare della componente di \vec{E} ortogonale alla superficie per $d\vec{l}$, mentre nel secondo bisogna effettuare quello tra la componente tangenziale di \vec{E} per lo stesso $d\vec{l}$:

$$\int_{\Gamma_{EST}} \vec{E}_{EST} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_{EST}} \vec{E}_n \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma_{EST}} \vec{E}_T \cdot d\vec{l}$$

Ma il primo integrale è nullo in quanto i vettori da moltiplicare scalarmente sono ortogonali. In conclusione si ricava che

$$\int_{\Gamma_{EST}} \vec{E}_{EST} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_{EST}} \vec{E}_T \cdot d\vec{l}$$

Tuttavia, sappiamo che questo integrale deve risultare nullo: dato che lo spostamento $d\vec{l}$ non è nullo e non è parallelo alla componente tangenziale del campo, l'unica possibilità perchè quell'integrale dia zero è che sia nulla la componente tangenziale di \vec{E} .

Concludiamo dunque che il campo elettrico nei punti immediatamente esterni al conduttore risulta ortogonale alla superficie del conduttore stesso.

Distribuzione superficiale di carica

Un'altra importante proprietà dei conduttori in equilibrio è che non ci può essere accumulo di carica nei punti interni di un conduttore che si trova in equilibrio.

Dimostriamo questa proprietà sfruttando il teorema di Gauss. Prendiamo una generica superficie chiusa S interna al conduttore; applichiamo a tale superficie il teorema di Gauss: il flusso del campo elettrico (che in questo caso è quello interno) uscente da tale superficie è $\varphi_E = \frac{Q}{\epsilon}$, dove Q è carica totale interna alla superficie.

Ora, per definizione, questo stesso flusso è anche pari a

$$\int_S \vec{E}_{INT} \cdot \vec{n} dS$$

per cui scriviamo che

$$\int_S \vec{E}_{INT} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q}{\epsilon}$$

Del resto, quel prodotto scalare è nullo in quanto il campo interno di un conduttore in equilibrio è nullo, per cui risulta anche $Q=0$, ossia ciò che volevamo dimostrare.

Ne deriva una ulteriore importantissima proprietà: se carichiamo un conduttore o induciamo su di esso una certa carica, essa si dovrà necessariamente localizzare sulla superficie del conduttore stesso, mentre all'interno ci sarà carica nulla ⁽⁵⁾.

Applicando nuovamente il teorema di Gauss, possiamo adesso valutare quanto vale il campo elettrico nei punti immediatamente esterni ad un conduttore.

Sia dato quindi il nostro conduttore di forma qualsiasi. Come superficie a cui applicare il teorema di Gauss prendiamo questa volta un cilindretto così fatto: esso ha altezza infinitesima e ha una base interna al conduttore e una esterna. Calcoliamo allora il flusso del campo elettrico attraverso tale superficie: attraverso la base interna non c'è flusso in quanto è nullo il campo interno; attraverso la superficie laterale non c'è flusso in quanto campo elettrico e normale positiva sono ortogonali; l'unico contributo quindi al flusso è quello della base esterna, dove invece il campo elettrico e la normale positiva sono paralleli. Se allora indichiamo con S l'area di tale base esterna, il flusso attraverso S è pari a

$$\varphi_E = \frac{Q}{\epsilon}$$

Adesso, se indichiamo con σ_s la **densità di carica superficiale** del conduttore (misurata in Coulomb/metro²), è chiaro che $Q = \sigma_s S$, per cui

$$\varphi_E = \frac{\sigma_s S}{\epsilon}$$

Questo stesso flusso, applicando la definizione, è anche pari a

$$\int_S \vec{E}_{EST} \cdot \vec{n} dS$$

per cui scriviamo che

$$\int_S \vec{E}_{EST} \cdot \vec{n} dS = \frac{\sigma_s S}{\epsilon}$$

Essendo il campo esterno ortogonale alla superficie del conduttore, esso è parallelo alla normale orientata \vec{n} , per cui possiamo concludere che

$$\boxed{E_{EST} = \frac{\sigma_s}{\epsilon}}$$

Naturalmente, ricordando la relazione $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, quella relazione diventa anche

$$\boxed{D_{EST} = \sigma_s}$$

⁵ Ricordiamo che "indurre" una certa carica su di un conduttore significa portare nelle sue vicinanze un corpo carico e provocare una separazione di cariche: questo significa che non viene creata alcuna carica, tanto che, se allontaniamo il corpo carico, l'effetto dell'induzione cessa e il corpo in questione ritorna allo stato neutro

