

Appunti di Campi Elettromagnetici

Capitolo 2 – parte II

Magnetostatica

| | |
|---|-----------|
| <i>Il campo magnetico</i> | <i>2</i> |
| <i>La forza magnetica.....</i> | <i>2</i> |
| <i>Forza di Lorentz.....</i> | <i>3</i> |
| <i>Teorema di Gauss, in forma differenziale, per il campo magnetico</i> | <i>3</i> |
| <i>Proprietà magnetiche della materia.....</i> | <i>3</i> |
| <i>Legge di Faraday dell'induzione magnetica.....</i> | <i>5</i> |
| <i>L'esperienza del galvanometro balistico</i> | <i>6</i> |
| <i>La legge di Lenz.....</i> | <i>7</i> |
| <i>Induzione magnetica e induttanza</i> | <i>8</i> |
| <i>Il teorema di Ampere.....</i> | <i>8</i> |
| <i>Significato fisico del rotore del campo magnetico</i> | <i>9</i> |
| <i>Legge di Ampere per un elemento di corrente</i> | <i>10</i> |
| <i>Equazione di continuità per correnti stazionarie.....</i> | <i>11</i> |
| <i>Riepilogo della principali formule di elettrostatica e magnetostatica.....</i> | <i>12</i> |
| <i>Il potenziale vettore per il campo magnetico.....</i> | <i>14</i> |

Il campo magnetico

Mentre le cariche elettriche statiche producono un campo elettrico, le cariche elettriche in movimento, vale a dire le *correnti*, producono un **campo magnetico**. Il campo magnetico, che indicheremo nel seguito col simbolo \vec{H} , è evidenziato, per esempio, dalla forza che si manifesta sull'ago di una bussola: tale forza dipende proprio dalla intensità del campo magnetico, ossia dalla corrente che lo sostiene.

La forza magnetica

Le caratteristiche della forza magnetica che agisce su una carica puntiforme che si muove nei pressi di un magnete vengono dedotte facilmente per via sperimentale. Esse possono essere riassunte nel modo seguente:

- il modulo della forza è proporzionale al valore q della carica in moto;
- il modulo della forza è anche proporzionale al modulo della velocità del corpo in moto;
- la direzione della forza è sempre ortogonale alla direzione del moto (cioè della velocità) della carica puntiforme (il che implica sia che la forza non compia alcun lavoro sulla carica sia che non possa modificare il modulo della sua velocità);
- la direzione della forza è anche ortogonale ad una direzione \vec{b} legata esclusivamente al punto P in cui vengono effettuate le misurazioni;
- infine, il modulo della forza è proporzionale al seno dell'angolo formato dal vettore velocità con il vettore \vec{b} .

Perché possa rispondere a queste caratteristiche, la forza magnetica risulta avere la seguente espressione:

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

dove \vec{B} è il campo che esercita la forza, detto **campo di induzione magnetica**.

Per definire l'unità di misura del campo di induzione magnetica \vec{B} , basta osservare che, quando i vettori della velocità e di \vec{B} sono ortogonali tra loro, il modulo di \vec{B} è dato da

$$B = \frac{F}{qv}$$

Misurando allora la forza in Newton, la carica in Coulomb e la velocità in metri/secondo, si trova che il campo \vec{B} si misura in

$$\text{Newton} \times \text{sec} / \text{Coulomb} \times \text{metro} = \mathbf{Tesla}$$

Tuttavia, l'unità più spesso utilizzato per la misura di \vec{B} è il **Weber/metro²**: essa fa uso del Weber che, come vedremo, corrisponde all'unità di misura del flusso del campo \vec{B} .

Forza di Lorentz

Un importante principio sperimentale legato ai corpi carichi è il seguente: *quando un corpo carico si trova sotto l'effetto contemporaneo di un campo di induzione magnetica e di un campo elettrico, le forze che tali campi esercitano su di esso agiscono in accordo al principio di sovrapposizione, ossia non si modificano a vicenda.*

Questo principio, noto come **principio di sovrapposizione**, dice dunque che possiamo scrivere l'espressione della forza totale agente sul corpo nel modo seguente:

$$\vec{F}_{\text{TOT}} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Questa forza totale prende appunto il nome di **forza di Lorentz**.

Teorema di Gauss, in forma differenziale, per il campo magnetico

Il teorema di Gauss per il campo magnetico, espresso in forma differenziale, afferma quanto segue:

$$\text{div}\vec{H} = 0$$

Questa espressione dice che il campo magnetico è solenoidale, ossia non presenta sorgenti (al contrario del campo elettrico), e che le sue linee di forza sono linee chiuse.

Proprietà magnetiche della materia

Dato un corpo materiale immerso in un campo di induzione magnetica, esso “si magnetizza”, ossia ogni elemento di volume dV acquista un **momento magnetico** dato da

$$d\vec{\mu} = \vec{M}dV$$

A seguito della magnetizzazione, inoltre, il corpo crea attorno a se un campo di induzione magnetica del tutto simile a quello prodotto da un dipolo magnetico.

