

Appunti di Campi Elettromagnetici

Capitolo 8 – parte I

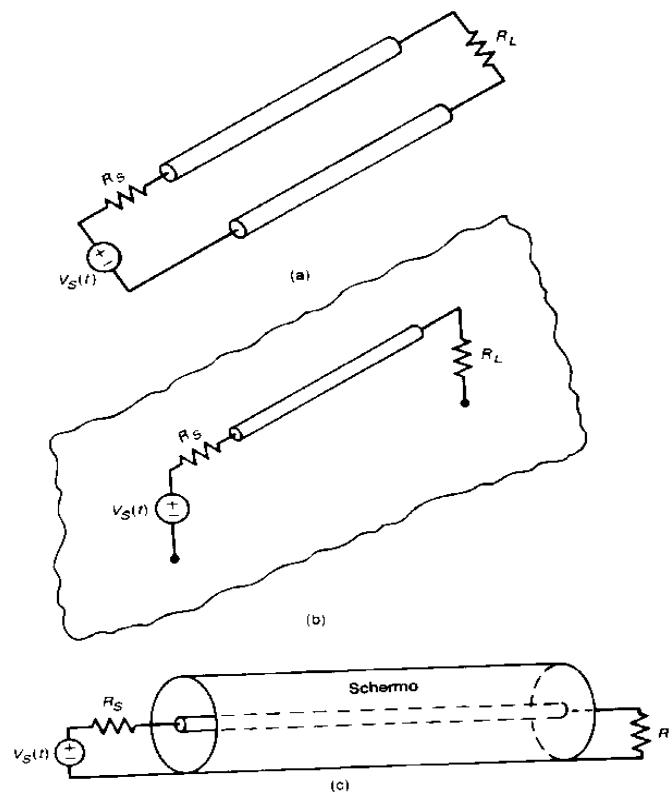
Linee di trasmissione

<i>Introduzione</i>	2
<i>Equazioni dei telegrafisti</i>	3
Parametri per unità di lunghezza	7
<i>Soluzione nel dominio della frequenza</i>	7
Risoluzione delle equazioni dei telegrafisti	8
Osservazione: tensione e corrente nel dominio del tempo	11
<i>Impedenza caratteristica della linea</i>	13
<i>Condizioni al contorno</i>	14
<i>Caso particolare: assenza di perdite ($\alpha=0$)</i>	15
<i>Impedenza di ingresso</i>	16
Caso particolare: perdite nulle.....	17
Osservazione: applicazione della matrice ABCD	18
Valore esatto della costante di propagazione γ in assenza di perdite	19
<i>Caso particolare: Condizione di Heavyside</i>	20
<i>Caso particolare: carico costituito da cortocircuito</i>	21
<i>Caso particolare: carico costituito da un circuito aperto</i>	21
<i>Diagrammi della tensione e della corrente in assenza di perdite</i>	23
1° caso: carico costituito da un cortocircuito	23
2° caso: carico costituito da un circuito aperto	24
3° caso: carico adattato.....	24
<i>Valutazione analitica dei diagrammi di tensione e corrente</i>	26
<i>Rapporto d'onda stazionario</i>	28
<i>Diagrammi dell'impedenza di ingresso</i>	29
<i>Linea di lunghezza $l/4$ come invertitore di impedenza</i>	32
Osservazione	34
<i>Coefficiente di riflessione sul carico</i>	35
Coefficiente di trasmissione sul carico.....	36
Osservazione	39

Introduzione

Una **linea di trasmissione** è semplicemente un sistema formato da due o più conduttori paralleli ravvicinati. In questo capitolo ci occupiamo specificamente del caso in cui i conduttori sono solo due.

Alcuni esempi tipici, e allo stesso tempo semplici, di linee di trasmissione formate da due conduttori sono illustrati nella figura seguente:



Nella figura (a) è rappresentata una semplice **linea di trasmissione a due fili paralleli**, in cui i due conduttori sono cilindrici con sezione circolare.

In tutti i casi, l'alimentazione della linea è costituita da una **sorgente** rappresentabile tramite il suo equivalente di Thevenin: essa è perciò modellata tramite una tensione di circuito aperto $V_S(t)$ in serie ad una resistenza R_S . Questa alimentazione è connessa, mediante i conduttori della linea, ad un **carico** di resistenza R_L .

Un altro esempio di linea di trasmissione a due fili è quello della figura (b), in cui è presente un solo conduttore cilindrico, mentre l'altro è stato sostituito da un **piano di massa** (ovviamente metallico) di dimensioni idealmente infinite. Tale piano di massa svolge perciò la funzione di **conduttore di ritorno** per il segnale, il quale, partendo dalla sorgente, raggiunge il carico tramite il conduttore cilindrico (**conduttore di andata**).

Un altro caso ancora è quello della figura (c), in cui è riportato il classico **cavo coassiale** (ad esempio utilizzato per la connettere il televisore alla presa TV domestica). In questo caso, uno schermo cilindrico a sezione circolare (la cosiddetta **calza**) racchiude un conduttore (detto **cuore**) che è localizzato lungo l'asse dello schermo: il cuore funge da conduttore di andata per il segnale, mentre la calza funge da conduttore di ritorno.

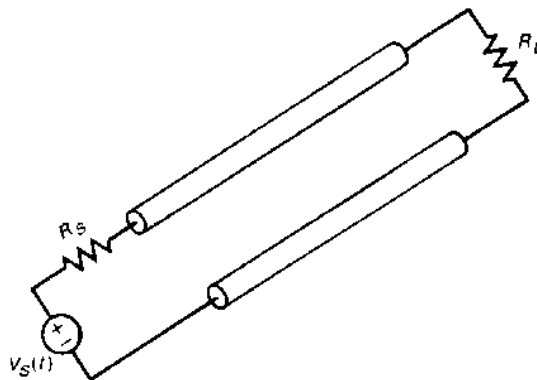
Equazioni dei telegrafisti

Il problema generale dell'analisi delle linee di trasmissione a due conduttori consiste nel determinare, in tutti i punti della linea, le correnti nei conduttori e le tensioni tra i conduttori. In particolare, ciò che ha più importanza è la valutazione di tali correnti e tensioni in corrispondenza della sorgente ed in corrispondenza del carico, ossia agli estremi della linea propriamente detta.

Esistono diversi metodi per affrontare questo problema e possono essere raggruppati sostanzialmente in due gruppi: quelli basati sulla **teoria delle reti elettriche** e quelli che derivano dalla **teoria dell'elettromagnetismo**. Noi seguiamo un comune metodo derivato dalla teoria delle reti elettriche.

Nel seguito considereremo solo linee di trasmissione "uniformi": una linea di trasmissione è **uniforme** quando la geometria della sezione trasversale (intesa cioè come la sezione trasversale sia dei conduttori sia del dielettrico) rimane invariata in ogni punto della linea stessa.

Per poter ricavare le equazioni della generica linea di trasmissione a due conduttori, supponiamo di orientare i conduttori stessi lungo l'asse z di un sistema di coordinate cartesiane. Dato che non intendiamo fare una analisi di tipo elettromagnetico, la natura della linea può essere qualunque, nel senso che potrà trattarsi di un cavo coassiale, di una linea bifilare e così via. Tanto per fissare le idee, possiamo pensare di riferirci ad una linea bifilare del tipo riportato nella figura seguente, anche se i risultati che otterremo saranno del tutto generali, validi per qualsiasi caso:

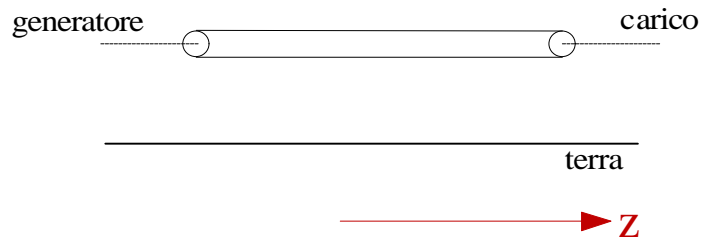


L'asse z è dunque quello parallelo ai due conduttori, per cui gli assi x ed y definiscono un piano ortogonale (trasversale) ai conduttori stessi.

Facciamo per il momento l'ipotesi che la linea sia infinitamente estesa: questo garantisce che non nascano perturbazioni sui campi dovute agli estremi della linea stessa.

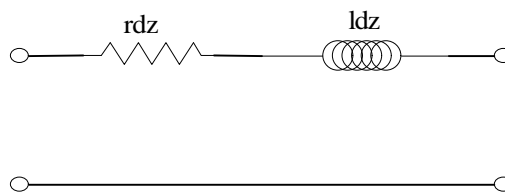
Il generatore applica una certa tensione ad un capo della linea e questa tensione si propaga lungo la linea fino a giungere al carico. Vogliamo allora stabilire in che modo si propaghi tale tensione e, ovviamente, in che modo si propaghi la corrente elettrica che da essa deriva.

Dato che la propagazione avviene dal generatore verso il carico, stabiliamo (per il momento) come **direzione di riferimento** quella parallela alla linea e orientata in direzione del carico stesso:

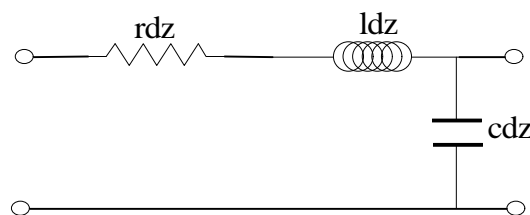


Ai fini della nostra analisi, consideriamo un *tratto infinitesimo* della linea e supponiamo che esso abbia lunghezza dz . Proviamo a costruire un modello circuitale di questo tratto infinitesimo di linea: sappiamo intanto che la linea di trasmissione, essendo costituita di materiali conduttori, è caratterizzata da una certa resistenza e da una certa induttanza; allora, se indichiamo con r la **resistenza per unità di lunghezza** e con l l'**induttanza per unità di lunghezza**, è chiaro che il nostro tratto di linea dz sarà caratterizzato da una resistenza $R=r \cdot dz$ e da una induttanza $L=l \cdot dz$.

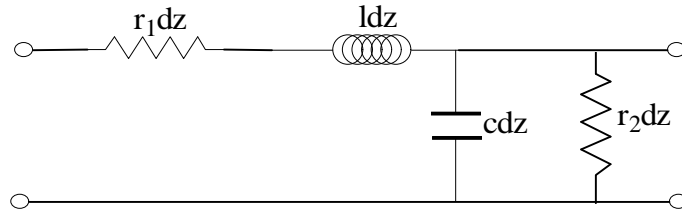
Possiamo allora cominciare a rappresentarlo nel modo seguente:



La resistenza e l'induttanza sono due parametri che tengono conto dei cosiddetti *effetti longitudinali* nella linea. Ci sono però anche i cosiddetti *effetti trasversali*, dovuti al fatto che la linea corre in parallelo alla terra, sviluppando perciò degli effetti capacitivi: indicata allora con c la **capacità per unità di lunghezza** della linea, il tratto dz sarà caratterizzato anche da una capacità $C=c \cdot dz$. Il modello circuitale si perfeziona perciò nel modo seguente:

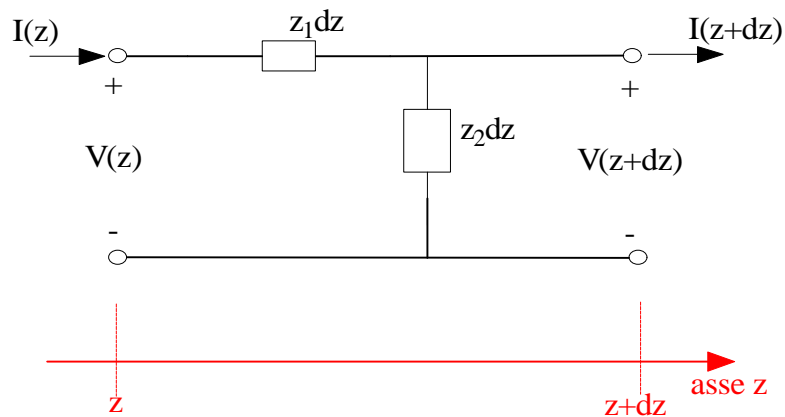


La capacità appena inserita è valida, del resto, solo nel caso in cui il dielettrico compreso tra la linea e la terra presenti conducibilità nulla; al contrario, ci sono varie ragioni che invece rendono questa conducibilità non nulla. Per tenerne conto, ci basta inserire in parallelo alla capacità una nuova resistenza $R=rdz$. Tuttavia, per distinguere questa resistenza da quella considerata prima, usiamo i pedici "1" e "2" come nella figura seguente:



Questo è dunque il modello circuitale equivalente attraverso il quale intendiamo descrivere la propagazione dell'onda di tensione e dell'onda di corrente attraverso l'elemento infinitesimo dz della linea di trasmissione considerata. La nostra linea di trasmissione sarà costituita da una cascata di circuiti di questo tipo e terminata ad un estremo dalla sorgente (generatore di tensione in serie ad una resistenza) ed all'altro dal carico (resistenza).