Capacità

Capacità elettrostatica di un conduttore isolato

Supponiamo di avere un conduttore isolato, carico, a distanza molto grande da altre cariche e altri conduttori, in modo tale da non risentire della loro presenza. Sappiamo che, in condizioni di equilibrio, la superficie del conduttore è equipotenziale: sia φ_0 il valore di tale potenziale. La funzione potenziale nei punti esterni al conduttore si può determinare risolvendo l'equazione di Laplace $\nabla^2 V = 0$ e imponendo le opportune condizioni al contorno (che sono il valore V_0 sulla superficie del conduttore e potenziale nullo all'infinito). Una volta determinata la funzione potenziale $V(x,y,z)$, si può determinare il campo elettrico sulla superficie del conduttore, che è ortogonale alla superficie stessa ed ha modulo

$$|\vec{E}| = -\frac{\partial V}{\partial n}$$

dove n indica la direzione normale alla superficie stessa.

Dal campo si può determinare la densità superficiale di carica $\sigma = \epsilon_0 E$ e, da essa, la carica totale Q presente sul conduttore:

$$Q = \int_S \sigma dS$$

Supponiamo allora che la funzione $V(x,y,z)$ sia una soluzione del problema che ci siamo appena posti; dato che l'equazione di Laplace è lineare, anche la funzione $V' = K \cdot V$ (dove K è una costante reale) sarà una soluzione dello stesso problema, con, però, la nuova condizione che $V_0' = K V_0$ sulla superficie del conduttore (abbiamo cioè portato il conduttore ad un potenziale più elevato). In questo caso, anche il campo in superficie diventerà K volte più grande e con esso aumenteranno proporzionalmente anche la densità di carica e la carica totale (che diventa pari a $K \cdot Q$).

Deduciamo perciò che esiste una relazione di proporzionalità tra il potenziale φ del conduttore e la carica Q da questo posseduta. Si può perciò scrivere che

$$Q = C \varphi_0$$

dove la costante di proporzionalità C dipende solo dalla geometria del conduttore e prende il nome di **capacità elettrostatica**.

Cariche e potenziali su un sistema di conduttori

Supponiamo di avere un sistema di tre conduttori (più in generale N), di forma e posizioni qualsiasi, posti in una cavità dalle pareti conduttrici; supponiamo che tali pareti siano a potenziale nullo, a causa, per esempio, di un collegamento a terra. La superficie interna di tale cavità sostituisce, in questa nostra schematizzazione,

l'insieme dei punti all'infinito a potenziale nullo: questo ci permette di affermare che le conclusioni a cui arriveremo sono valide anche nel caso molto più generale di un sistema di conduttori isolati posti nello spazio vuoto.

Siano A_1 , A_2 e A_3 i tre conduttori e siano q_1 , q_2 e q_3 le cariche da essi possedute; tali cariche, in base alle proprietà già viste sui conduttori, si andranno a distribuire sulla superficie esterna di ciascun conduttore in modo tale che il campo interno risulti nullo e che ciascun conduttore risulti equipotenziale con potenziali V_1 , V_2 e V_3 .

Per poter determinare il potenziale nei punti dello spazio vuoto interposto tra i conduttori dovremo risolvere l'equazione di Laplace imponendo le opportune condizioni al contorno: il potenziale sulla superficie interna della cavità deve essere nullo e i potenziali sulle superfici dei conduttori devono essere quelli prima citati. Otterremo in tal modo la funzione potenziale $V(x,y,z)$, funzione evidentemente dei punti dello spazio.

Naturalmente, la risoluzione dell'equazione di Laplace in una situazione così generica come quella che stiamo considerando è pressoché impossibile; è necessario perciò scomporre il nostro problema complesso in tre problemi più semplici (in generale in N problemi più semplici).