Il vettore \vec{M} prende il nome di **densità di magnetizzazione** ed è l'analogo della “polarizzazione” che riscontriamo in un dielettrico sottoposto ad un campo elettrico.

A prescindere dal fatto che il campo di induzione magnetica esterno sia uniforme o meno, la densità di magnetizzazione varia da punto a punto e dipende dalla particolare geometria del corpo.

Vogliamo adesso valutare il campo di induzione magnetica che viene prodotto da un mezzo magnetico che è stato magnetizzato: si dimostra che un corpo magnetizzato con densità di magnetizzazione variabile $\vec{M} = \vec{M}(\vec{r})$ equivale, agli effetti magnetici, ad una distribuzione spaziale di corrente con densità

$$\vec{J}_M = \text{rot}\vec{M}(\vec{r})$$

In altre parole, il campo di induzione magnetica prodotto dal mezzo magnetizzato è quello prodotto da una distribuzione spaziale di corrente $\vec{J}_M = \text{rot}\vec{M}(\vec{r})$.

Esaminiamo adesso il problema inverso: dato un corpo magnetizzabile, lo mettiamo in un campo di induzione magnetica \vec{B}_L (dove il pedice "L" sta ad indicare che questo campo è prodotto dalle "correnti libere" \vec{J}_L , ossia quelle sulle quali si ha un controllo diretto) e vogliamo valutare la sua densità di magnetizzazione. Si trova la seguente relazione:

$$\text{rot}\left[\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right] = \vec{J}_L$$

Tale relazione introduce evidentemente un campo vettoriale definito come

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

Tale campo, al contrario del campo di induzione magnetica totale \vec{B} , il quale dipende anche dalla magnetizzazione del mezzo, dipende esclusivamente dalle correnti libere.

Al campo \vec{H} si dà propriamente il nome di **campo magnetico**. Esso è legato al campo di induzione magnetica dalle seguente relazione:

$$\vec{B} = K\mu_0\vec{H}$$

La costante K prende il nome di **permeabilità del mezzo relativa al vuoto**. Quando siamo nel vuoto e non all'interno di un mezzo magnetizzabile, si ha che $K=1$, per cui

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} \quad (\text{nel vuoto})$$

La costante μ_0 prende invece il nome di **permeabilità del vuoto** e vale

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Weber/milliAmpere}$$

Per i mezzi materiali è inoltre definita la cosiddetta **permeabilità assoluta**, definita come

$$\mu = K\mu_0$$

Allora, la relazione generale che lega il campo di induzione magnetica ed il campo magnetico diventa

$$\boxed{\vec{B} = \mu\vec{H}}$$

Questa è la relazione generale che considereremo d'ora in poi, ricordando due cose:

- la prima è che, in generale, μ non è una costante scalare, ma è un tensore così come lo era ϵ nella relazione $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$;

- la seconda è che, quando siamo nello spazio vuoto, al posto di μ va indicato lo scalare μ_0 .

Legge di Faraday dell'induzione magnetica

Supponiamo di avere una spira chiusa sui morsetti di un amperometro: dato che non ci sono generatori nel circuito così costituito, è chiaro che in esso non circola alcuna corrente, per cui l'amperometro segna il valore zero. Ora proviamo a spingere un magnete verso la spira: ciò che si osserva è che, a partire dal momento in cui cominciamo a muovere il magnete, l'ago dell'amperometro si sposta, segnalando il passaggio di una corrente all'interno del circuito. Inoltre, non appena fermiamo il moto del magnete, l'ago dello strumento ritorna al valore zero. Se infine allontaniamo nuovamente il magnete dalla spira, osserviamo che l'ago si muove nuovamente, ma nella direzione opposta a prima, indicando cioè che circola nuovamente una corrente, ma in verso contrario al precedente.

Ripetendo più volte esperimenti di questo tipo, si ricava che l'intensità della corrente circolante nel circuito, indicata dall'amperometro, è tanto maggiore quanto maggiore è la velocità con cui il magnete si muove, sia in una direzione che nell'altra. In altre parole, ciò che conta non è la vicinanza del magnete, bensì il suo moto relativo rispetto alla spira. Tra l'altro, il termine "relativo" significa che otterremmo gli stessi risultati se facessimo muovere la spira mantenendo fermo il magnete.

La corrente che si sviluppa nel circuito a seguito del moto relativo del magnete prende il nome di **corrente indotta**. Come vedremo tra un attimo, a questa corrente è associabile una "*forza elettromotrice indotta*", alla quale si fa risalire la nascita della corrente stessa.