Notiamo una cosa: fino ad ora, non abbiamo ancora fatto alcuna ipotesi sul tipo di segnale che va ad eccitare la linea di trasmissione, per cui non possiamo dire niente circa il regime di corrente e di tensione che si instaura lungo la linea. Vedremo invece che risulta di notevole interesse il caso in cui l'eccitazione sia di tipo **sinusoidale isofrequenziale**: in questo caso, infatti, una volta raggiunta una condizione di regime (cioè una volta esauriti tutti i possibili fenomeni transitori), le correnti e le tensioni sono a loro volta di tipo sinusoidale. In questa condizione di funzionamento, i quattro elementi circuitali introdotti poco fa possono essere sostituiti con le rispettive impedenze, il che consente di semplificare la serie ed il parallelo che si creano e di ricondursi quindi ad un nostro modello finale del tipo seguente:



Abbiamo ovviamente considerato le seguenti impedenze:

$$\dot{z}_1 = (r_1 + j\omega l)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{\dot{y}_2} = \frac{1}{(r_2 + j\omega c)}$$

Per condurre l'analisi preliminare del modello ottenuto, mettiamoci per il momento nel caso di un regime generico, non necessariamente sinusoidale.

Notiamo che il modello circuitale cui siamo pervenuti è quello di un classico doppio bipolo. Indichiamo allora con $\mathbf{V}(\mathbf{z}, \mathbf{t})$ ed $\mathbf{I}(\mathbf{z}, \mathbf{t})$ la tensione e la corrente alla porta di ingresso (cioè in corrispondenza della generica sezione z) e con $\mathbf{V}(\mathbf{z}, +d\mathbf{z}, \mathbf{t})$ e $\mathbf{I}(\mathbf{z}, +d\mathbf{z}, \mathbf{t})$ la tensione e la corrente alla porta di uscita (cioè in corrispondenza della sezione $z+dz$). Entrambe queste coppie (tensione, corrente) sono funzioni sia dello

spazio (che, per ragioni di simmetria, è "rappresentato" solo dalla coordinata z) sia del tempo.

Il nostro scopo è quello di trovare le equazioni che legano le tensioni e le correnti in corrispondenza delle sezioni z e $z+dz$. A causa della distanza fisica tra le due porte ⁽¹⁾, sia la tensione sia la corrente subiranno delle variazioni nel passaggio da una tensione all'altra. Applicando banalmente le leggi di Kirchoff, otteniamo quanto segue:

$$V(z+dz, t) - V(z, t) = -r_1 \cdot dz \cdot I(z, t) - l \cdot dz \cdot \frac{\partial}{\partial t} I(z, t)$$

$$I(z+dz, t) - I(z, t) = -g_2 \cdot dz \cdot V(z+dz, t) - c \cdot dz \cdot \frac{\partial}{\partial t} V(z+dz, t)$$

La prima equazione rappresenta la differenza tra la tensione in uscita e quella in ingresso, così come la seconda equazione rappresenta la differenza tra la corrente in uscita e quella in ingresso.

Affinché questo modello circuitale a parametri concentrati sia valido, occorre che la lunghezza dz sia elettricamente corta rispetto alla lunghezza d'onda ⁽²⁾. Dobbiamo allora supporre che sia $dz \rightarrow 0$.

Prima ancora di fare questa ipotesi, riscriviamo le ultime due equazioni nel modo seguente, in cui dividiamo primo e secondo membro per dz :

$$\frac{V(z+dz, t) - V(z, t)}{dz} = -r_1 \cdot I(z, t) - l \cdot \frac{\partial}{\partial t} I(z, t)$$

$$\frac{I(z+dz, t) - I(z, t)}{dz} = -g_2 \cdot V(z+dz, t) - c \cdot \frac{\partial}{\partial t} V(z+dz, t)$$

A questo punto, possiamo calcolare il limite per $dz \rightarrow 0$ di entrambi i membri di entrambe le equazioni: ai primi membri otteniamo due derivate (limiti dei rispettivi rapporti incrementali), mentre al secondo membro le tensioni e le correnti alla sezione z tendono a coincidere con quelle alla sezione $z+dz$. Quindi

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} V(z, t) &= -r_1 \cdot I(z, t) - l \cdot \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) \\ \frac{\partial}{\partial z} I(z, t) &= -g_2 \cdot V(z, t) - c \cdot \frac{\partial}{\partial t} V(z, t) \end{aligned}}$$

Queste sono le **equazioni delle linee di trasmissione**. si tratta di un *sistema accoppiato di equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine*.

Tali equazioni sono del tutto generali. Tuttavia, spesso è utile far riferimento ad un caso particolare, relativo alle **linee di trasmissione senza perdite**: sono tali quelle linee in cui non ci sono perdite di potenza né all'interno dei conduttori (quindi $\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$) né all'interno del dielettrico di separazione (quindi $\mathbf{r}_2 = \infty$) ⁽³⁾. La ragione principale che conduce all'ipotesi di linea di trasmissione senza perdite è dovuta al

¹ Ricordiamo che stiamo facendo l'ipotesi di un *modello elettrico a parametri distribuiti*

² Ovviamente, stiamo facendo implicitamente l'ipotesi che l'eccitazione della linea sia comunque di tipo periodico, ossia ottenuta come una sovrapposizione di sinusoidi a varie frequenze. Di conseguenza, per stabilire la lunghezza elettrica della linea, si deve far riferimento alla lunghezza d'onda minore, ossia quella associata alla più alta frequenza di utilizzo del modello: infatti, se la linea risulta elettricamente corta rispetto alla lunghezza d'onda più piccola, lo sarà sicuramente anche rispetto alle lunghezze d'onda maggiori (quelle cioè associate a frequenze più basse).

³ In pratica, i conduttori si suppongono a conduttività infinita, mentre il dielettrico si suppone a conduttività nulla.

fatto che essa permette di ottenere ragionevoli approssimazioni dei risultati esatti e, allo stesso tempo, semplifica molto i calcoli.

Parametri per unità di lunghezza

Un'altra importante osservazione, circa le equazioni delle linee di trasmissione, è che, in base al discorso fatto, esse sono relative a linee di trasmissione di tipo qualunque; in altre parole, la forma di tali equazioni rimane invariata qualunque sia la linea di trasmissione (purché ovviamente a due conduttori); il tipo di linea subentra ovviamente nel momento in cui devono essere calcolati i valori dei parametri per unità di lunghezza (r_1 , c , l e g_2): *tutte le informazioni associate alla geometria della sezione trasversale, al tipo di dielettrico ed al tipo di conduttori, informazioni che cioè sono proprie di una particolare linea, sono contenute soltanto nei parametri per unità di lunghezza.*

Soluzione nel dominio della frequenza

Una volta ricavate le equazioni delle linee di trasmissione, il passo successivo è ovviamente quello di risolverle, in modo da trovare come variano, rispetto al tempo ed alla posizione, le forme d'onda della tensione $V(z,t)$ tra i due conduttori e della corrente $I(z,t)$ nei due conduttori.

E' possibile allora ricavare due diverse soluzioni:

- la **soluzione nel dominio del tempo** è quella più completa possibile, in quanto viene ricavata senza formulare ipotesi circa l'andamento temporale dei segnali di eccitazione (4);
- la **soluzione in regime sinusoidale**, invece, presuppone una eccitazione della linea di tipo sinusoidale isofrequenziale e si riferisce inoltre ad una condizione di regime sulla linea, ossia ad una condizione in cui si assumono esauriti tutti i possibili fenomeni transitori.

In questa sede, siamo interessati alla soluzione in regime permanente sinusoidale. La prima ipotesi è dunque quella per cui la sorgente abbia una forma d'onda sinusoidale, ad esempio del tipo seguente:

$$V_s(t) = V_s \cos(\omega t) = \operatorname{Re}\{V_s e^{j\omega t}\}$$

A questa particolare forma d'onda sappiamo di poter associare il **fasore** equivalente:

$$\bar{V}_s = V_s \langle 0^\circ \rangle$$

In questa espressione, il fatto di aver preso una fase nulla indica che stiamo considerando questo fasore come riferimento per tutti gli altri.

La seconda ipotesi consiste nell'assumere che la sorgente sia stata connessa alla linea per un tempo sufficiente alla estinzione di tutti i fenomeni transitori, lasciando così che in ciascun punto della linea si stabilizzino tensioni e correnti

4 Segnaliamo che, talvolta, si parla di soluzione transitorio, ma è un errore, in quanto la soluzione nel dominio del tempo è di tipo globale: essa comprende sia il transitorio sia il regime.

con andamento sinusoidale. Ciò significa che anche queste tensioni e correnti saranno suscettibili di una rappresentazione fasoriale e cioè quindi che potremo comodamente ragionare nel **dominio dei fasori**, da cui poi risalire al dominio dei tempi (che è quello di interesse pratico): la tensione e la corrente in corrispondenza della generica sezione z della linea avranno le rispettive forme d'onda del tipo

$$V(z, t) = \text{Re}\{\bar{V}(z)e^{j\omega t}\}$$

$$I(z, t) = \text{Re}\{\bar{I}(z)e^{j\omega t}\}$$

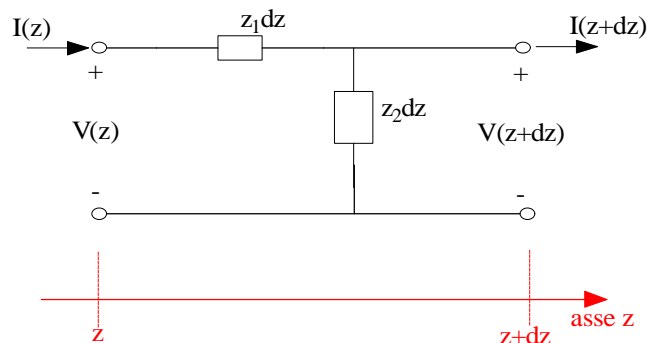
Per semplicità di notazione, nei prossimi paragrafi eviteremo di indicare il "trattino orizzontale" per contrassegnare i fasori e converremo di distinguere tali fasori dalle quantità nel dominio del tempo tramite l'uso delle lettere minuscole. Quindi, adotteremo la seguente simbologia:

$$v(z, t) = \text{Re}\{V(z, \omega)\} = \text{Re}\{V(z)e^{j\omega t}\}$$

$$i(z, t) = \text{Re}\{I(z, \omega)\} = \text{Re}\{I(z)e^{j\omega t}\}$$

Risoluzione delle equazioni dei telegrafisti

Nell'ipotesi di essere in **regime sinusoidale permanente**, abbiamo già visto in precedenza che il modello circuitale equivalente del generico tratto dz della linea è il seguente:



dove abbiamo posto

$$\dot{z}_1 = (r_1 + j\omega l)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{\dot{y}_2} = \frac{1}{(r_2 + j\omega c)}$$

Il corrispondente sistema di equazioni differenziali si ottiene facilmente, nel modo seguente.

Applicando la LKT in senso orario, abbiamo che

$$V(z) = (z_1 dz)I(z) + V(z + dz) = I(z)(r_1 + j\omega l)dz + V(z + dz)$$

Possiamo sicuramente porre $V(z+dz)=V(z)+dV$, per cui, effettuando la sostituzione, otteniamo

$$V(z) = (z_1 dz)I(z) + V(z) + dV$$

da cui ricaviamo evidentemente che

$$dV = -Iz_1 dz$$

In modo analogo, applicando la LKC otteniamo che

$$I(z) = (V(z) + dV)y_2 dz + I(z + dz) = (V(z) + dV)(g_2 + j\omega c) dz + I(z + dz)$$

Ponendo anche per le correnti $I(z+dz)=I(z)+dI$, abbiamo che

$$I(z) = y_2(V(z) + dV)dz + I(z) + dI$$

da cui, esplicitando dI , otteniamo

$$dI = -y_2(V(z) + dV)dz = -y_2 V(z)dz - y_2 dVdz$$

Il termine $y_2 dVdz$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto al termine $y_2 Vdz$ e quindi lo possiamo trascurare: otteniamo in tal modo che

$$dI = -V(z)y_2 dz$$

In conclusione, abbiamo ricavato il seguente sistema di equazioni differenziali lineari del 1° ordine a coefficienti costanti:

equazioni dei telegrafisti	$\begin{cases} dV = -I(z)z_1 dz \\ dI = -V(z)y_2 dz \end{cases}$
-------------------------------	------------------------------------------------------------------

Tale sistema si può risolvere facilmente, ma è bene tenere presente che la sua soluzione risulta essere unica solo a patto di conoscere le condizioni al contorno, ossia i valori di tensione e di corrente in corrispondenza di una qualsiasi sezione della linea. Allora, ci preoccupiamo prima della sua risoluzione e poi individueremo quali sono le condizioni al contorno.

