Appunti di Elettronica
Capitolo 1 – Concetti introduttivi

Testi consigliati

- P.E. GRAY - R. G. MEYER
Circuiti integrati analogici
- J. MILLMAN - A. GRABEL
Microelettronica
- F. CORSI
La reazione negli stati amplificatori elementari
II Edizione - Biblios 1997
- SEDRA - SMITH
Microelectronic Circuits
Saunders College Publishing
- LACAITA
Circuiti elettronici
Edizione Città Studi - Milano

Nozioni propedeutiche: *Elettrotecnica - Dispositivi elettronici*

Un po' di storia

1895	Primo radio transistor (Marconi)
1904	Diodo a vuoto (Fleming) - Comincia l'era dell'elettronica
1906	Diodo a vuoto (De Forest)
1925	Prima dimostrazione TV
1935	FET
1940	Radar
1947	BJT (Shockley)
1958	Primi circuiti integrati alla Texas Instruments ed alla Fairchild Semiconductors
1968	1° Amplificatore Operazionale: μA-709
1972	1° microprocessore 8088 a 8 bit (Intel)

Negli ultimi 30 anni, lo sviluppo dell'Elettronica è <u>impressionante</u>.

Introduzione

Premessa

Lo sviluppo dei **circuiti integrati** ha aggiunto una nuova dimensione allo studio dei *circuiti elettronici* ed i metodi classici di progettazione di *circuiti a componenti discreti* lasciano progressivamente il posto alla progettazione del sistema elettronico visto nel suo insieme, comprendente lo studio dei materiali, delle tecnologie, dei dispositivi e delle soluzioni circuitali.

Il corso di **Elettronica Applicata** si propone di fornire una introduzione all'analisi ed alla progettazione dei **circuiti analogici** ([1]) di uso più comune nelle applicazioni dell'elettronica. Il punto di vista preferenziale è quello della tecnologia dei circuiti integrati, per cui viene dato ampio spazio allo studio delle soluzioni più tipiche in questo ambito.

Il dominio di applicazione dei circuiti analogici integrati riguarda il trattamento di segnali il cui spettro di frequenze si estende dalla frequenza nulla (corrente continua) fino ad alcune decine (al più qualche centinaio) di MHz. Si tratta, quindi, di circuiti che, per le loro dimensioni, possono essere sempre considerati **a parametri concentrati**.

Una particolare enfasi viene attribuita allo studio ed al confronto delle diverse soluzioni circuitali in grado di fornire le migliori prestazioni a parità di dispositivi impiegati.

L'esposizione è suddivisa in due parti fondamentali:

- la prima è dedicata all'analisi delle reti da un punto di vista statico (o quasi statico): in questa parte rientra lo studio generale delle *reti resistive*, includendo lo studio della *polarizzazione*, del comportamento *ai piccoli segnali* ed *ai grandi segnali* (a centro banda) dei vari *stadi amplificatori* senza e con *reazione*;
- la seconda parte tratta dello studio dei circuiti da un punto di vista dinamico: essa include gli aspetti del *comportamento in frequenza* e della *stabilità* dei circuiti RC ([2]).

I circuiti di impiego più ricorrente sono, in genere, utilizzati come esempi per illustrare nei dettagli l'applicazione delle varie metodologie generali.

Il corso presuppone la conoscenza dei principi fondamentali dell'*elettrotecnica*, del funzionamento e dei modelli circuitali dei *componenti elettronici* e degli strumenti matematici e numerici di base per la soluzione dei *sistemi di equazioni algebriche non lineari* e di *equazioni differenziali ordinarie*.

[1] Con questa terminologia ci si riferisce a circuiti in grado di elaborare segnali elettrici *analoghi* ai fenomeni fisici che rappresentano.
[2] Sono i circuiti composti solo ad elementi resistivi (R) e capacitivi (C).

Segnali analogici e digitali - Low voltage

Si definisce "**segnale analogico**" una grandezza elettrica (una *tensione* o una *corrente*), continua nel tempo, "*analoga*" (ossia proporzionale) ad un fenomeno fisico che rappresenta. Un facile esempio di segnale analogico è la tensione elettrica prodotta da un microfono, il quale converte il segnale vocale, cioè onde di pressione, in una tensione ad esso proporzionale in ogni istante.