Collegiamo perciò tutti i conduttori, tranne uno, alle pareti della cavità, in modo che il loro potenziale diventi nullo: sia A_1 il conduttore che lasciamo isolato. Adesso portiamo tale conduttore ad un nuovo potenziale V_1' . Risolviamo quindi l'equazione di Laplace imponendo queste nuove condizioni al contorno: il potenziale è nullo sugli altri due conduttori e sulla superficie interna della cavità e vale ϕ_1' sul conduttore A_1 . Otteniamo in tal modo la funzione potenziale $V_1(x,y,z)$: da questa funzione possiamo determinare il campo elettrico in superficie al conduttore A_1 , la densità di carica sempre in superficie e quindi la carica totale posseduta.

Osserviamo adesso che la carica posseduta dal conduttore A_1 genera sugli altri due conduttori due cariche q_{21} e q_{31} per induzione; il valore di tali cariche si otterrà in base al valore del potenziale sul conduttore A_1 : infatti, dal valore della densità di carica su A_1 , integrando questa volta sulle superfici degli altri due conduttori, si otterrà il valore delle cariche indotte q_{21} e q_{31} da A_1 rispettivamente su A_2 e A_3 .

Adesso, riflettiamo sul valore della carica posseduta da A_2 e A_3 : in base alla linearità dell'equazione di Laplace, a seconda del valore ϕ_1' del potenziale dato ad A_1 , troveremo un diverso valore delle cariche q_{21} e q_{31} possedute dagli altri due conduttori; esiste cioè proporzionalità tra la carica indotta e il potenziale dato al conduttore inducente: riferendoci ad uno solo dei due conduttori, per esempio ad A_2 , possiamo perciò esprimere tale proporzionalità mediante la relazione

$$q_{21} = C_{21}V_1'$$

In modo analogo, per esprimere la proporzionalità tra la carica q_{11} posseduta da A_1 e il potenziale V_1' da essa raggiunto, scriveremo la relazione

$$q_{11} = C_{11}V_1'$$

Se ripetessimo lo stesso procedimento per ciascuno dei tre conduttori (in generale per ciascuno degli N conduttori), fissando cioè tutti gli altri a potenziale nullo e dando al conduttore in esame un certo potenziale V_i' , avremmo tre distinte soluzioni dell'equazione di Laplace, cioè tre diverse funzioni potenziali $V_i(x,y,z)$, ognuna corrispondente ad una determinata situazione fisica. Tuttavia, sempre per la linearità dell'equazione di Laplace, anche la somma di tali soluzioni sarà una soluzione: perciò, si ha che la soluzione generale dell'equazione di Laplace, una

volta imposte le condizioni al contorno del problema generale, è la funzione $V(x,y,z)$ data dalla sommatoria delle N soluzioni trovate per gli N problemi semplici .

Una volta trovato il potenziale, facilmente si ottiene il campo elettrico $E(x,y,z)$ in ciascun punto dello spazio come somma degli N campi (ciascun derivabile dal corrispondente potenziale) prodotti dagli N conduttori sfruttando il principio di sovrapposizione. Dal campo si ottengono poi la densità di carica e la carica complessiva di ciascuno degli N conduttori: in particolare, la carica q_j posseduta dal conduttore A_j è data dalla somma delle cariche q_{ji} indotte su A_j da ciascuno degli altri $N-1$ conduttori; a sua volta, in base alle relazioni viste all'inizio, ciascuna delle cariche indotte q_{ji} è data dal prodotto della costante C_{ji} del conduttore in esame per il potenziale ϕ_i' del conduttore inducente.

Per capirci meglio, vediamo cosa succede nel caso che i conduttori siano in tutto tre; le relazioni che si ottengono sono le seguenti:

$$\begin{aligned}q_1 &= C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3 \\q_2 &= C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3 \\q_3 &= C_{31}V_1 + C_{32}V_2 + C_{33}V_3\end{aligned}$$

Nel caso generale di N conduttori si avrà un sistema di N equazioni lineari che legano le cariche dei conduttori isolati ai potenziali che questi stessi assumono.

I coefficienti C_{ij} risultano dipendere esclusivamente dalla forma, dalla grandezza e dalla posizione dei conduttori: in altre parole, dipendono dalla struttura "geometrica" del problema e non dai valori delle cariche o dei potenziali.