Intanto, il sistema può essere scritto nella seguente forma compatta:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dz} = -Iz_1 \\ \frac{dI}{dz} = -Vy_2 \end{cases}$$

Esso andrebbe risolto con il metodo tradizionale degli autovalori. Tuttavia, data la sua forma, sappiamo di poterlo risolvere anche in altro modo. Consideriamo la prima equazione e differenziamola rispetto a z :

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = -z_1 \frac{dI}{dz}$$

Adesso, al posto di dI/dz sostituiamo il secondo membro della seconda equazione e portiamo tutto al primo membro: ciò che otteniamo è

$$\frac{d^2V}{dz^2} - z_1 y_2 V = 0$$

Questa è una normale equazione differenziale del 2° ordine nella sola incognita $V(z)$.

Per comodità e per motivi che saranno chiari tra poco, facciamo la seguente posizione:

$$\boxed{\gamma^2 = z_1 y_2}$$

Così facendo, l'equazione diventa

$$\frac{d^2V}{dz^2} - \gamma^2 V = 0$$

Alla costante γ si dà il nome di **costante di propagazione**: essendo pari alla radice del prodotto di due numeri in generale complessi, sarà anch'essa complessa, per cui la possiamo esprimere nella forma generica

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

La costante α prende il nome di **costante di attenuazione**, mentre β prende il nome di **costante di fase**. Queste tre definizioni saranno più chiare tra poco.

Tornando all'equazione differenziale, la risolviamo con il tradizionale *metodo dell'equazione caratteristica*, che in questo caso è

$$s^2 - \gamma^2 = 0$$

Risolvendola, si ricava che $s_{\frac{1}{2}} = \pm\gamma$, per cui l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$V(z) = A_1 e^{\gamma z} + A_2 e^{-\gamma z}$$

Naturalmente, una volta ottenuta l'espressione della tensione, possiamo facilmente ricavarci quello della corrente: infatti, dato che la seconda equazione differenziale era

$$I(z) = -\frac{1}{z_1} \frac{dV}{dz}$$

da essa ci ricaviamo facilmente che

$$I(z) = -\frac{1}{z_1} \frac{d}{dz} (A_1 e^{\gamma z} + A_2 e^{-\gamma z}) = -\frac{\gamma}{z_1} A_1 e^{\gamma z} + \frac{\gamma}{z_1} A_2 e^{-\gamma z}$$

In conclusione, le leggi con cui si propagano spazialmente, lungo la linea, i fasori della tensione e della corrente sono le seguenti:

$$\begin{cases} V(z) = A_1 e^{\gamma z} + A_2 e^{-\gamma z} \\ I(z) = -\frac{\gamma}{z_1} A_1 e^{\gamma z} + \frac{\gamma}{z_1} A_2 e^{-\gamma z} \end{cases}$$

In queste due equazioni si osserva che sia la tensione sia la corrente risultano essere somma di due onde: c'è un'onda che si propaga lungo la direzione positiva dell'asse z , cui diamo perciò il nome di **onda diretta**, e c'è un'onda che si propaga lungo la direzione negativa dell'asse z , cui diamo perciò il nome di **onda riflessa**.

Per evidenziare ancora meglio questo fatto, facciamo la seguenti posizioni:

$$\begin{cases} V_r = A_1 \longleftarrow \text{onda riflessa di tensione} \\ V_i = A_2 \longleftarrow \text{onda diretta di tensione} \\ I_r = -\frac{\gamma}{z_1} A_1 \longleftarrow \text{onda riflessa di corrente} \\ I_i = \frac{\gamma}{z_1} A_2 \longleftarrow \text{onda diretta di corrente} \end{cases}$$

Così facendo, le espressioni che d'ora in poi considereremo saranno le seguenti:

$$\boxed{\begin{cases} V(z) = V_r e^{\gamma z} + V_i e^{-\gamma z} \\ I(z) = I_r e^{\gamma z} + I_i e^{-\gamma z} \end{cases}}$$

Osservazione: tensione e corrente nel dominio del tempo

Le espressioni ottenute nel paragrafo precedente per $V(z)$ ed $I(z)$ “sembrano” essere funzioni solo dello spazio, ossia “sembra” che le variazioni di tensione e di corrente si registrino solamente spostandosi da un punto all'altro della linea. In realtà, la situazione è più complessa in conseguenza del fatto che il nostro ragionamento è stato condotto nel dominio della frequenza e quindi non evidenzia esplicitamente la dipendenza di V ed I dal tempo.

Per introdurre la dipendenza dal tempo, ovviamente di tipo sinusoidale, basta affermare che l'andamento della tensione e della corrente in ciascun punto z della linea e in ciascun istante t è dato dalle seguenti espressioni:

$$\begin{cases} v(z, t) = \text{Re}[V(z, \omega)] = \text{Re}[V(z)e^{j\omega t}] = \text{Re}[(V_r e^{\gamma z} + V_i e^{-\gamma z})e^{j\omega t}] \\ i(z, t) = \text{Re}[I(z, \omega)] = \text{Re}[I(z)e^{j\omega t}] = \text{Re}[(I_r e^{\gamma z} + I_i e^{-\gamma z})e^{j\omega t}] \end{cases}$$

Per ricavare le espressioni $v(z, t)$ e $i(z, t)$ della tensione e della corrente nel dominio del tempo, che poi è quello di interesse pratico, è necessario e sufficiente moltiplicare i fasori per il termine esponenziale $e^{j\omega t}$ e poi calcolare la parte reale di ciò che si ottiene, il che è sinonimo di antitrasformazione di Fourier.

Possiamo inoltre fare altre considerazioni circa $V(z, \omega)$ e $I(z, \omega)$. Consideriamo per esempio la tensione, visto che il discorso sulla corrente è identico.

Preso una generica sezione z , la tensione in z è dunque data da

$$V(z, \omega) = A_1 e^{\gamma z} e^{j\omega t} + A_2 e^{-\gamma z} e^{j\omega t}$$

Lavorando sugli esponenziali, abbiamo che

$$e^{\gamma z} e^{j\omega t} = e^{(\alpha + j\beta)z + j\omega t} = e^{\alpha z} e^{j(\beta z + \omega t)}$$

$$e^{-\gamma z} e^{j\omega t} = e^{-(\alpha + j\beta)z + j\omega t} = e^{\alpha z} e^{j(-\beta z + \omega t)}$$

Usando queste uguaglianze, possiamo scrivere che

$$V(z, \omega) = A_1 e^{\alpha z} e^{j(\beta z + \omega t)} + A_2 e^{\alpha z} e^{j(-\beta z + \omega t)}$$

In base a questa relazione, $V(z, \omega)$ è la somma di due onde, ciascuna caratterizzata da un termine reale $e^{\alpha z}$, indipendente dal tempo, e da un termine complesso $e^{j(\pm\beta z + \omega t)}$, variabile nel tempo. A quest'ultimo termine si dà in particolare il nome di **fattore di fase** dell'onda: infatti, esso definisce la cosiddetta **fase** dell'onda, che vale $\varphi = \beta z + \omega t$ per l'onda riflessa e $\varphi = -\beta z + \omega t$ per l'onda diretta.

A questo punto, possiamo dare una definizione: *si definisce **velocità di fase** dell'onda la velocità con cui un osservatore deve viaggiare per vedere l'onda con fase costante*. Nota l'espressione della fase dell'onda, è possibile calcolare la velocità di fase dell'onda stessa: nel nostro caso, abbiamo un'onda che viaggia con fase pari a $\varphi_1 = +\beta z + \omega t$ e un'onda che viaggia con fase pari a $\varphi_2 = -\beta z + \omega t$; differenziando rispetto a z entrambe le relazioni, otteniamo

$$d\varphi_1 = +\beta dz + \omega dt$$

$$d\varphi_2 = -\beta dz + \omega dt$$

Se un osservatore viaggia vedendo l'onda riflessa con fase costante, è chiaro che $d\varphi_1 = 0$; in modo analogo, se un osservatore viaggia vedendo l'onda diretta con fase costante, deve essere $d\varphi_2 = 0$. Abbiamo dunque che

$$0 = +\beta dz + \omega dt$$

$$0 = -\beta dz + \omega dt$$

Da qui ricaviamo che le rispettive velocità di fase sono

$$v_{p,1} = \frac{dz}{dt} = -\frac{\omega}{\beta}$$

$$v_{p,2} = \frac{dz}{dt} = +\frac{\omega}{\beta}$$

Tutto ciò ci consente di osservare quanto segue:

- l'onda di tensione $A_1 e^{\alpha z} e^{j(\beta z + \omega t)}$ si propaga con velocità di fase $v_{p,1}$ negativa, ossia dal carico verso il generatore (visto che stiamo considerando un'asse z diretta verso il carico): da qui deriva il termine **riflessa**;

- al contrario, l'onda di tensione $A_2 e^{\alpha z} e^{j(-\beta z + \omega t)}$, si propaga con velocità di fase $v_{p,2}$ positiva (uguale, comunque, in modulo all'altra), ossia dal generatore verso il carico: da qui deriva il termine **diretta**.

Quando l'onda complessiva manca dell'onda riflessa oppure di quella diretta, noi diremo che si tratta di un' **onda progressiva**, in quanto si propaga in un'unica direzione. Se, invece, sono presenti entrambe le componenti, noi parleremo di **onda stazionaria**.

Impedenza caratteristica della linea

Torniamo adesso a ragionare sui fasori $V(z)$ e $I(z)$:

$$\begin{cases} V(z) = V_r e^{\gamma z} + V_i e^{-\gamma z} \\ I(z) = I_r e^{\gamma z} + I_i e^{-\gamma z} \end{cases}$$

Possiamo definire un importante parametro caratteristico della linea: si definisce **impedenza caratteristica** della linea considerata il rapporto tra l'onda incidente di tensione e l'onda incidente di corrente:

$$z_c = \frac{V_i}{I_i} = \frac{z_1}{\gamma}$$

Ricordando che $\gamma^2 = z_1 y_2$, possiamo riscrivere l'impedenza caratteristica nella forma

$$z_c = \sqrt{\frac{z_1}{y_2}} = \sqrt{\frac{r_1 + j\omega\ell}{g_1 + j\omega c}}$$

dove, ovviamente, $\omega = 2\pi f$ è la pulsazione angolare dell'onda applicata dal generatore.

L'impedenza caratteristica z_c e la costante di propagazione γ rientrano nella categoria dei **parametri secondari** di una linea, mentre i parametri r_1, ℓ, c, g_2 sono **parametri primari**. E' evidente che i parametri secondari dipendono solo dal valore dei parametri primari, i quali, come detto in precedenza, tengono conto della natura fisica della linea considerata.

Volendo esprimere $V(z)$ e $I(z)$ in funzione dell'impedenza caratteristica, basta tener conto che $I_r = -\frac{\gamma}{z_1} V_r$ e che $I_i = \frac{\gamma}{z_1} V_i$, per cui abbiamo che

$$\begin{cases} V(z) = V_r e^{\gamma z} + V_i e^{-\gamma z} \\ I(z) = -\frac{V_r}{z_c} e^{\gamma z} + \frac{V_i}{z_c} e^{-\gamma z} \end{cases}$$

Queste equazioni possono anche essere espresse in altro modo, sfruttando le funzioni Seno Iperbolico e Coseno Iperbolico:

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

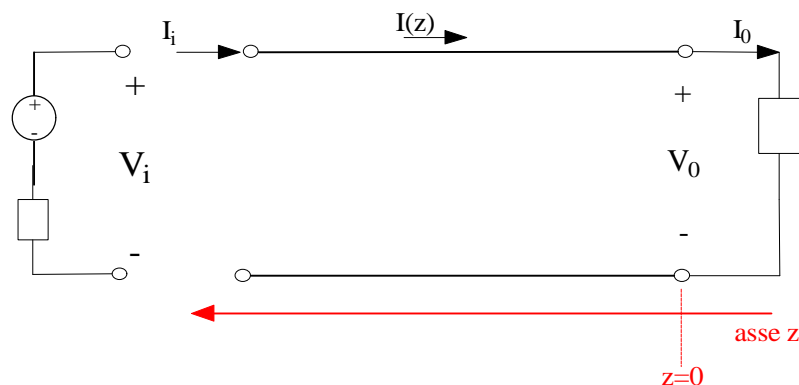
Allora, facendo un po' di passaggi, si trova che le equazioni di V e di I possono essere scritte nella forma

$$\begin{cases} V(z) = C \cosh(\gamma z) + D \sinh(\gamma z) \\ I(z) = \frac{1}{z_c} [-C \sinh(\gamma z) - D \cosh(\gamma z)] \end{cases}$$

Condizioni al contorno

Nelle espressioni di V(z) e I(z) compaiono delle costanti di integrazione C e D (in generale complesse) che vanno determinate sulla base delle **condizioni al contorno** del problema. Vediamo allora quali possono essere queste condizioni al contorno.