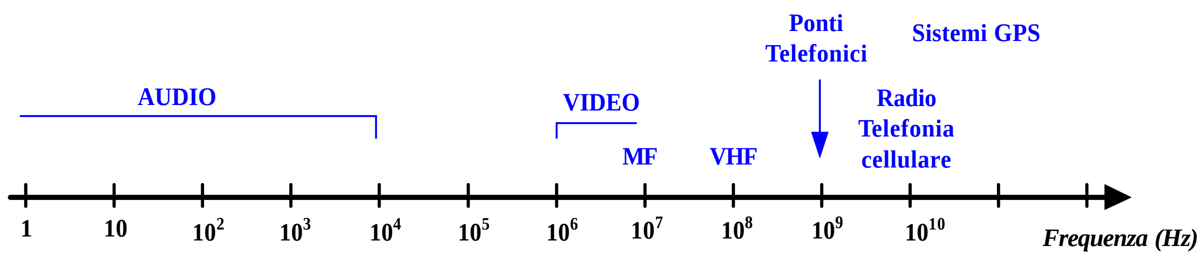
In questo corso ci occupiamo solo di segnali di tipo analogico aventi le seguenti caratteristiche:

ampiezza:	dal μV al V
frequenza:	da 0 Hz a centinaia di MHz e oltre
potenza:	dal nW al kW

Nella realizzazione dei dispositivi e dei circuiti integrati, uno degli obbiettivi principali che si tende a raggiungere è il cosiddetto **low voltage** (basso voltaggio), necessario per ottenere anche basse dissipazioni di potenza (**low power**), ma necessario anche perché, data la sempre maggiore scala di integrazione dei circuiti, bisogna evitare di sollecitare i materiali isolanti ([3]): a parità di dimensioni dei dispositivi (dimensioni sempre più piccole), quanto minori sono i voltaggi, tanto minori sono i campi elettrici prodotti.

Range di frequenza e approssimazione dei "parametri concentrati"

Al giorno d'oggi, nelle applicazioni in cui sono coinvolti i circuiti elettronici, le frequenze utilizzate vanno tra 0 Hz (funzionamento in continua) ad alcune centinaia di MHz, arrivando quasi al GHz. A questo proposito, è possibile indicare schematicamente alcune delle principali applicazioni che coinvolgono i circuiti elettronici, suddivise in base alla frequenza di lavoro:



Il limite principale, nella frequenza di lavoro di un circuito elettronico, deriva essenzialmente da due fattori:

- in primo luogo, la possibilità o meno di applicare l' "*approssimazione a parametri concentrati*", ossia il fatto di poter ritenere il circuito "privo di dimensioni" (in modo da assumere la simultaneità degli eventi elettrici all'interno di un elemento circuitale);

[3] Ad esempio, l'ossido di gate in un transistore MOS

- in secondo luogo, i "*limiti fisici*" dei dispositivi di cui si compone il circuito.

Vediamo allora qualche dettaglio in più su questo aspetto.

La condizione perché un circuito si possa ritenere ***"a parametri concentrati"*** *è che la lunghezza d'onda l del segnale applicato sia molto maggiore delle dimensioni geometriche del circuito;* questa condizione vincola anche la frequenza di lavoro f in quanto essa è legata alla lunghezza d'onda dalla nota relazione $\boxed{\lambda \cdot f = c}$, dove c è la **velocità della luce** nel mezzo considerato (nel vuoto, essa vale notoriamente $3*10^8$ m/sec).

Supponiamo, per esempio, che il segnale applicato al nostro circuito abbia una frequenza $f=10^{11}$ Hz, ossia 100 GHz; applicando la relazione $\lambda \cdot f=c$ e facendo l'approssimazione che la velocità della luce sia quella nel vuoto, si trova che la lunghezza d'onda vale

$$l = \frac{c}{f} = 3\text{mm}$$

Abbiamo cioè trovato che, per un segnale a frequenza di 100 GHz, l'approssimazione dei parametri concentrati è senz'altro valida se il circuito ha dimensioni fisiche inferiori a 3 millimetri. Quindi, per esempio, se consideriamo un circuito costituito semplicemente da un *transistore MOS a canale corto*, le cui dimensioni sono dell'ordine di 1-2 μm e anche meno, possiamo senz'altro affermare che il dispositivo sia a parametri concentrati, nonostante la frequenza del segnale sia così elevata.