Facciamo un nuovo esperimento, analogo al precedente: prendiamo nuovamente la spira chiusa sui morsetti dell'amperometro; sistemiamo vicino ad essa una seconda spira, questa volta collegata ad un generatore mediante un interruttore; supponiamo di mantenere le due spire in posizioni fisse una rispetto all'altra. Supponiamo infine che, inizialmente, l'interruttore della seconda spira sia aperto, per cui il generatore è staccato: non ci sono dunque né correnti circolanti né movimenti relativi, per cui l'amperometro segna il valore zero. Adesso immaginiamo di chiudere l'interruttore, per cui nella seconda spira prende a circolare una corrente stazionaria, che indichiamo con I . Quello che si verifica è che, non appena chiudiamo l'interruttore, l'ago dell'amperometro si sposta per un momento e poi ritorna a zero. Questo è il primo risultato. Adesso riapriamo l'interruttore, in modo che nella seconda spira non circoli più alcuna corrente. Si verifica che l'ago dell'amperometro ha un nuovo spostamento istantaneo non appena l'interruttore viene aperto e poi torna a indicare lo zero.

Che cosa ci dice questo esperimento? Esso dice che nella prima spira, quella collegata all'amperometro, c'è circolazione di corrente indotta ogniqualvolta cambia la corrente nella seconda spira. In particolare, non conta di quanto cambi la corrente nella seconda spira, dato che l'amperometro ha segnalato valori non nulli sia aumentando sia diminuendo l'intensità di corrente nell'altra spira. Ciò che invece conta è la velocità con cui tale cambiamento è avvenuto.

Se confrontiamo questo esperimento con quello fatto all'inizio, osserviamo che l'unica cosa che li accomuna è il *moto* (primo esperimento) o la *variazione* (secondo esperimento). La causa della corrente indotta, e quindi della forza elettromotrice indotta, è il magnete che si muove nel primo esperimento oppure la corrente che varia nel secondo.

In generale, quindi, si deduce che *fenomeni elettrici come quelli osservati nella spira vengono prodotti come conseguenza della variazione del campo di induzione magnetica nella regione occupata dal circuito nel quale sono osservati*. Nel primo caso, la variazione del campo di induzione magnetica è dovuta al moto del magnete che lo produce; nel secondo caso, tale campo e le sue variazioni sono prodotti dalle corrispondenti variazioni della corrente nella seconda spira.

Esistono fondamentalmente tre possibili modi di produrre *variazioni del campo di induzione magnetica* presente nella regione occupata da un circuito elettrico:

- è possibile spostare il circuito all'interno della regione mantenendo costante il campo;
- è possibile mantenere fermo il circuito spostando le sorgenti del campo (come nel caso del magnete);
- è possibile infine far variare le correnti generatrici del campo, mantenendo sempre fermo il circuito (come nel caso della doppia spira).

In ogni caso, a prescindere dal modo con cui si ottiene la variazione del campo di induzione magnetica, l'effetto elettrico indotto risulta essere sempre lo stesso.

La **legge di Faraday** lega questi fenomeni, noti con il nome di **fenomeni di induzione elettromagnetica**, e dice in particolare quanto segue: *la variazione del numero di linee di forza del campo di induzione magnetica che attraversano il circuito (cioè il flusso concatenato al circuito) è la causa che induce nel circuito stesso una forza elettromotrice; tale forza è pari alla velocità con cui varia questo numero*.

Si può anche misurare sperimentalmente questa forza elettromotrice indotta: mentre la forza è attiva, cioè mentre si stanno producendo variazioni del flusso concatenato, basta interrompere il circuito in un tratto qualsiasi e misurare la d.d.p. tra gli estremi di tale tratto.

In termini quantitativi, indicati con ϕ il flusso del campo di induzione magnetica concatenato al circuito e con ε_i la forza elettromotrice indotta, la legge di Faraday prima enunciata dice che

$$\varepsilon_i = - \frac{d\phi}{dt}$$

Il significato del segno negativo sarà chiaro nel prossimo paragrafo. In ogni caso, esso indica che, quando il flusso aumenta nella direzione fissata come positiva nel riferimento utilizzato, la tensione indotta è negativa e viceversa

L'esperimento del galvanometro balistico

Un altro modo di evidenziare la presenza di induzione elettromagnetica è quello di utilizzare il cosiddetto **galvanometro balistico**.

Consideriamo un conduttore, di lunghezza sufficientemente lunga da ritenerla infinita, nel quale possiamo far scorrere della corrente; nei pressi di questo conduttore poniamo uno strumento che prende appunto il nome di "galvanometro balistico", il quale presenta una elevata impedenza interna R ed è specifico per la misura della quantità di carica.

Se facciamo in modo che nel conduttore il valore della corrente passi da zero ad un I non nullo, possiamo misurare la variazione di carica usando la definizione di corrente elettrica, ossia

$$Q = \int_0^t I(t) dt$$

Applicando poi la legge di Ohm, abbiamo anche che

$$Q = \frac{1}{R} \int_0^t v(t) dt$$

dove con $v(t)$ è la tensione ai capi della impedenza R del galvanometro. Questa è evidentemente una **tensione indotta**.