Lo schema intuitivo cui fare riferimento è il seguente:



Si osserva subito che, rispetto a quanto considerato fino al paragrafo precedente, l'origine del sistema di riferimento è stata adesso presa sul carico e l'orientazione dell'asse z è quella che va dal carico verso il generatore: è facile verificare che, con questa scelta del sistema di riferimento e nell'ipotesi che la tensione e la corrente sul carico siano rispettivamente $V(z=0) = V_0$ e $I(z=0) = I_0$, le equazioni di V(z) e I(z) diventano

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cosh(\gamma z) + z_c I_0 \sinh(\gamma z) \\ I(z) = \frac{V_0}{z_c} \sinh(\gamma z) + I_0 \cosh(\gamma z) \end{cases}$$

D'ora in poi, salvo diverso avviso, tutti i nostri ragionamenti saranno basati su queste due equazioni.

Osservazione

Facciamo osservare che, se avessimo conservato il riferimento $z=0$ sul generatore, l'orientazione dell'asse z dal generatore verso il carico e le condizioni al contorno $V(z=0) = V_g$ e $I(z=0) = I_g$, le espressioni di $V(z)$ e $I(z)$ sarebbero diventate

$$\begin{cases} V(z) = V_g \cosh(\gamma z) - z_c I_g \sinh(\gamma z) \\ I(z) = \frac{1}{z_c} [-V_g \sinh(\gamma z) + z_c I_g \cosh(\gamma z)] \end{cases}$$

Caso particolare: assenza di perdite ($\alpha=0$)

Vogliamo adesso capire come si modificano le espressioni di $V(z)$ e $I(z)$ se supponiamo che lungo la linea non ci siano perdite (si parla in questo caso di **linea ideale senza perdite**): ciò significa supporre che $\alpha=0$, ossia che sia nulla la parte reale di $\gamma = \sqrt{z_1 y_2}$.

Vediamo intanto quanto vale nel dettaglio la parte reale di α , in modo da capire perché si parla di "assenza di perdite": dato che avevamo posto

$$\begin{aligned} z_1 &= (r_1 + j\omega\ell) \\ z_2 &= \frac{1}{y_2} = \frac{1}{(g_2 + j\omega c)} \end{aligned}$$

parlare di *perdite nulle* significa ritenere che i termini dissipativi, ossia r_1 e r_2 , siano del tutto trascurabili rispetto ai termini induttivi e capacitivi. In altre parole, parlare di "perdite nulle" equivale a supporre che

$$\begin{aligned} r_1 &\ll \omega\ell \\ g_2 &\ll \omega c \end{aligned}$$

Sotto queste ipotesi, risulta evidentemente

$$\begin{aligned} z_1 &= j\omega\ell \\ y_2 &= j\omega c \end{aligned}$$

Da qui scaturisce che la costante di propagazione vale

$$\gamma = \sqrt{z_1 y_2} = \sqrt{-\omega^2 \ell c} = j\omega\sqrt{\ell c}$$

Come previsto, la parte reale di γ è nulla, ossia $\alpha=0$.

Se $\alpha=0$, quindi, risulta $\gamma=j\beta$, ossia γ è un numero immaginario puro, per cui la funzione Coseno Iperbolico coincide con la funzione Coseno, mentre la funzione Seno Iperbolico coincide con la funzione Seno moltiplicata per j . In conclusione, per

una linea senza perdite, le espressioni di $V(z)$ e $I(z)$ si modificano nel modo seguente:

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + j z_c I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = \frac{1}{z_c} [j V_0 \sin(\beta z) + z_c I_0 \cos(\beta z)] \end{cases}$$

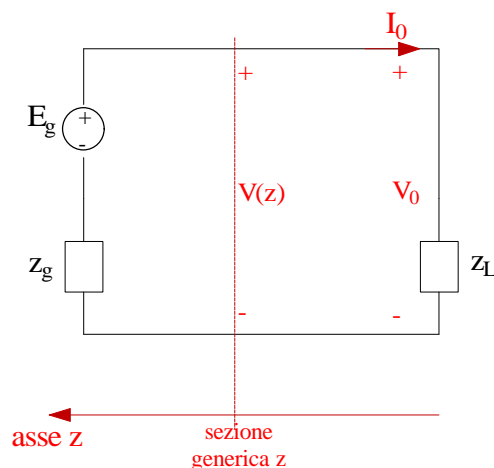
In base a queste equazioni, note la tensione e la corrente in corrispondenza del carico e noti i parametri caratteristici della linea (cioè l'impedenza caratteristica e la costante di fase β), siamo in grado di conoscere la tensione e la corrente in corrispondenza di una qualsiasi sezione z della linea.

Prima di proseguire, riepiloghiamo le relazioni che si hanno nel caso di $\alpha=0$:

$$\begin{cases} z_1 = j\omega\ell \\ y_2 = j\omega c \\ z_c = \sqrt{\frac{\ell}{c}} \\ \gamma = j\beta \\ \beta = \omega\sqrt{\ell c} \end{cases}$$

Impedenza di ingresso

Cominciamo adesso a visualizzare meglio il collegamento del carico con il generatore. Sempre nell'ipotesi che il regime sia sinusoidale, possiamo visualizzare il tutto come un collegamento in serie tra un generatore di tensione alternata, dotato di impedenza interna z_g , ed una impedenza z_L che rappresenta il carico:



Come si evidenzia dallo schema, è chiaro che, se V_0 è la tensione ai capi del carico e I_0 la corrente che risulta attraversare il carico stesso, deve essere $z_L = V_0 / I_0$. Considerate allora le equazioni

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cosh(\gamma z) + z_c I_0 \sinh(\gamma z) \\ I(z) = \frac{V_0}{z_c} \sinh(\gamma z) + I_0 \cosh(\gamma z) \end{cases}$$

si definisce **impedenza di ingresso** della linea, in corrispondenza della sezione z . Il rapporto tra la tensione e la corrente in corrispondenza della sezione stessa, ossia la quantità

$$z_i(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_0 \cosh(\gamma z) + z_c I_0 \sinh(\gamma z)}{\frac{V_0}{z_c} \sinh(\gamma z) + I_0 \cosh(\gamma z)}$$

In pratica, il significato della impedenza di ingresso è il seguente: per $z=0$ nel sistema di riferimento adottato, il carico "è visto dalla linea di trasmissione" semplicemente come z_L ; al contrario, quando ci portiamo a distanza z dal carico, vediamo, appunto come carico, non più solo z_L , ma la "cascata" formata da z_L e dal tratto di linea, di lunghezza z , che ancora ci separa da z_L ; di conseguenza, a distanza z da z_L , il carico è visto dalla linea come $z_i(z)$. E' come se, a distanza z da z_L , tracciassimo una sezione ideale trasversale e considerassimo come carico tutto ciò che c'è a destra di tale sezione: tale carico è appunto l'impedenza di ingresso per quella sezione.

Se, adesso, nell'espressione prima ricavata per z_i , moltiplichiamo e dividiamo il denominatore per z_c e, successivamente, dividiamo ambo i membri dell'uguaglianza per I_0 , otteniamo

$$z_i(z) = z_c \frac{\frac{V_0}{I_0} \cosh(\gamma z) + z_c \sinh(\gamma z)}{\frac{V_0}{I_0} \sinh(\gamma z) + z_c \cosh(\gamma z)}$$

Del resto, avendo detto che $z_L = V_0/I_0$, concludiamo che l'impedenza di ingresso è esprimibile come

$$z_i(z) = z_c \frac{z_L \cosh(\gamma z) + z_c \sinh(\gamma z)}{z_L \sinh(\gamma z) + z_c \cosh(\gamma z)}$$

Caso particolare: perdite nulle

Vediamo come cambia l'espressione dell'impedenza di ingresso nel caso in cui si ritengano trascurabili le perdite: abbiamo detto in precedenza che parlare di "assenza di perdite" equivale a supporre che $r_1 \ll \omega \ell$ e $g_2 \ll \omega c$. Da qui scaturisce che

$$\begin{cases} \alpha = 0 \longrightarrow \gamma = j\beta = j\omega\sqrt{\ell c} \\ z_1 = j\omega\ell \\ y_2 = j\omega c \\ z_c = \sqrt{\frac{\ell}{c}} \end{cases}$$

In particolare, ci interessa il fatto che la costante di propagazione $\gamma=j\beta$ diventa un numero immaginario puro: come visto in precedenza, ciò implica che l'andamento di tensione e corrente possa essere descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + jz_c I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = \frac{1}{z_c} [jV_0 \sin(\beta z) + z_c I_0 \cos(\beta z)] \end{cases}$$

Queste due equazioni si possono porre in forma matriciale nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} V(z) \\ I(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta z) & jz_c \sin(\beta z) \\ j \frac{\sin(\beta z)}{z_c} & \cos(\beta z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

La matrice di questo sistema prende il nome di **matrice ABCD** e gode evidentemente della proprietà di avere determinante pari ad 1.

Vediamo adesso quanto vale l'impedenza di ingresso in base a quelle nuove relazioni: è facile verificare che essa vale

$$z_i(z) = z_c \frac{z_L \cos(\beta z) + jz_c \sin(\beta z)}{jz_L \sin(\beta z) + z_c \cos(\beta z)}$$

Osservazione: applicazione della matrice ABCD

L'espressione di $V(z)$ e $I(z)$ ottenuta mediante la matrice ABCD consente un calcolo immediato della tensione e della corrente a distanza z dal carico, note che siano la tensione e la corrente in corrispondenza del carico stesso.

Per esempio, supponiamo che, in corrispondenza del carico, risulti $V_0 = 0$: in questo caso, ad una distanza z dal carico, avremo che

$$\begin{bmatrix} V(z) \\ I(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta z) & jz_c \sin(\beta z) \\ j \frac{\sin(\beta z)}{z_c} & \cos(\beta z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} V(z) = jz_c I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = I_0 \cos(\beta z) \end{cases}$$

In modo del tutto analogo, se fosse $I_0 = 0$, avremmo

$$\begin{bmatrix} V(z) \\ I(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta z) & jz_c \sin(\beta z) \\ j \frac{\sin(\beta z)}{z_c} & \cos(\beta z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) \\ I(z) = j \frac{\sin(\beta z)}{z_c} V_0 \sin(\beta z) \end{cases}$$

Valore esatto della costante di propagazione g in assenza di perdite

Abbiamo in precedenza detto che, in assenza di perdite, possiamo ritenere nullo il valore della costante di attenuazione α (=parte reale di γ). In effetti, questo valore non risulta proprio nullo, per cui vogliamo adesso vedere approssimativamente quanto vale.

Intanto, la definizione di γ ci dice che $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{z_1 y_2}$. Sostituendo le espressioni dell'impedenza e dell'ammettenza sotto radice, abbiamo

$$\gamma = \sqrt{(r_1 + j\omega\ell)(g_2 + j\omega c)}$$

Mettendo in evidenza nella prima parentesi il termine $j\omega\ell$ e nella seconda il termine $j\omega c$, abbiamo

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2 \ell c \left(\frac{r_1}{j\omega\ell} + 1 \right) \left(\frac{g_2}{j\omega c} + 1 \right)} = j\omega\sqrt{\ell c} \sqrt{\left(\frac{r_1}{j\omega\ell} + 1 \right) \left(\frac{g_2}{j\omega c} + 1 \right)}$$

Eseguendo adesso il prodotto sotto radice, abbiamo

$$\gamma = j\omega\sqrt{\ell c} \sqrt{\left(\frac{r_1}{j\omega\ell} \frac{g_2}{j\omega c} \right) + \left(\frac{r_1}{j\omega\ell} + \frac{g_2}{j\omega c} + 1 \right)}$$

Avendo detto che l'ipotesi di assenza di perdite equivale a

$$\begin{aligned} r_1 &\ll \omega\ell \\ g_2 &\ll \omega c \end{aligned}$$

possiamo trascurare il primo prodotto tra parentesi, scrivendo che

$$\gamma = j\omega\sqrt{\ell c} \sqrt{\frac{r_1}{j\omega\ell} + \frac{g_2}{j\omega c} + 1}$$

e possiamo sviluppare la seconda radice in serie: ciò che si ottiene è

$$\gamma = j\omega\sqrt{\ell c} \left(1 + \frac{r_1}{2j\omega\ell} \right) \left(1 + \frac{g_2}{2j\omega c} \right)$$

In questa relazione possiamo separare la parte immaginaria da quella reale: otteniamo

$$\gamma = \sqrt{\ell c} \left(\frac{r_1}{2\ell} + \frac{g_2}{2c} \right) + j\omega\sqrt{\ell c}$$

da cui si deduce che la parte immaginaria è

$$\beta = j\omega\sqrt{\ell c}$$

come avevamo trovato prima, mentre la parte reale è

$$\alpha = \sqrt{\ell c} \left(\frac{r_1}{2\ell} + \frac{g_2}{2c} \right)$$

Questa quantità è evidentemente diversa da zero (anche se di valore estremamente basso). Ricordandoci della definizione di impedenza caratteristica, ossia $z_c = z_1/\gamma$, abbiamo anche che

$$\alpha = \frac{r_1}{2z_c} + \frac{g_2 z_c}{2}$$

Caso particolare: Condizione di Heavyside

Sulla base delle relazioni trovate nel paragrafo precedente, esaminiamo alcuni casi particolari che si possono incontrare relativamente al valore dei parametri della linea.