I coefficienti ad indici uguali, cioè C_{ii} , riguardano evidentemente ogni singolo conduttore e legano la carica da esso posseduta al potenziale, quando tutti gli altri conduttori hanno potenziale nullo; essi prendono il nome di **coefficienti di capacità** e il loro valore è sempre positivo in quanto un conduttore isolato, carico positivamente, avrà certamente potenziale positivo.

I coefficienti ad indici diversi, cioè i C_{ij} , prendono invece il nome di **coefficienti di induzione**: infatti, ogni coefficiente C_{ij} lega il potenziale del conduttore A_i alla carica q_{ji} da esso indotta sul conduttore A_j , quando quest'ultimo e tutti gli altri conduttori hanno potenziale nullo. Mentre i coefficienti di capacità sono tutti positivi, i coefficienti di induzione risultano sempre negativi, in virtù del fatto che le cariche indotte sono sempre di segno opposto a quelle inducenti. Si dimostra che i coefficienti di induzione sono "simmetrici", cioè vale la relazione

$$C_{ij} = C_{ji}$$

Condensatori

Abbiamo dunque trovato che ogni corpo conduttore, facente parte di un sistema di più conduttori, è caratterizzato da un proprio "coefficiente di capacità", che esprime il rapporto tra la carica e il potenziale del conduttore quando è isolato e quando gli altri conduttori presenti sono mantenuti a potenziale zero. In questo senso i coefficienti di capacità rappresentano una estensione del concetto di "capacità" di un conduttore isolato, dove per capacità abbiamo indicato il rapporto tra la carica e il potenziale del conduttore quando è da solo, in assenza cioè di altri conduttori. Detto in altre parole, il rapporto tra la carica e il potenziale posseduti da un conduttore prende il nome di **capacità** quando il conduttore è da solo,

mentre si chiama **coefficiente di capacità** quando sono presenti altri conduttori (ovviamente non collegati al conduttore in questione) tenuti tutti a potenziale nullo.

Si verifica facilmente che la capacità di un conduttore isolato cresce quando gli avviciniamo altri conduttori tutti mantenuti a potenziale nullo. Questa proprietà viene sfruttata in dispositivi che prendono il nome di **condensatori**: un condensatore è un sistema di due conduttori affacciati (che prendono il nome di "armature") disposti in modo tale da "esaltare la loro interazione elettrostatica".

Si definisce allora **condensatore ideale** un sistema di due conduttori per il quale si abbia induzione completa di ciascun conduttore sull'altro. Naturalmente, come dice il nome stesso, il condensatore ideale non è realizzabile nella realtà; tuttavia viene approssimato abbastanza bene dai condensatori di uso tecnico ⁽⁶⁾.

Per un condensatore ideale, si ha che

$$C_{11} = -C_{21} = -C_{12} = C_{22} = C$$

Si usa dunque un unico coefficiente C , che è appunto la capacità del condensatore.

Riprendendo allora il sistema di equazioni lineari per i due conduttori (meglio parlare di "armature") possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}q_1 &= C_{11}V_1 + C_{12}V_2 = -C(V_2 - V_1) \\q_2 &= C_{21}V_1 + C_{22}V_2 = C(V_2 - V_1)\end{aligned}$$

Queste equazioni legano le cariche delle singole armature (che sono uguali ed opposte) alla differenza di potenziale tra le armature stesse, detta anche **differenza di potenziale** del condensatore. Naturalmente, in base al procedimento seguito, si suppone che eventuali altri corpi conduttori siano molto distanti.

L'unità di misura della capacità di un condensatore (in generale di due corpi conduttori) è il **farad**, pari al rapporto Coulomb/Volt.