Si definisce **flusso magnetico**, indicandolo col simbolo Φ , l'integrale della tensione indotta $v(t)$ nella spira, esteso all'intervallo di tempo in cui la tensione stessa si stabilizza: in termini matematici, si ha che

$$\Phi = \pm \int_0^t v(t) dt$$

dove abbiamo in pratica supposto che $I(0)=0$ e che $I(t)=I$.

Se differenziamo quella relazione, otteniamo ancora una volta la **legge dell'induzione di Faraday**:

$$v = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

La legge di Lenz

Il verso della forza elettromotrice indotta e quello della variazione temporale del flusso che l'ha indotta sono del tutto legati in senso fisico. La legge che fornisce questo legame fisico è la cosiddetta **legge di Lenz**: *la forza elettromotrice indotta tende a far circolare nel circuito una corrente I ; tale corrente genera un campo di induzione magnetica B' che va ad aggiungersi al campo iniziale B (quello le cui variazioni ha prodotto ε_i); il campo B' è sempre tale da opporsi alla variazione del flusso di B .*

Vediamo bene cosa significa questa legge. Consideriamo il primo esperimento, quello del magnete che, muovendosi rispetto alla spira fissa, induceva in essa una forza elettromotrice. La legge di Lenz, in questo caso, si traduce in questo: se la forza elettromotrice è stata indotta dall'avvicinamento del magnete, il campo B' prodotto dalla corrente indotta si oppone a tale avvicinamento, respingendo perciò il magnete; viceversa, se la forza elettromotrice viene indotta dall'allontanamento del magnete, allora il campo B' è tale da attrarre il magnete verso la spira.

Possiamo interpretare lo stesso concetto dal punto di vista del flusso del campo totale di induzione magnetica concatenato alla spira: quando il magnete si avvicina, ovviamente il campo B da esso prodotto aumenta di intensità nei pressi della spira, per cui aumenta anche il flusso di B concatenato alla spira; dovendosi opporre a questo aumento di flusso, il campo B' sarà diretto in direzione opposta a B . Viceversa, quando il magnete viene allontanato, c'è una diminuzione del flusso di B concatenato alla spira, per cui B' sarà diretto come B al fine di compensare la diminuzione del flusso.

Induzione magnetica e induttanza

Abbiamo definito il **flusso magnetico** mediante la seguente relazione:

$$\Phi = \pm \int_0^t v(t) dt$$

dove $v(t)$ è la tensione magnetica indotta dalle variazioni temporali del flusso magnetico stesso. Il flusso magnetico per unità di superficie prende il nome di "densità di flusso magnetico" o più semplicemente **induzione magnetica**: lo si indica con \vec{B} e si tratta evidentemente di un vettore la cui direzione è quella della normale al piano della superficie considerata. L'unità di misura è il Weber/metro² oppure il Tesla, che sono anche le unità di misura del campo magnetico.

E' ovviamente possibile ricavare il flusso magnetico a partire dall'induzione magnetica:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

Si definisce **induttanza** di un circuito la costante di proporzionalità che lega la corrente I che scorre nel circuito ed il flusso magnetico ad essa associato: quindi

$$\Phi = LI$$

Il teorema di Ampere

Il **teorema di Ampere** è una legge sperimentale che fornisce il modo di calcolare il campo magnetico prodotto da un sistema di correnti continue.

Consideriamo il campo magnetico prodotto da una corrente I che scorre lungo un conduttore filiforme rettilineo: le linee del campo sono delle circonferenze (perciò linee chiuse), concentriche con il conduttore stesso, giacenti su piani ortogonali ad esso. Si trova che la circuitazione del campo magnetico, lungo una qualsiasi linea di campo, vale

$$C = \int_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

La relazione appena citata ci dice che la circuitazione del campo magnetico lungo una linea di forza non dipende in alcun modo dalla linea stessa, ossia è uguale per qualsiasi linea di campo.

Questo risultato, con opportune dimostrazioni, viene generalizzato mediante il cosiddetto **teorema di Ampere**: *la circuitazione del campo magnetico lungo un qualsiasi percorso chiuso è data dalla somma algebrica (cioè con relativi segni) delle correnti stazionarie circuitate (cioè contenute) dal cammino di integrazione.* In termini analitici, si ha perciò che

$$\boxed{\int_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I}$$

In parole povere, immaginiamo di avere un sistema di correnti stazionarie, ossia un insieme di conduttori attraverso i quali scorrono delle correnti stazionarie, dirette in qualsiasi senso; tali correnti generano un campo magnetico totale \vec{H} , dato dalla somma dei campi che ciascuna corrente genererebbe se fosse da sola (vale il principio di sovrapposizione); scelto allora un qualsiasi percorso chiuso, la circuitazione del campo lungo tale percorso si ottiene effettuando la somma algebrica di tutte quelle correnti, tra quelle del sistema, che sono contenute nel cammino in questione.