Il primo di questi è la cosiddetta **condizione di Heavyside**, che si ha per definizione quando risulta

$$\frac{r_1}{\ell} = \frac{g_2}{c}$$

La particolarità di questa condizione si manifesta nel valore dell'impedenza caratteristica della linea z_c : abbiamo infatti che

$$z_c = \frac{z_1}{\gamma} = \frac{r_1 + j\omega\ell}{\sqrt{(r_1 + j\omega\ell)(g_2 + j\omega c)}} = \sqrt{\frac{r_1 + j\omega\ell}{g_2 + j\omega c}} = \sqrt{\frac{\ell}{c} \frac{r_1/\ell + j\omega}{g_2/c + j\omega}}$$

Avendo detto che $\frac{r_1}{\ell} = \frac{g_2}{c}$, è evidente che risulta

$$z_c = \sqrt{\frac{\ell}{c}} = R_c$$

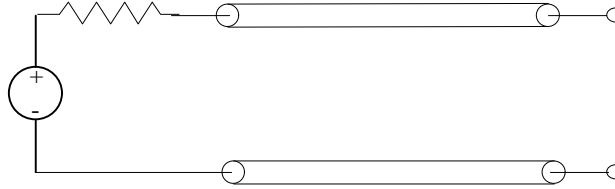
Il rapporto tra una induttanza ed una capacità ha le dimensioni di una resistenza (da cui si spiega il simbolo R_c usato nella formula), per cui quello che abbiamo trovato è che, *nonostante z_1 e z_2 siano delle quantità complesse, in condizioni di Heavyside l'impedenza caratteristica della linea di trasmissione risulta essere puramente resistiva.*

Se andiamo a valutare, inoltre, il valore della costante di attenuazione α , troviamo subito che

$$\alpha = \sqrt{\ell c} \left(\frac{r_1}{2\ell} + \frac{g_2}{2c} \right) = \sqrt{\ell c} \frac{r_1}{\ell} = \frac{r_1 \sqrt{c}}{\sqrt{\ell}} = r_1 \sqrt{\frac{c}{\ell}} = \frac{r_1}{R_c}$$

Caso particolare: carico costituito da cortocircuito

Un altro caso particolare è quello in cui il carico alimentato dal generatore è costituito da un **cortocircuito**, il che equivale a $z_L=0$:



Se andiamo a valutare l'impedenza di ingresso, alla generica sezione z , usando la relazione

$$z_i = z_c \frac{z_L \cosh(\gamma z) + z_c \sinh(\gamma z)}{z_L \sinh(\gamma z) + z_c \cosh(\gamma z)}$$

relativa alla presenza di perdite sulla linea, troviamo che

$$z_i = z_c \frac{z_c \sinh(\gamma z)}{z_c \cosh(\gamma z)} = z_c \operatorname{tgh}(\gamma z)$$

Se, invece, supponiamo non ci siano perdite sulla linea, la formula da usare è

$$z_i = z_c \frac{z_L \cos(\beta z) + j z_c \sin(\beta z)}{j z_L \sinh(\beta z) + z_c \cos(\beta z)}$$

e quindi si trova, per $z_L=0$, che

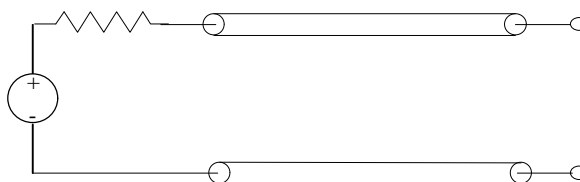
$$z_i = z_c \frac{j z_c \sin(\beta z)}{z_c \cos(\beta z)} = j z_c \operatorname{tg}(\beta z)$$

Se, oltre alla assenza di perdite, ci mettiamo anche nella condizione di Heavyside, sappiamo che $z_c=R_c$, per cui abbiamo che l'impedenza di ingresso vale

$$z_i = j R_c \operatorname{tg}(\beta z)$$

Caso particolare: carico costituito da un circuito aperto

L'altro caso particolare riguardante il carico è quello in cui si tratta di un **circuito aperto**, il che equivale a $z_L=\infty$:



Usando sempre la relazione generale

$$z_i = z_c \frac{z_L \cosh(\gamma z) + z_c \sinh(\gamma z)}{z_L \sinh(\gamma z) + z_c \cosh(\gamma z)}$$

possiamo mettere in evidenza z_L in entrambi i membri, ottenendo

$$z_i = z_c \frac{z_L \left(\cosh(\gamma z) + \frac{z_c}{z_L} \sinh(\gamma z) \right)}{z_L \left(\sinh(\gamma z) + \frac{z_c}{z_L} \cosh(\gamma z) \right)}$$

da cui si ricava, se $z_L = \infty$, che

$$z_i = z_c \frac{(\cosh(\gamma z))}{(\sinh(\gamma z))} = z_c \operatorname{ctgh}(\gamma z)$$

Se, invece, supponiamo non ci siano perdite sulla linea, per cui usiamo la relazione

$$z_i = z_c \frac{z_L \cos(\beta z) + j z_c \sin(\beta z)}{j z_L \sinh(\beta z) + z_c \cos(\beta z)}$$

troviamo, con metodo analogo a prima, che

$$z_i = z_c \frac{z_c \cos(\beta z)}{j z_c \sin(\beta z)} = \frac{z_c}{j} \operatorname{ctg}(\beta z)$$

Infine, se, oltre alla assenza di perdite, ci mettiamo nella condizione di Heavyside, sappiamo che $z_c = R_c$, per cui abbiamo che l'impedenza di ingresso vale

$$z_i = \frac{R_c}{j} \operatorname{ctg}(\beta z)$$

Riepiloghiamo nello schema seguente i risultati ottenuti negli ultimi due paragrafi a proposito dell'impedenza di ingresso:

$$\begin{array}{l} z_L = 0 \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{presenza di perdite} \longrightarrow z_i = z_c \operatorname{tgh}(\gamma z) \\ \text{assenza di perdite} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_i = j z_c \operatorname{tg}(\beta z) \\ \text{cond. Heavyside} \longrightarrow z_i = j R_c \operatorname{tg}(\beta z) \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \\ z_L = \infty \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{presenza di perdite} \longrightarrow z_i = z_c \operatorname{ctgh}(\gamma z) \\ \text{assenza di perdite} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_i = \frac{z_c}{j} \operatorname{ctg}(\beta z) \\ \text{cond. Heavyside} \longrightarrow z_i = \frac{R_c}{j} \operatorname{ctg}(\beta z) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}$$

N.B. Si osserva che facendo il prodotto tra i valori di impedenza di ingresso ottenuti, in condizione di Heavyside ed in assenza di perdite, per il cortocircuito e per il circuito aperto, si ottiene esattamente R_c^2

Diagrammi della tensione e della corrente in assenza di perdite

Vogliamo adesso studiare l'andamento della tensione e della corrente lungo la linea di trasmissione al variare del carico, rappresentato sempre dalla generica impedenza z_L .

Le espressioni di $V(z)$ e $I(z)$ cui dobbiamo fare riferimento sono le seguenti:

$$\text{in presenza di perdite sulla linea} \rightarrow \begin{cases} V(z) = V_0 \cosh(\gamma z) + z_c I_0 \sinh(\gamma z) \\ I(z) = \frac{V_0}{z_c} \sinh(\gamma z) + I_0 \cosh(\gamma z) \end{cases}$$

$$\text{in assenza di perdite sulla linea} \rightarrow \begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + j z_c I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = j \frac{V_0}{z_c} \sin(\beta z) + I_0 \cos(\beta z) \end{cases}$$

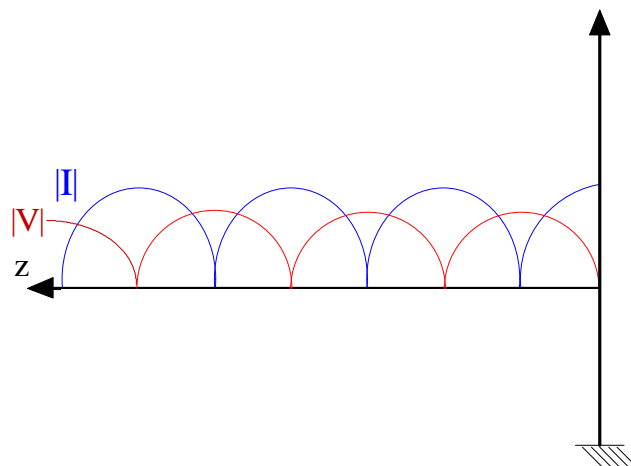
In particolare, ci riferiremo al caso di assenza di perdite sulla linea.

1° caso: carico costituito da un cortocircuito

Cominciamo dal caso in cui $z_L=0$: ricordando che, in corrispondenza del carico, risulta $V_{0=z_L} I_0$, la condizione $z_L=0$ equivale a $V_0=0$, per cui abbiamo che

$$\begin{cases} V(z) = j z_c I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = I_0 \cos(\beta z) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} |V(z)| = |j z_c I_0 \sin(\beta z)| = |z_c| I_0 |\sin(\beta z)| = |z_c| I_0 |\sin(\beta z)| \\ |I(z)| = |I_0 \cos(\beta z)| = I_0 |\cos(\beta z)| \end{cases}$$

Possiamo dunque tracciare i diagrammi (in funzione ovviamente di z) del modulo della tensione e di quello della corrente:



N.B. Ricordiamo di non far caso al fatto per cui il modulo della corrente abbia valore massimo maggiore di quello della tensione, in quanto i diagrammi sono solo qualitativi.

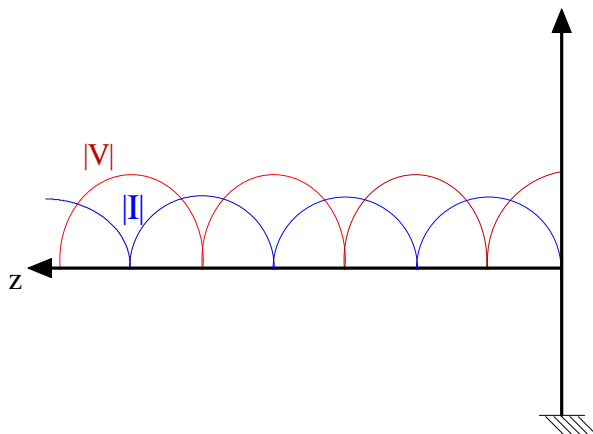
La cosa principale che si evidenzia dal diagramma è che, nel caso del carico in cortocircuito, i valori massimi della corrente si hanno in corrispondenza dei valori minimi della tensione e viceversa. Ciò è confermato dai valori di V e I che si hanno in corrispondenza proprio del carico: trattandosi di un cortocircuito, è chiaro che la tensione assume valore minimo, $V_0=0$, mentre la corrente, non trovando resistenze di nessun tipo, assume il suo valore massimo $|I_{MAX}| = |I_0|$.

2° caso: carico costituito da un circuito aperto

In questo caso, essendo $z_L = \infty$, abbiamo che $I_0 = 0$, per cui, analiticamente, la situazione è la seguente:

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) \\ I(z) = j \frac{V_0}{z_C} \sin(\beta z) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} |V(z)| = V_0 \cos(\beta z) \\ |I(z)| = \left| j \frac{V_0}{z_C} \sin(\beta z) \right| = \left| \frac{j}{z_C} \right| V_0 \sin(\beta z) = \left| \frac{1}{z_C} \right| V_0 \sin(\beta z) \end{cases}$$

I diagrammi di tensione e corrente risultano perciò semplicemente invertiti rispetto al caso precedente:



Si ha dunque che, in corrispondenza del carico, la tensione assume valore massimo $|V_{MAX}| = |V_0|$, mentre la corrente, trovando una resistenza infinita, assume il valore minimo $|I_0| = 0$.

3° caso: carico adattato

Un caso di particolare importanza è quello cosiddetto di **carico adattato**, che si ha quando il valore della impedenza che rappresenta il carico è reale e precisamente vale

$$z_L = R_C = \sqrt{\frac{\ell}{c}}$$

dove R_C è il valore dell'impedenza caratteristica della linea in condizioni di Heavyside, ossia quando le perdite sulla linea sono supposte nulle e quando si ha che $\frac{r_1}{\ell} = \frac{g_2}{c}$.