Energia elettrostatica

L'energia immagazzinata in un condensatore di capacità C si calcola in base al lavoro che si compie per caricare il condensatore stesso. Supponiamo perciò che il condensatore sia sottoposto ad una tensione V : se vogliamo aumentare la sua carica di una quantità dq , dobbiamo compiere un lavoro pari, per definizione, a $dW = V \times dq$. Dato che $V = q/C$, tale lavoro è altresì uguale a

$$dW = \frac{1}{C} qdq$$

Il lavoro totale necessario per caricare completamente il condensatore da una carica iniziale 0 ad una carica finale Q vale allora

$$W = \int_0^Q dW = \int_0^Q \frac{1}{C} qdq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

⁶ In particolare è sufficiente che le armature del condensatore da realizzare abbiano grandi superfici affacciate e che siano poste a piccola distanza tra loro

Di conseguenza, l'energia immagazzinata in un condensatore carico è

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$$

Vediamo come è possibile interpretare questa energia. Supponiamo di avere uno spazio inizialmente vuoto (cioè privo di cariche) e supponiamo che ci siano N cariche portate dall'infinito in N punti specifici: se r_i è la distanza del generico punto P_i dall'origine del sistema di riferimento prescelto, la distanza tra i punti P_i e P_j sarà $R_{ij} = |r_i - r_j|$. Quando spostiamo la prima carica q_1 nel punto P_1 , non compiamo lavoro in quanto non c'è ancora alcun campo che contrasta la nostra azione e contro il quale dobbiamo spendere del lavoro; spostando invece la 2° carica q_2 , dobbiamo compiere un lavoro pari per definizione a

$$W_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon R_{12}}$$

dove R_{12} è la distanza del punto P_2 in cui abbiamo posto questa seconda carica dal punto P_1 .

In generale, l'energia spesa per portare la carica i -sima di valore q_i dall'infinito nel punto P_i con potenziale V_j dovuto alle $j=i-1$ cariche precedentemente spostate è

$$W_i = q_i V_j = \frac{q_i}{4\pi\epsilon} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{R_{ij}}$$

Possiamo allora calcolare il lavoro totale necessario per portare tutte le N cariche nelle N posizioni prestabilite: è ovvio che sarà

$$W = \sum_{i=1}^N W_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{R_{ij}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} q_i V_j \right)$$

(dove il termine $\frac{1}{2}$ è stato introdotto per non considerare due volte ciascuna coppia di cariche), dal che si deduce che l'energia elettrostatica può essere vista come l'energia necessaria per stabilire una data distribuzione di carica nello spazio.

Densità di energia

Il ragionamento fatto poco fa per un sistema discreto di cariche può essere ripetuto in modo analogo per un *sistema continuo di cariche*: è sufficiente utilizzare il concetto di **densità spaziale di carica** al posto di quello di carica puntiforme.

In particolare, al posto della carica q_i possiamo considerare la carica $\rho(r)d\tau$, ossia la carica distribuita nel volume $d\tau$ con densità spaziale $\rho(r)$; al posto della carica q_j possiamo considerare la carica $\rho(r_0)d\tau_0$, ossia la carica distribuita nel volume $d\tau_0$ con densità spaziale $\rho(r_0)$. Estendendo la somma di tali cariche ai volumi τ e τ_0 sufficientemente grandi da contenere tutte le cariche, possiamo scrivere che

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \int_{\tau_0} \frac{1}{R} \rho(r) d\tau \rho(r_0) d\tau_0$$

Ricordandoci adesso che il potenziale generato, in un punto a distanza r dall'origine, da un sistema continuo di cariche vale

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau_0} \frac{1}{R} \rho(r_0) d\tau_0$$

è immediato osservare che

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V d\tau$$

Inoltre, ricordando il teorema di Gauss $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$ e ricordando anche la relazione $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, si deduce che

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau} \text{div} \vec{D} V d\tau = \frac{1}{2} \int_S \nabla \vec{D} \cdot \vec{n} dS + \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$$

A questo punto, è facile capire perchè il primo tende a zero : la superficie S , per circondare tutte le cariche, deve tendere all'infinito; dato che V è proporzionale ad $1/r$ e D è proporzionale ad $1/r^2$, il prodotto $V \cdot D$ è proporzionale a $1/r^3$ e, se S tende all'infinito, esso tende all'infinito molto più rapidamente di dS , che invece è proporzionale a $1/r^2$.

Di conseguenza, abbiamo che

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$$

e questa, ricordando sempre che $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, può anche essere riscritta nella forma

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} \epsilon E^2 d\tau$$

In base a questa relazione, possiamo immaginare l'energia W come immagazzinata nel volume τ sotto forma di una **densità di energia** pari a

$$w = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

Autore: **Sandro Petrizzelli**

e-mail: sandry@iol.it

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>