Dal punto di vista pratico, la suddetta somma algebrica delle correnti concatenate si calcola come flusso totale del vettore \vec{J} (densità di corrente) uscente da una arbitraria superficie S appoggiata al cammino di integrazione. In altre parole, la relazione matematica che rappresenta il teorema di Ampere è esprimibile come

$$\int_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$$

dove dS è un generico elementino della superficie S ed \vec{n} la sua normale, orientata in modo tale che un osservatore orientato come n veda il verso positivo fissato per il cammino come verso antiorario.

Si noti che il teorema di Ampere si può applicare solo a **correnti stazionarie** in quanto, solo sotto questa ipotesi, la superficie S scelta può essere qualsiasi.

L'ultima relazione che abbiamo riportato è dunque il teorema di Ampere in forma integrale; lo possiamo anche esprimere in forma differenziale facendo uso del *teorema di Stokes*: si ha che

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

Significato fisico del rotore del campo magnetico

Il teorema di Ampere in forma differenziale consente di dare un significato fisico al **rotore del campo magnetico**. Infatti, integrando il suddetto rotore su una generica superficie S , possiamo scrivere che

$$\int_S \text{rot} \vec{H} \cdot \vec{n} dS = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$$

La quantità a secondo membro rappresenta nient'altro che la corrente I che fluisce attraverso la superficie S e quindi, in base al teorema di Ampere in forma integrale, è pari alla circuitazione del campo magnetico:

$$\int_S \text{rot} \vec{H} \cdot \vec{n} dS = \oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

Del resto, se la superficie S si riduce all'area elementare dS , abbiamo che

$$\text{rot} \vec{H} \cdot \vec{n} dS = \oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

Dividendo, infine, ambo i membri per dS , otteniamo

$$\text{rot}\vec{H} \cdot \vec{n} = \frac{1}{dS} \oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

Il secondo membro, sempre in base al teorema di Ampere, è la **forza magnetomotrice** per unità di superficie: questa relazione ci dice dunque che essa ampiezza pari al modulo del rotore del campo magnetico e direzione coincidente con quella della normale della superficie dS che risulta in un massimo della forza magnetomotrice lungo il suo contorno.

Legge di Ampere per un elemento di corrente

Abbiamo detto che le sorgenti dei campi magnetici sono le correnti elettriche, ossia le cariche in movimento. Allora, in presenza di una corrente lineare, possiamo valutare il campo magnetico da essa prodotto come somma dei contributi degli elementi di linea $d\ell$ attraversati dalla corrente I . Il contributo al campo magnetico da parte di un elemento di corrente $I d\vec{\ell}$ (dove il simbolo di vettore fornisce il verso della corrente) è dato, in modulo, dalla relazione

$$dH = \frac{1}{4\pi R^2} I d\ell \sin\theta$$

In questa formula, R è la distanza dell'elementino di corrente $d\ell$ (punto sorgente) dal punto P (punto di osservazione) in cui si sta valutando il campo, θ è l'angolo compreso tra la direzione individuata da $I d\vec{\ell}$ e quella della congiungente $I d\vec{\ell}$ con P .

In termini vettoriali, quella relazione si può scrivere

$$\boxed{d\vec{H} = \frac{I}{4\pi R^2} d\vec{\ell} \wedge \vec{a}_R}$$

da cui si deduce che la direzione di $d\vec{H}$ è ortogonale al piano contenente $I d\vec{\ell}$ e \vec{a}_R (che è il versore di R), mentre il verso di $d\vec{H}$ si ottiene con la regola della mano destra (ossia il verso dell'avanzamento di un vite destrorsa che ruota da $I d\vec{\ell}$ ad \vec{a}_R).

La relazione ottenuta prende il nome di **legge di Ampere per un elemento di corrente** o anche **legge di Biot-Savart**.

Naturalmente, per ottenere il campo magnetico totale prodotto dalla corrente nel punto P dobbiamo sommare tutti i contributi $d\vec{H}$, ossia dobbiamo integrare su tutto il circuito:

$$\vec{H} = \oint_L d\vec{H} = \oint_L \frac{I}{4\pi R^2} d\vec{\ell} \wedge \vec{a}_R = \frac{1}{4\pi} \oint_L \frac{I}{R^2} d\vec{\ell} \wedge \vec{a}_R$$

Per concludere, facciamo notare l'analogia della legge di Biot-Savart con la legge di Coulomb: infatti, quest'ultima dice che il contributo infinitesimo $d\vec{E}$ al campo elettrico di un elemento di carica ρdV di una distribuzione generica vale