Consideriamo sempre l'equazione delle linee di trasmissione per perdite nulle:

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + j z_C I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = j \frac{V_0}{z_C} \sin(\beta z) + I_0 \cos(\beta z) \end{cases}$$

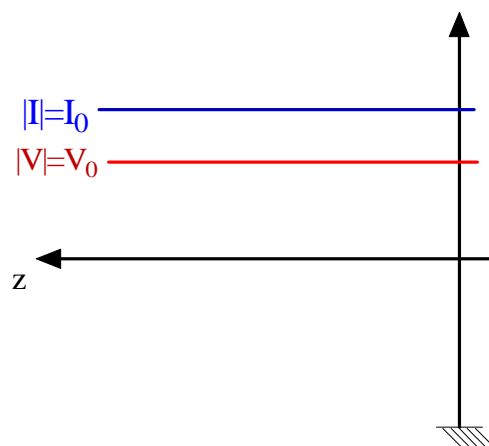
Avendo supposto che $z_L = z_C = R_C$ ed essendo $V_0 = z_L I_0$, le equazioni diventano

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + j V_0 \sin(\beta z) = V_0 (\cos(\beta z) + j \sin(\beta z)) \\ I(z) = j I_0 \sin(\beta z) + I_0 \cos(\beta z) = I_0 (\cos(\beta z) + j \sin(\beta z)) \end{cases}$$

Possiamo esprimere in modo più comodo queste due equazioni sfruttando le formule di Eulero: è infatti immediato verificare che esse sono equivalenti a

$$\begin{cases} V(z) = V_0 e^{j\beta z} \\ I(z) = I_0 e^{j\beta z} \end{cases}$$

Ciò che si deduce da queste formule è che manca, sia nell'onda di tensione sia in quella di corrente, l'onda riflessa (come d'altra parte era logico aspettarsi, visto che sono state supposte nulle le perdite e tali perdite sono dovute proprio all'onda riflessa). Abbiamo cioè un'onda puramente progressiva di tensione e un'onda puramente progressiva di corrente. Ciò significa che il modulo dell'onda risulta costante man mano che ci si sposta spazialmente, per cui i diagrammi dei moduli di $V(z)$ e $I(z)$ diventano i seguenti:



Quella appena descritta è appunto la condizione di **adattamento del carico**. In tale condizione, tutta la potenza fornita dal generatore viene trasferita al carico senza alcuna perdita: i valori numerici sono chiaramente

$$\begin{aligned} |V_{\text{MAX}}| &= |V_0| = |R_C I_0| \\ |I_{\text{MAX}}| &= |I_0| \end{aligned}$$

Valutazione analitica dei diagrammi di tensione e corrente

Vediamo adesso di fare considerazioni matematiche che ci diano gli stessi risultati che fino ad ora abbiamo dato per via qualitativa. Consideriamo sempre le equazioni delle linee di trasmissione in assenza di perdite:

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + j z_C I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = j \frac{V_0}{z_C} \sin(\beta z) + I_0 \cos(\beta z) \end{cases}$$

Supponiamo anche di essere in condizioni di Heavyside, per cui $z_C = R_C = \sqrt{\frac{\ell}{c}}$: le equazioni diventano

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + j R_C I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = j \frac{V_0}{R_C} \sin(\beta z) + I_0 \cos(\beta z) \end{cases}$$

Adesso, se supponiamo che il carico sia puramente resistivo, possiamo porre $z_L = R$. Allora, essendo $V_0 = z_L I_0 = R I_0$, possiamo ulteriormente modificare le equazioni, ottenendo

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + j R_C \frac{V_0}{R} \sin(\beta z) \\ I(z) = j R \frac{I_0}{R_C} \sin(\beta z) + I_0 \cos(\beta z) \end{cases}$$

Andiamo a calcolarci i moduli di $V(z)$ e $I(z)$ sfruttando queste relazioni: intanto, applicando semplicemente l'operatore "modulo", possiamo riscrivere

$$\begin{cases} |V(z)| = |V_0| \left| \cos(\beta z) + j \frac{R_C}{R} \sin(\beta z) \right| \\ |I(z)| = |I_0| \left| j \frac{R}{R_C} \sin(\beta z) + \cos(\beta z) \right| \end{cases}$$

In ciascuna equazione abbiamo a secondo membro il prodotto tra il modulo di una costante, cioè rispettivamente V_0 e I_0 , ed il modulo di un numero complesso: applicando allora la definizione di modulo di un numero complesso, abbiamo che

$$\begin{cases} |V(z)| = |V_0| \sqrt{(\cos(\beta z))^2 + \left(\frac{R_C}{R} \sin(\beta z)\right)^2} \\ |I(z)| = |I_0| \sqrt{(\cos(\beta z))^2 + \left(\frac{R}{R_C} \sin(\beta z)\right)^2} \end{cases}$$

E' chiaro che tutto dipende, in entrambe le equazioni, dal termine sotto radice, visto che è l'unico che dipende a sua volta dalla coordinata z .

Il primo caso che consideriamo è quello in cui $R \ll R_C$: in questa situazione, il valore della frazione R_C/R è molto elevato, mentre quello della frazione R/R_C è molto piccolo; allora, nella prima equazione possiamo trascurare il coseno e nella seconda possiamo trascurare il seno, in modo da ottenere

$$\begin{cases} |V(z)| = |V_0| \frac{R_C}{R} \sin(\beta z) \\ |I(z)| = |I_0| \cos(\beta z) \end{cases}$$

Consideriamo in particolare il modulo della tensione: il suo valore massimo è $V_{MAX} = V_0 \frac{R_C}{R}$ e si ottiene quando il seno vale 1, ossia quando l'argomento βz del seno è un multiplo intero dispari $\pi/2$: in termini analitici, deve accadere dunque che

$$\beta z = (2m+1) \frac{\pi}{2}$$

ossia che $z = (2m+1) \frac{\pi}{2\beta}$.

Se indichiamo con λ la lunghezza d'onda dell'onda di tensione, essa è legata alla costante di fase β dalla relazione $\beta = 2\pi/\lambda$: sostituendo questa espressione di β nell'espressione di z prima trovato si ottiene che

$$z_{MAX} = (2m+1) \frac{\lambda}{4}$$

Quindi, in corrispondenza di questi valori della coordinata z , otteniamo i valori massimi del modulo della tensione. Vediamo allora quali sono i valori del modulo della corrente in corrispondenza di questi z_{MAX} : l'espressione del modulo della corrente era $|I(z)| = |I_0| \cos(\beta z)$ ed è subito chiaro che $|I(z)|$ si annulla in quegli stessi punti dove $|V(z)|$ è massimo: infatti, nei punti in cui il Seno vale 1, il coseno è nullo.

Abbiamo dunque trovato una conferma matematica del fatto che, *quando il carico ha un valore piccolo (rispetto all'impedenza caratteristica della linea), i valori massimi della tensione si ottengono in corrispondenza dei valori minimi della corrente.*

Adesso vediamo quando si ottengono i valori minimi della tensione: dato che

$$|V(z)| = |V_0| \frac{R_C}{R} \text{sen}(\beta z)$$

è chiaro che $|V(z)|$ è minimo, ossia vale 0, quando vale 0 il seno, ossia quando $\beta z = n\pi$, ossia quando $z = n\pi/\beta$, ossia infine quando

$$z_{\text{MIN}} = \frac{n}{2} \lambda$$

Con considerazioni analoghe a prima, è chiaro che, in corrispondenza di questi stessi valori di z , si ottengono i valori massimi della corrente, ossia $I_{\text{MAX}} = I_0$. Anche questa è una conferma analitica della considerazioni qualitative fatte prima.

Passiamo al caso in cui $R \gg R_C$: questa volta, il valore della frazione R_C/R è molto piccolo, mentre quello della frazione R/R_C è molto grande; allora, nella espressione di $|V(z)|$ possiamo trascurare il seno e nella espressione di $|I(z)|$ possiamo trascurare il coseno, in modo da ottenere

$$\begin{cases} |V(z)| = |V_0| \cos(\beta z) \\ |I(z)| = |I_0| \frac{R}{R_C} \text{sen}(\beta z) \end{cases}$$

E' abbastanza facile intuire come il discorso vada semplicemente invertito rispetto al caso precedente: il valore massimo del modulo della corrente, ossia $I_{\text{MAX}} = I_0 \frac{R}{R_C}$, si ottiene per $z_{\text{MAX}} = \frac{m}{2} \lambda$ ed in corrispondenza del valore minimo (=0) della tensione. Viceversa, il valore minimo (=0) della corrente si ottiene per $z_{\text{MIN}} = (2n+1) \frac{\lambda}{4}$ ed in corrispondenza del valore massimo della tensione, che vale $V_{\text{MAX}} = V_0$.

Per concludere, si nota che, nel caso in cui $R \gg R_C$, il valore massimo di tensione ed il valore minimo di corrente si ottengono proprio in corrispondenza del carico: infatti, le relazioni da considerare sono

$$\begin{cases} |V(z)| = |V_0| \cos(\beta z) \\ |I(z)| = |I_0| \frac{R}{R_C} \text{sen}(\beta z) \end{cases}$$

e i valori rispettivamente massimo e minimo si ottengono per $z=0$.

Rapporto d'onda stazionario

Una delle più importanti quantità misurabili sulle linee di trasmissione è il cosiddetto **rapporto d'onda stazionario**, definito come il rapporto tra il valore massimo ed il valore minimo del modulo della tensione o della corrente:

$$\boxed{\text{ROS} = \frac{|V(z)|_{\text{MAX}}}{|V(z)|_{\text{MIN}}} = \frac{|I(z)|_{\text{MAX}}}{|I(z)|_{\text{MIN}}}}$$

In base a quanto visto poco fa, abbiamo due possibilità a seconda del valore del carico alimentato dalla linea:

$$\text{se } R \ll R_C \rightarrow \begin{matrix} V_{\text{MAX}} = V_0 \frac{R_C}{R} \\ V_{\text{MIN}} = V_0 \end{matrix} \longrightarrow \text{ROS} = \frac{R_C}{R}$$

$$\text{se } R \gg R_C \rightarrow \begin{matrix} I_{\text{MAX}} = I_0 \frac{R}{R_C} \\ I_{\text{MIN}} = I_0 \end{matrix} \longrightarrow \text{ROS} = \frac{R}{R_C}$$

In ogni caso, risulta **ROS > 1**.

Inoltre, è chiaro che, in base a quelle due relazioni, se noi riusciamo a misurare la tensione o la corrente lungo la linea, per cui possiamo conoscere il valore del ROS, e conosciamo inoltre il valore di R_C , siamo in grado di valutare il valore della resistenza di carico R .

Diagrammi dell'impedenza di ingresso

Le linee di trasmissione sono state fino ad ora esaminate essenzialmente come mezzo di trasporto di energia da un punto ad un altro, tipicamente da un apparato di generazione ad un carico. Tuttavia, *nel campo delle microonde, esse sono molto importanti anche come veri e propri elementi circuitali*. Il motivo è il seguente: quando si costruiscono dei dispositivi che lavorino con frequenze superiori ai 150 MHz, è difficile realizzare normali elementi circuitali (resistori, induttori, generatori e così via) che si possano ancora considerare a parametri concentrati, per cui risulta necessario adottare l'ipotesi dei parametri distribuiti e quindi considerare anche la presenza delle linee di trasmissione; per considerare tali linee, dato che le dimensioni fisiche delle sezioni di linea sono sufficientemente piccole, è possibile vederle proprio come degli elementi circuitali. Da qui viene la necessità di studiare il comportamento circuitale di queste linee per valori di lunghezza confrontabili con la lunghezza d'onda delle onde che devono trasportare.

Il punto di partenza è ancora una volta costituito dalle equazioni delle linee di trasmissione in assenza di perdite:

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + j z_C I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = j \frac{V_0}{z_C} \sin(\beta z) + I_0 \cos(\beta z) \end{cases}$$

In precedenza, abbiamo già esaminato cosa accade alla impedenza di ingresso $z_i(z) = \frac{V(z)}{I(z)}$, in corrispondenza di una generica distanza z dal carico, quando il

carico stesso z_L è costituito da un cortocircuito o da un circuito aperto: in particolare, abbiamo trovato che

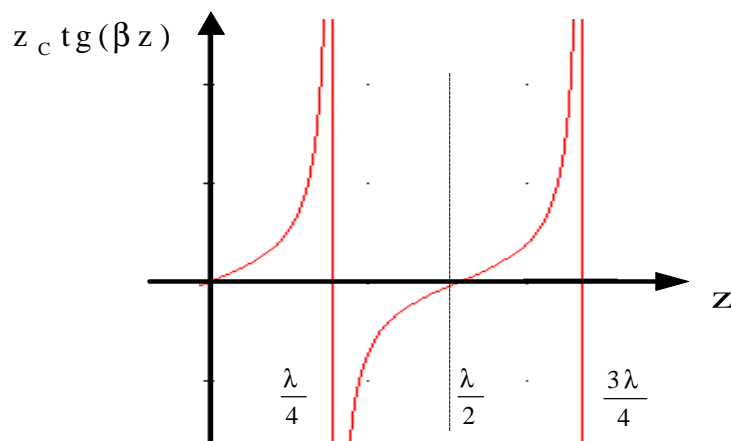
$$\text{se } z_L=0 \text{ (cortocircuito)} \quad \rightarrow \quad z_i = jz_c \operatorname{tg}(\beta z)$$

$$\text{se } z_L=\infty \text{ (circuito aperto)} \quad \rightarrow \quad z_i = -jz_c \operatorname{ctg}(\beta z)$$

Allora, è chiaro che z_i non risulta mai resistiva (in quanto manca comunque della parte reale) e può risultare induttiva o capacitiva a seconda del segno del coefficiente della parte immaginaria: essa risulta induttiva se il segno è positivo, mentre risulta capacitiva in caso contrario.