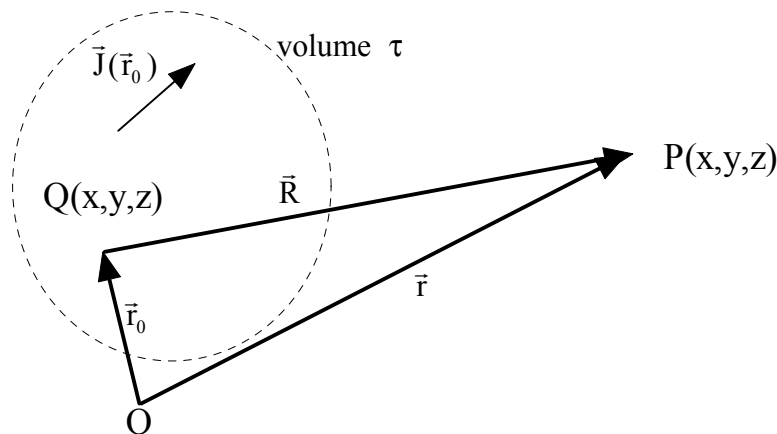
$$d\vec{E} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 r^2} \delta dV \frac{\vec{r}}{r}$$

Equazione di continuità per correnti stazionarie

La legge di Biot-Savart fornisce il valore del campo magnetico prodotto da una corrente lineare:

$$\vec{H}(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \oint_L \frac{I}{R^2} d\vec{\ell} \wedge \vec{a}_R$$

Il caso più generale, però, è quello per cui la corrente elettrica scorre in un volume τ con densità di corrente superficiale generica, che possiamo indicare con $\vec{J}(\vec{r}_0)$:



Il campo magnetico $\vec{H}(\vec{r})$ prodotto in un punto P (individuato dal vettore \vec{r} rispetto al riferimento) da una corrente presente in un punto \vec{r}_0 sarà data dalla relazione

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{1}{R^2} \vec{J}(\vec{r}_0) \wedge \vec{a}_R d\tau_0$$

Se la corrente $\vec{J}(\vec{r}_0)$ è filamentare, possiamo utilizzare, per rappresentarla, la funzione *impulso di Dirac*: infatti, se la corrente totale di intensità I (misurata in Ampere) fluisce lungo la direzione z, possiamo esprimerla come

$$\vec{J}(\vec{r}_0) = I\delta(x_0)\delta(y_0)\vec{a}_z$$

Se, invece, la corrente costituisce una corrente di raggio a nel piano (x,y) , possiamo esprimerla, in coordinate cilindriche, nella forma

$$\vec{J}(\vec{r}_0) = I\delta(z_0)\delta(\rho_0 - a)\vec{a}_\varphi$$

Questa rappresentazione di corrente soddisfa la relazione esistente tra corrente e densità di corrente, ossia il fatto per cui, data una superficie S aperta, la corrente che fluisce attraverso essa è valutabile come flusso di \vec{J} attraverso S stessa: in formule, si ha cioè che

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$$

Nel caso in cui la superficie S sia chiusa, a conservazione della carica richiede che la corrente stazionaria netta attraverso la superficie sia nulla: deve cioè accadere

$$\int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Trasformando adesso quell'integrale di superficie in un integrale di volume, mediante il teorema della divergenza, possiamo scrivere

$$\int_\tau \text{div} \vec{J} d\tau = 0$$

dove ovviamente τ è il volume racchiuso da S .

Perché sia nullo quell'integrale, deve essere nulla la funzione integranda, per cui deduciamo che risulta

$$\boxed{\text{div} \vec{J} = 0}$$

Questa equazione è frequentemente chiamata **equazione di continuità per correnti stazionarie**.

Riepilogo della principali formule di elettrostatica e magnetostatica

E' opportuno, a questo punto, fare un rapido riepilogo delle principali relazioni, sia integrali sia differenziali, che abbiamo introdotto per caratterizzare il campo elettrico, il campo magnetico e i loro rispettivi "campi ausiliari".

Per il campo elettrico abbiamo trovato la relazione integrale in base alla quale la circuitazione del campo elettrico lungo una qualsiasi linea chiusa è sempre nulla:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

In termini differenziali, questa relazione equivale a

$$\text{rot} \vec{E} = 0$$

e si dice perciò che il campo elettrico è “irrotazionale”.

Un vettore che invece non ha circuitazione nulla lungo una generica linea chiusa è il vettore densità di spostamento elettrico \vec{D} , per il quale vale infatti la relazione

$$\oint_{\Gamma} \vec{D} \cdot d\vec{l} = \int_{\tau} \rho d\tau$$

In forma differenziale, essa equivale a

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

Passando ora al campo magnetico, il teorema di Ampere (valido per correnti stazionarie) ci dice che

$$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$$

Questa stessa relazione, scritta in forma differenziale, diventa

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

Sempre per il campo magnetico, abbiamo anche trovato che

$$\text{div} \vec{H} = 0$$

Questa relazione dice che il campo magnetico è solenoidale, le cui linee di campo sono cioè sempre chiuse.

Naturalmente, se è solenoidale il campo magnetico, nell'ipotesi di essere in condizioni per cui vale la relazione $\vec{B} = \mu \vec{H}$ con μ scalare, sarà anche solenoidale il campo di induzione magnetica, ossia varrà la relazione

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

In forma integrale, quest'ultima relazione diventa

$$\int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Infine, per le correnti stazionarie sussiste l'equazione di continuità, che in forma differenziale si esprime nel modo seguente:

$$\text{div} \vec{J} = 0$$

In forma integrale, invece, la stessa relazione diventa

$$\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Il potenziale vettore per il campo magnetico

Facciamo adesso un rapido riepilogo dei concetti studiati in elettrostatica.

Intanto, lo studio dell'elettrostatica si basa fundamentalmente su due equazioni differenziali: la prima è il teorema di Gauss, secondo cui

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

dove ρ è la densità spaziale di carica.

La seconda relazione è quella che ci dice che il campo elettrico è conservativo:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0$$

Il fatto che il campo elettrico sia conservativo ci ha permesso l'introduzione della cosiddetta funzione "*potenziale elettrostatico*": possiamo infatti trovare una particolare funzione scalare $V(\vec{r})$ tale che, in ogni punto dello spazio sede di un campo elettrico $\vec{E}(\vec{r})$, il valore di tale campo sia ottenibile dalla relazione

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}V(\vec{r})$$

Vale la regola generale secondo cui un qualsiasi campo vettoriale, derivato da un campo scalare in questo modo, risulti irrotazionale: infatti si ha che

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{rot}(-\operatorname{grad}V) = -\operatorname{rot}(\operatorname{grad}V) = 0$$

La scelta della funzione scalare $V(\vec{r})$ dalla quale derivate il campo elettrico non è univoca: infatti, è facile verificare che, se la funzione scalare $V(\vec{r})$ soddisfa all'equazione $\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}V(\vec{r})$, anche la funzione $V'(\vec{r}) = V(\vec{r}) + \text{cost}$ soddisfa alla stessa relazione. Questo significa che un qualsiasi campo elettrico, a meno di ulteriori considerazioni, può essere derivato da un numero infinito di potenziali scalari.

Per rendere invece univoca la scelta del potenziale da cui derivare il campo, basta attribuire un valore arbitrario (scelto nel modo più comodo possibile) alla costante *cost*. Ad esempio, sappiamo che in tutti i casi in cui non ci sono cariche all'infinito, è possibile porre uguale a zero il valore di tale costante, il che significa assumere nullo il potenziale dei punti situati all'infinito.

Il fatto che il campo elettrico sia legato alla funzione potenziale dalla relazione $\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}V(\vec{r})$ consente di legare direttamente il potenziale $V(\vec{r})$ alla distribuzione di cariche che generano il campo (tra l'altro, il fatto che il potenziale sia scalare deriva dal fatto che sono scalari le cariche). Il legame è rappresentato dalla **equazione di Poisson**:

$$\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Questa equazione esprime appunto il legame tra il potenziale associato al campo e la distribuzione di cariche che generano il campo stesso.

Un caso particolare di questa equazione si ha quando non c'è alcuna distribuzione di carica a generare alcun campo: infatti, quando si verifica la condizione $\rho=0$, l'equazione di Poisson diventa semplicemente

$$\nabla^2 V = 0$$

Questa prende il nome di **equazione di Laplace**. Essa impone come deve variare il potenziale scalare in ogni punto dello spazio vuoto, cioè privo di cariche.

Ancora riguardo il potenziale scalare, abbiamo visto che, data una distribuzione spaziale arbitraria di carica con densità ρ , il potenziale $V(\vec{r})$ da essa generato in un punto P a distanza r si ottiene sommando i contributi dovuti all'intera distribuzione:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{1}{r} \rho(\vec{r}) d\tau$$

Questa relazione vale a meno di una costante arbitraria che può essere posta uguale a zero se la distribuzione di cariche è al finito.

Abbiamo infine visto che la funzione $V(\vec{r})$ così ottenuta è proprio la soluzione generale della equazione di Poisson.

Detto questo, quello che ci accingiamo a fare è ricavare anche per il campo magnetico una funzione che svolga lo stesso ruolo del potenziale scalare per il campo elettrico.

In primo luogo, le equazioni fondamentali finora viste della magnetostatica sono due: la prima è il teorema di Gauss per l'elettromagnetismo e dice che il campo magnetico è solenoidale, cioè

$$\text{div}\vec{H} = 0$$

La seconda relazione è il teorema di Ampere in forma differenziale:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J}$$

dove \vec{J} è la densità di corrente (stazionaria).

Una immediata considerazione, rispetto al campo elettrico, è la seguente: il campo magnetico (salvo nel caso particolare di spazio vuoto privo di correnti) non è irrotazionale, cioè non è conservativo. Questo impedisce di derivare il campo magnetico da un campo scalare come invece abbiamo fatto per il campo elettrico. Tuttavia, il fatto che il campo magnetico sia solenoidale ci permette di derivare questo stesso campo da un altro campo, questa volta vettoriale.