Possiamo perciò provare a diagrammare i valori del coefficiente della parte immaginaria di z_i , nei due casi, in funzione di z , proprio allo scopo di vedere che carattere (capacitivo o induttivo) ha l'impedenza di ingresso al variare della distanza z cui ci poniamo dal carico.

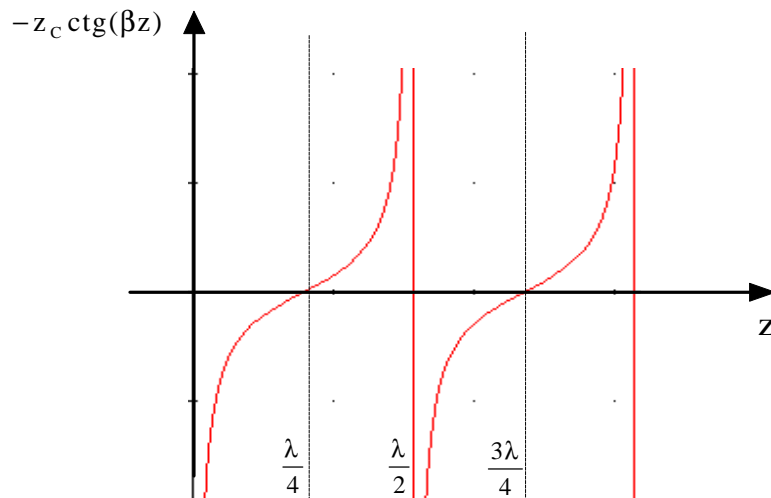
Come primo diagramma riportiamo il coefficiente della parte immaginaria della relazione $z_i = jz_c \operatorname{tg}(\beta z)$, ossia l'andamento della **reattanza di ingresso** (=coefficiente della parte immaginaria della impedenza di ingresso) quando il carico è un semplice cortocircuito:



Questo grafico mostra quanto segue:

- quando siamo a distanza $z < \lambda/4$, la reattanza di ingresso è positiva, ossia è di natura induttiva;
- quando siamo a distanza $\lambda/4 < z < \lambda/2$, la reattanza di ingresso è negativa, ossia di natura capacitiva;
- quando siamo a distanza $z = \lambda/2$, la reattanza di ingresso è nulla, il che significa che la linea di lunghezza $\lambda/2$ si comporta come un cortocircuito;
- a partire da $\lambda/2$ il discorso si ripete ogni tratto di lunghezza $\lambda/2$;
- infine, la reattanza di ingresso va all'infinito a distanza $\frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots, \frac{(2k+1)\lambda}{4}$

Nel secondo grafico riportiamo adesso l'andamento di $-z_c \text{ctg}(\beta z)$ in funzione del valore di z : otteniamo



In questo caso, si osserva quanto segue:

- a distanza $z < \lambda/4$, la reattanza di ingresso è negativa, ossia è di natura capacitiva;
- a distanza $z = \lambda/4$, la reattanza di ingresso si annulla;
- a distanza $\lambda/4 < z < \lambda/2$, la reattanza di ingresso è positiva, cioè induttiva;
- a distanza $z = \lambda/2$, la reattanza di ingresso va all'infinito e lo fa in tutte le distanze multiple intere di $\lambda/2$;
- a partire da $\lambda/2$ il discorso si ripete ogni tratto di lunghezza $\lambda/2$.

In generale, quindi, se esaminiamo l'andamento complessivo (periodico) di questi diagrammi della reattanza di ingresso, possiamo affermare che, a seconda della distanza z dal carico (che è un corto oppure un circuito aperto) alla quale ci poniamo, possiamo vedere (guardando verso il carico) una induttanza oppure una capacità. Ecco, allora, che *una linea di trasmissione, "chiusa" su un cortocircuito o su un circuito aperto, può essere usata come un induttore o un condensatore a seconda della lunghezza della linea stessa.*

Particolare attenzione bisogna fare quando abbiamo un valore infinito (sia positivo sia negativo) della reattanza di ingresso: in base ai diagrammi appena visti, abbiamo, per esempio, valore infinito quando la linea in cortocircuito è lunga $\lambda/4$ oppure quando la linea aperta in corto è lunga $\lambda/2$. In questi casi, è assolutamente necessario prendere in considerazione la parte resistiva dell'impedenza, la quale solo in teoria risulta nulla, mentre nella pratica ha un valore non nullo. Questo corrisponde alla condizione di un circuito a parametri concentrati che si trovi in condizioni di **risonanza parallelo**, il quale, per basse frequenze, presenta infatti una impedenza infinita se si trascura la resistenza.

Nei casi concreti, dunque, la parte resistiva dell'impedenza di ingresso non può essere trascurata: si può dimostrare che essa vale

$$R = \frac{2z_c^2}{r_1 L}$$

dove r_1 è la resistenza serie per unità di lunghezza della linea, z_c è l'impedenza di ingresso della linea ed L la lunghezza della linea stessa, che, come visto prima, deve essere un multiplo dispari di $\lambda/4$ se la linea è in corto o un multiplo pari di $\lambda/4$ se la linea è aperta.

Concludiamo osservando che l'espressione di R appena fornita risulta valida solo sotto due ipotesi fondamentali:

- la prima è che valgano le seguenti relazioni, in base alle quali la quantità αL deve essere piuttosto piccola:

$$\cosh(\alpha L) \cong 1$$

$$\sinh(\alpha L) \cong \alpha L$$

- la seconda è che si possa trascurare il valore di g_2 , in modo da poter scrivere che

$$\alpha = \frac{r_1}{2z_c}$$

Linea di lunghezza $\lambda/4$ come invertitore di impedenza

Consideriamo ancora una volta le equazioni delle linee di trasmissione ottenute prendendo come riferimento per l'asse z il punto in cui c'è il carico e nell'ipotesi di assenza di perdite:

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos(\beta z) + jz_c I_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = I_0 \cos(\beta z) + j\frac{V_0}{z_c} \sin(\beta z) \end{cases}$$

Ricordiamo che V_0 ed I_0 sono i valori della tensione e della corrente relativi al carico e che z_c è l'impedenza caratteristica della linea, definita come $z_c = z_1 / \gamma$.

Abbiamo già definito l'impedenza di ingresso alla sezione z come il rapporto, fissato un certo valore della distanza z dal carico, tra la tensione e la corrente sulla linea:

$$z_i = \frac{V(z)}{I(z)} = z_c \frac{z_L \cos(\beta z) + jz_c \sin(\beta z)}{z_c \cos(\beta z) + jz_L \sin(\beta z)}$$

Questa può anche essere riscritta ponendo in evidenza, al posto dell'impedenza caratteristica della linea z_c , l'impedenza z_L che rappresenta il carico:

$$z_i = \frac{z_L \cos(\beta z) + jz_c \sin(\beta z)}{\cos(\beta z) + j\frac{z_L}{z_c} \sin(\beta z)} = z_L \frac{\cos(\beta z) + j\frac{z_c}{z_L} \sin(\beta z)}{\cos(\beta z) + j\frac{z_L}{z_c} \sin(\beta z)}$$

Vediamo allora quanto vale questa impedenza di ingresso se la calcoliamo a distanza $z=\lambda/4$ dal carico, dove λ è la lunghezza d'onda del segnale che si propaga lungo la linea: sostituendo questa espressione di z otteniamo

$$z_i = z_L \frac{\cos\left(\beta \frac{\lambda}{4}\right) + j \frac{z_C}{z_L} \sin\left(\beta \frac{\lambda}{4}\right)}{\cos\left(\beta \frac{\lambda}{4}\right) + j \frac{z_L}{z_C} \sin\left(\beta \frac{\lambda}{4}\right)}$$

La costante di fase β è legata alla lunghezza d'onda del segnale dalla relazione $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, dalla quale si ricava che $\beta\lambda = 2\pi$ ed anche, quindi, che $\beta \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$. Andando dunque a sostituire nella espressione dell'impedenza di ingresso, è chiaro che, in $\pi/2$, il coseno si annulla mentre il seno vale 1, per cui abbiamo che

$$z_i\left(z = \frac{\lambda}{4}\right) = z_L \frac{j \frac{z_C}{z_L}}{j \frac{z_L}{z_C}} = \frac{z_C^2}{z_L}$$

Abbiamo dunque trovato che ad una distanza di $l/4$ dal carico, l'impedenza di ingresso è pari al rapporto tra il quadrato dell'impedenza caratteristica e l'impedenza del carico.

Nell'ipotesi ulteriore per cui sia

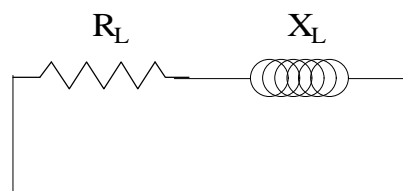
$$\begin{cases} z_C = R_C \\ z_L = R_L + jX_L \end{cases}$$

abbiamo evidentemente che

$$z_i\left(z = \frac{\lambda}{4}\right) = \frac{R_C^2}{R_L + jX_L} = \frac{1}{\frac{R_L}{R_C^2} + j \frac{X_L}{R_C^2}}$$

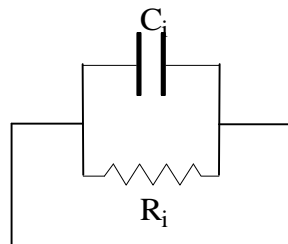
Questa relazione significa quanto segue:

- quando $z=0$, il carico è rappresentato semplicemente da $z_L=R_L+jX_L$ e può quindi essere schematizzato come la serie tra una resistenza ed una induttanza:



- al contrario, a distanza $z=\lambda/4$, il carico, rappresentato adesso non più da z_L ma dall'impedenza di ingresso z_i (la quale tiene conto, oltre che del carico vero e proprio z_L , anche del tratto di linea di lunghezza $\lambda/4$), è costituito da un parallelo tra una resistenza $R_i = \frac{R_C^2}{R_L}$ ed una capacità

$$X_i = -\frac{R_C^2}{X_L} :$$



Da qui deriva il termine **invertitore di impedenza** attribuito al tratto di linea di linea lungo $\lambda/4$: mentre il carico z_L è di natura ohmico-induttiva (serie), il carico visto da una distanza $L=\lambda/4$ diventa ohmico-capacitivo (parallelo).

Osservazione

Consideriamo sempre l'espressione dell'impedenza di ingresso, vista in corrispondenza della generica sezione z , per una linea priva di perdite:

$$z_i(z) = \frac{z_L \cos(\beta z) + j z_C \sin(\beta z)}{\cos(\beta z) + j \frac{z_L}{z_C} \sin(\beta z)}$$

Ricordando che $\beta=2\pi/\lambda$, ci si rende conto facilmente che $z_i(z)$ è costante e pari all'impedenza di carico z_L se consideriamo una sezione di linea a distanza dal carico multipla di $\lambda/2$: infatti, prendendo $z=n\lambda/2$, risulta $\beta z=n\pi$, per cui i termini Coseno risultano pari a ± 1 mentre in termini Seno si annullano.

In modo del tutto analogo, se valutiamo l'impedenza di ingresso in corrispondenza di una arbitraria sezione z_1 e poi ripetiamo il calcolo per una sezione z_2 che si trovi ad una distanza da z_1 pari ad un multiplo di $\lambda/2$, otteniamo ancora la stessa impedenza. Anche qui il motivo è nell'espressione $\beta=2\pi/\lambda$.

Questa proprietà ha come conseguenza evidente il fatto che, data una linea di assegnata lunghezza, essa mantiene la stessa impedenza di ingresso, in qualsiasi sezione, anche se le aggiungiamo o sottraiamo tratti di linea, purché lunghi un multiplo di $\lambda/2$.

Coefficiente di riflessione sul carico

Spesso sorge il problema di collegare due o più linee di trasmissione in cascata: l'effetto di questo collegamento è quello di introdurre una **discontinuità** tra due linee uniformi. In base alle *leggi di Kirchoff*, però, la tensione e la corrente totale devono rimanere continue attraverso la discontinuità. Abbiamo anche visto che la tensione totale di una linea si può considerare come la somma di un'onda diretta che viaggia nel verso positivo del riferimento prescelto e di un'onda riflessa che viaggia nel verso negativo. Supponiamo allora che l'onda diretta valga V_i nel punto di discontinuità e che quella riflessa valga invece V_r . Vediamo, sulla base di questo, come possiamo modificare l'equazione delle linee di trasmissione.

Consideriamo il caso generico della presenza di perdite e prendiamo come riferimento dell'asse z il punto in cui si trova il carico: sappiamo che, sotto queste ipotesi, l'andamento della tensione e della corrente lungo z è definito dalle relazioni

$$\begin{cases} V(z) = V_i e^{\gamma z} + V_r e^{-\gamma z} \\ I(z) = \frac{V_i}{z_c} e^{\gamma z} - \frac{V_r}{z_c} e^{-\gamma z} \end{cases}$$

dove ricordiamo ancora una volta che $\gamma = \alpha + j\beta$ è la costante di propagazione e z_c l'impedenza caratteristica della linea considerata.

Per determinare le costanti V_i e V_r (in generale complesse), sappiamo di dover imporre le condizioni al contorno relative ad una qualsiasi sezione della linea; la scelta più semplice è quella di considerare la sezione di carico, ossia $z=0$: le condizioni al contorno sul carico sono i valori di tensione $V(0)=V_0$ e di corrente $I(0)=I_0$, per cui valgono le relazioni

$$\begin{cases} V(z=0) = V_0 = V_i + V_r \\ I(z=0) = I_0 = \frac{V_i}{z_c} - \frac{V_r}{z_c} \end{cases}$$

Si definisce allora **coefficiente di riflessione sul carico** il seguente rapporto:

$$\rho_L = \frac{V_r}{V_i}$$

Considerando che V_i e V_r sono, in generale, delle costanti complesse, deduciamo che anche ρ_L è una quantità complessa, dotata cioè di un proprio modulo e di una propria fase: $\rho_L = |\rho_L| \angle \theta$.

E' possibile esprimere questo coefficiente in funzione solo dell'impedenza caratteristica della linea z_c e dell'impedenza z_L che rappresenta il carico: per prima cosa, dalle relazioni

$$\begin{cases} V_0 = V_i + V_r \\ I_0 = \frac{V_i}{z_c} - \frac{V_r}{z_c} \end{cases}$$

otteniamo facilmente che

$$\left\{ \begin{array}{l} V_i = V_0 - V_r \\ I_0 = \frac{1}{z_c} [(V_0 - V_r) - V_r] \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_i = \frac{V_0 + z_c I_0}{2} \\ V_r = \frac{V_0 - z_c I_0}{2} \end{array} \right.$$

Allora, applicando la definizione data per ρ_L , abbiamo che

$$\rho_L = \frac{V_r}{V_i} = \frac{V_0 - z_c I_0}{V_0 + z_c I_0}$$

Da qui, dividendo ambo i membri per I_0 e ricordando che $V_0 = z_L I_0$, si ricava che

$$\rho_L = \frac{z_L - z_c}{z_L + z_c}$$

Si deduce che, a parità di linea di trasmissione (ossia a parità di z_c) il coefficiente di riflessione dipende solo dal carico z_L .

Facciamo notare che l'espressione di ρ_L appena ricavata vale comunque venga preso il sistema di riferimento e qualunque sia il regime di tensione e di corrente presente sulla linea.

Coefficiente di trasmissione sul carico

Dalla relazione $\rho_L = \frac{z_L - z_c}{z_L + z_c}$ si deduce una cosa importante: nel caso in cui l'impedenza di carico z_L risulti esattamente pari all'impedenza caratteristica z_c , il coefficiente di riflessione risulta nullo e quindi vale zero anche V_r , cioè appunto l'onda riflessa.

In altre parole, possiamo affermare che, *quando $z_L = z_c$, manca l'onda riflessa, il che è sinonimo di adattamento del carico.*

In questa situazione, tutta l'onda (o l'energia) incidente viene trasmessa al carico come se esso fosse una linea infinita di impedenza z_c . Questa condizione si può anche esprimere dicendo che è unitario il cosiddetto **coefficiente di trasmissione sul carico**, definito dalla relazione

$$t = \frac{V_L}{V_i} = \frac{2z_L}{z_L + z_c}$$

E' possibile esprimere anche l'impedenza di ingresso, in corrispondenza della generica sezione z , in funzione del coefficiente di riflessione sul carico: intanto,

sappiamo che l'espressione generale per l'impedenza di ingresso si ricava dal sistema

$$\begin{cases} V(z) = V_i e^{\gamma z} + V_r e^{-\gamma z} \\ I(z) = \frac{V_i}{z_C} e^{\gamma z} - \frac{V_r}{z_C} e^{-\gamma z} \end{cases}$$

come rapporto tra tensione e corrente, per cui vale

$$z_i(z) = \frac{V_i e^{\gamma z} + V_r e^{-\gamma z}}{\frac{V_i}{z_C} e^{\gamma z} - \frac{V_r}{z_C} e^{-\gamma z}} = z_C \frac{V_i e^{\gamma z} + V_r e^{-\gamma z}}{V_i e^{\gamma z} - V_r e^{-\gamma z}}$$

Facciamo l'ipotesi che ci siano perdite nulle sulla linea: ciò significa che $\gamma = \alpha + j\beta = j\beta$, per cui si ottiene evidentemente che

$$z_i(z) = z_C \frac{V_i e^{j\beta z} + V_r e^{-j\beta z}}{V_i e^{j\beta z} - V_r e^{-j\beta z}} = z_C \frac{V_i + V_r e^{-j2\beta z}}{V_i - V_r e^{-j2\beta z}}$$

Dividendo ambo i membri per V_i e ricordando che $\rho_L = V_r/V_i$, concludiamo dunque che

$$z_i(z) = z_C \frac{1 + \rho_L e^{-j2\beta z}}{1 - \rho_L e^{-j2\beta z}}$$

Sempre in funzione del coefficiente di riflessione è possibile esprimere anche il rapporto d'onda stazionario ROS, ossia il rapporto tra il valore massimo e quello minimo assunti dal modulo della tensione (o dalla corrente). Intanto, tali valori massimo e minimo vanno ricavati dalla solita equazione

$$V(z) = V_i e^{\gamma z} + V_r e^{-\gamma z}$$

E' infatti evidente da qui che il massimo di tensione si ha quando l'onda incidente è in fase con quella riflessa, mentre il minimo si ha quando le due onde sono in opposizione di fase: quindi

$$\begin{aligned} |V|_{\text{MAX}} &= |V_i| + |V_r| \\ |V|_{\text{MIN}} &= |V_i| - |V_r| \end{aligned}$$

Applicando la definizione di ROS, abbiamo che

$$\text{ROS} = \frac{|V|_{\text{MAX}}}{|V|_{\text{MIN}}} = \frac{|V_i| + |V_r|}{|V_i| - |V_r|}$$

Dividendo ambo i membri per il modulo di V_i e ricordando sempre che $\rho_L = V_r/V_i$, si deduce subito che

$$\boxed{\text{ROS} = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|}}$$

Da quella relazione, con qualche semplice passaggio matematico, si ricava anche $|\rho_L|$ in funzione del ROS:

$$|\rho_L| = \frac{\text{ROS} - 1}{\text{ROS} + 1}$$

Ancora, è chiaro che, così come possiamo avere un valore massimo ed un valore minimo per $|V(z)|$, potremo avere anche un valore massimo ed uno minimo per l'impedenza di ingresso, la quale è definita come $V(z)/I(z)$. Vediamo allora quanto valgono questi valori.

L'impedenza di ingresso, in presenza di perdite, è definita come

$$z_i = z_c \frac{V_i e^{\gamma z} + V_r e^{-\gamma z}}{V_i e^{\gamma z} - V_r e^{-\gamma z}} = z_c \frac{e^{\gamma z} + \rho_L e^{-\gamma z}}{e^{\gamma z} - \rho_L e^{-\gamma z}} = z_c \frac{1 + \rho_L e^{-2\gamma z}}{1 - \rho_L e^{-2\gamma z}}$$

Il suo valore massimo si ha quando il numeratore assume il valore massimo e quando il denominatore assume il suo valore minimo: considerando che il termine esponenziale $e^{-2\gamma z}$ ha il valore 1 come valore massimo, deduciamo che risulterà

$$\boxed{z_{i,\text{MAX}} = z_c \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = z_c * \text{ROS}}$$

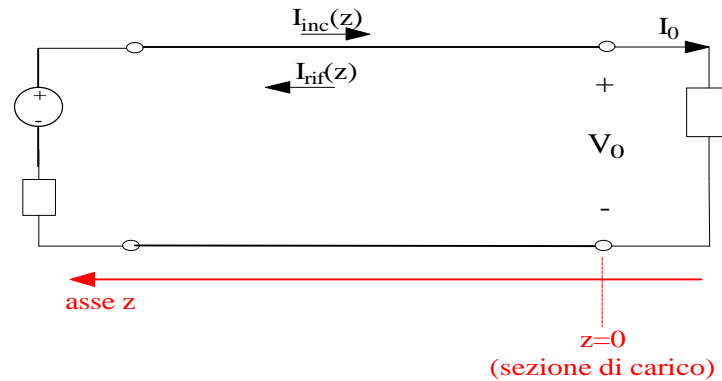
Evidentemente, il valore minimo dell'impedenza di ingresso si ricava con un discorso inverso (valore minimo del numeratore e valore massimo del denominatore), per cui

$$\boxed{z_{i,\text{MIN}} = z_c \frac{1 - |\rho_L|}{1 + |\rho_L|} = \frac{z_c}{\text{ROS}}}$$

Osservazione

Possiamo arrivare al concetto di *coefficiente di riflessione* seguendo una strada leggermente diversa (anche se equivalente) da quella seguita prima.

Supponiamo di avere una linea di trasmissione, di lunghezza L , alimentata da un generatore sinusoidale e chiusa su un carico generico z_L :



L'azione del generatore è quella di produrre un'onda (incidente) di tensione ed un'onda (incidente) di corrente che dal generatore stesso si propagano verso il carico: avendo preso l'asse z con origine ($z=0$) sul carico e diretta dal carico verso il generatore, abbiamo già visto che queste due onde incidenti avranno espressioni del tipo

$$\begin{cases} V_{inc}(z) = V_i e^{\gamma z} \\ I_{inc}(z) = \frac{V_i}{z_C} e^{\gamma z} = y_C V_i e^{\gamma z} \end{cases}$$

Dobbiamo capire cosa può succedere quando questa onda progressiva arriva sul carico.

In primo luogo, dire che la linea di trasmissione è chiusa sul carico z_L significa dire che vale la condizione al contorno $V(0) = z_L I(0)$ tra la tensione totale $V(0)$ e la corrente totale $I(0)$ in corrispondenza del carico stesso. Ci sono allora vari casi:

- il primo è quello in cui $z_L = z_C$ (condizione di adattamento), dove z_C è l'impedenza caratteristica della linea: in questa situazione, si osserva evidentemente che l'onda incidente prima riportata soddisfa, da sola, la condizione $V(0) = z_L I(0)$, per cui, a conferma di quanto detto precedentemente, non si ha la formazione di un'onda riflessa (o regressiva), ossia tutta la potenza fornita dal generatore viene completamente "assorbita" dal carico;
- il secondo caso (quello più realistico) è invece quello in cui $z_L \neq z_C$: questa volta, l'onda incidente non soddisfa la condizione $V(0) = z_L I(0)$, per cui deve necessariamente eccitarsi l'onda riflessa, che dovrà avere una intensità tale da soddisfare la suddetta condizione al contorno.

Ponendoci dunque in questo secondo caso, avremo un'onda riflessa la cui espressione sarà del tipo

$$\begin{cases} V_{\text{rif}}(z) = V_r e^{-\gamma z} \\ I_{\text{rif}}(z) = -\frac{V_r}{z_C} e^{-\gamma z} = -y_C V_r e^{-\gamma z} \end{cases}$$

La condizione al contorno sul carico è dunque

$$V_{\text{inc}}(0) + V_{\text{rif}}(0) = z_L (I_{\text{inc}}(0) + I_{\text{rif}}(0))$$

e, sostituendo le espressioni delle due onde, essa equivale a

$$V_i + V_r = z_L y_C (V_i - V_r)$$

A questo punto, dato che l'ampiezza dell'onda incidente è univocamente determinata dalle sorgenti che generano tale onda, possiamo ritenere noto il valore di V_i e possiamo perciò ricavarci, dall'ultima relazione, il valore di V_r :

$$V_r = \frac{z_L y_C - 1}{z_L y_C + 1} V_i$$

Detto questo, possiamo definire il *coefficiente di riflessione* (per la tensione e in corrispondenza del carico) come rapporto tra l'ampiezza dell'onda riflessa e l'ampiezza dell'onda incidente:

$$\rho_L = \frac{V_r}{V_i} = \frac{z_L y_C - 1}{z_L y_C + 1} = \frac{z_L - z_C}{z_L + z_C} = -\frac{y_L - y_C}{y_L + y_C}$$

Si osserva immediatamente che ρ_L vale 0 quando $z_L = z_C$, come anticipato prima. E' inoltre facile verificare che il "*coefficiente di riflessione*" per la corrente (sempre in corrispondenza del carico) risulta essere

$$\rho'_L = \frac{I_r}{I_i} = -\rho_L$$

Autore: **Sandro Petrizzelli**
 e-mail: sandry@iol.it
 sito personale: <http://users.iol.it/sandry>