Per fare questo, anziché usare il campo magnetico, usiamo il campo di induzione magnetica: indicato con \vec{A} il campo vettoriale da cui vogliamo ottenere \vec{B} (e quindi \vec{H}), possiamo verificare facilmente che, se il campo \vec{B} ed il campo \vec{A} sono legati dalla relazione $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, allora il campo magnetico continua ad essere solenoidale.

La verifica di questo fatto è immediata:

$$\text{div}\vec{B} = \text{div}(\text{rot}\vec{A}) = 0$$

Quindi, nella magnetostatica, ad un certo campo di induzione magnetica \vec{B} (e, quindi, ad un certo campo magnetico \vec{H}) è sempre possibile associare un campo vettoriale \vec{A} al quale è legato dalla relazione

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$$

Naturalmente, se facciamo uso di un riferimento cartesiano e ricordiamo l'espressione delle componenti del rotazionale di un vettore in tale riferimento, è immediato calcolarsi le relazioni scalari che legano le componenti di \vec{B} a quelle di \vec{A} :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

In perfetta analogia con l'elettrostatica, dove parlavamo di "potenziale scalare", la funzione vettoriale $\vec{A}(\vec{r})$ prende il nome di **potenziale vettore**. Il fatto che si tratti di una quantità vettoriale è legato fondamentalmente al fatto che sono dei vettori anche le sorgenti del campo magnetico, ossia le cariche in movimento, ossia le correnti.

Anche il potenziale vettore, a meno di ulteriori specifiche, non è univoco per un assegnato campo: infatti, se la funzione $\vec{A}(\vec{r})$ soddisfa alla relazione $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, è facile verificare che anche la funzione $\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \text{grad}(g(\vec{r}))$, con $g(\vec{r})$ arbitraria funzione scalare, soddisfa alla stessa relazione.

Quindi, senza ulteriori specifiche, ad un dato campo di induzione magnetica è possibile associare infiniti potenziali vettori. Per rendere invece univoca la scelta del potenziale vettore bisogna imporre una seconda condizione cui esso deve soddisfare, oltre quella espressa dalla solita relazione $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$. La condizione che viene imposta è che anche il potenziale vettore, come il campo di induzione magnetica ed il campo magnetico, sia solenoidale, cioè che soddisfi in ogni punto alla relazione $\text{div}\vec{A} = 0$.

Riepilogando, dato un qualsiasi campo di induzione magnetica \vec{B} , è possibile associare a tale campo uno ed un solo campo vettoriale \vec{A} tale che

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{B} = \text{rot}\vec{A} \\ \text{div}\vec{A} = 0 \end{array}}$$

Ancora, così come in elettrostatica avevamo legato il potenziale scalare alla distribuzione di cariche generatrici del campo, allo stesso modo vogliamo adesso legare il potenziale vettore al sistema di correnti che generano \vec{B} .

In base al teorema di Ampere abbiamo che $\text{rot}\vec{H} = \vec{J}$, ossia anche $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{J}$. Sostituendo $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, otteniamo

$$\text{rot}\vec{B} = \text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \text{grad}(\text{div}\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J}$$

Poiché la divergenza del potenziale vettore è nulla, possiamo ottenere la relazione finale

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$$

Appare evidente come questa equazione sia, per il magnetismo, l'analogo dell'equazione di Poisson per l'elettrostatica: rispetto ad essa, il potenziale scalare V è stato sostituito dal potenziale vettore \vec{A} , il reciproco della costante dielettrica del vuoto ϵ_0 è stato sostituito dalla permeabilità del vuoto μ_0 , la densità spaziale di carica ρ è stata sostituita dal densità di corrente (stazionaria) \vec{J} .

Proprio l'analogia con l'equazione di Poisson ci permette di dare immediatamente una soluzione all'equazione ottenuta. Intanto, osserviamo che quella ottenuta è una equazione vettoriale che equivale a tre equazioni scalari (se usiamo un riferimento cartesiano):

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

Ora, ciascuna di queste equazioni (scalari) è del tutto analoga all'equazione di Poisson: la soluzione di quest'ultima era la funzione $V(\mathbf{r})$ data da

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{1}{r} \rho(\mathbf{r}) d\tau$$

Analogamente, la soluzione di una qualsiasi delle tre equazioni ottenute, ad esempio quella lungo l'asse x , sarà

$$A_x(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{1}{r} J_x d\tau$$

Le tre soluzioni scalari possono ovviamente essere sintetizzate in un'unica relazione vettoriale:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{1}{r} \vec{J}(\vec{r}_0) d\tau}$$

Questa è dunque una relazione che permette di determinare il potenziale vettore a partire dalla distribuzione delle correnti. Spesso, per determinare il campo magnetico prodotto da un sistema di correnti, conviene prima determinare il potenziale vettore tramite questa formula, poi passare a \vec{B} tramite la relazione $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ ed infine passare al campo magnetico mediante la relazione $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$.

Autore: Sandro Petrizzelli

e-mail: sandry@iol.it

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>