Evidentemente, però, ad un simile valore di frequenza di lavoro, per quanto il transistore si possa considerare a parametri concentrati, <u>il suo rendimento è pessimo</u>: infatti, come avremo modo di vedere in seguito, ad una tale frequenza gli effetti capacitivi del dispositivo sono molto elevati e quindi il dispositivo stesso non è senz'altro in grado di "seguire" l'andamento del segnale come dovrebbe. Ecco, quindi, che, nonostante la validità dell'approssimazione dei parametri concentrati, *le caratteristiche fisiche del dispositivo impongono un preciso limite alla frequenza massima di lavoro.*

Oltre a questo, c'è anche da considerare che, se i transistori e gli altri dispositivi hanno dimensioni ormai molto piccole, sono senz'altro più grandi le **linee di interconnessione** dei circuiti stessi: queste linee possono essere di lunghezza maggiore di 3 mm, il che impone di considerarle come delle **linee a parametri distribuiti**, visto che introducono dei ritardi (dell'ordine, generalmente, di pochi nanosecondi); alle basse frequenze, questi ritardi sono trascurabili, ma, per frequenze medio-alte, essi diventano importanti in quanto producono sfasamenti spesso fastidiosi del segnale in uscita rispetto a quello in ingresso.

Ad esempio consideriamo una linea senza perdite lunga 30 cm: essa introduce un ritardo δ, sul segnale che lungo di essa si propaga, valutabile come

$$\delta = \frac{\ell}{v} = \frac{30(\text{cm})}{3*10^8(\text{m/s})} = \frac{30*10^{-2}(\text{m})}{3*10^8(\text{m/s})} = 1(\text{ns})$$

Componenti a circuiti elettronici

*Un **circuito elettronico** è definibile come una interconnessione di componenti* (resistori, condensatori, dispositivi a semiconduttore, etc.). In generale, si distingue il componente fisico dall'elemento circuitale.

L'analisi e la progettazione circuitale si basano su due aspetti fondamentali:

- lo studio dei *modelli elettrici* dei singoli componenti;
- la *teoria dei circuiti* intesa come descrizione matematica delle proprietà dei modelli interconnessi.

Il **modello circuitale** di un componente è una descrizione delle relazioni tra le grandezze elettriche ai *terminali* del componente stesso, ottenuta a partire dalla descrizione del componente in termini fisico-strutturali.

La **teoria dei circuiti** parte dai principi generali di *conservazione dell'energia* e *conservazione della carica elettrica* e giunge ad espressioni matematiche del comportamento di una **interconnessione di modelli**.

Limiti di validità dei modelli utilizzati

L'analisi e la progettazione dei circuiti elettronici si basano sull'uso di **modelli** di componenti (attivi e passivi) e sull'uso delle **tecniche circuitali**.

I *limiti di validità dell'analisi* sono legati dunque principalmente a due fattori:

- i *modelli* adottati per i singoli dispositivi;
- le *tecniche circuitali*, intese sia come tecniche numeriche sia come tecniche analitiche.

Nell'ambito, poi, delle tecniche circuitali, è sempre importante verificare che sia possibile applicare l'ipotesi dei parametri concentrati: per valori di frequenza particolarmente elevati, si può andare anche oltre tale approssimazione, entrando nell'ambito dei **circuiti a microonde**.

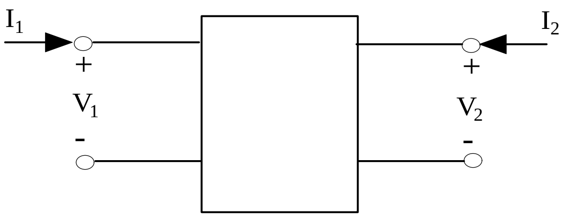
Definizione di "caratteristica elettrica" di un dispositivo

Dobbiamo abituarci a considerare i dispositivi elettronici (a parametri concentrati) descritti solo dalle loro **caratteristiche**. Supponiamo perciò di avere un generico dispositivo o un generico circuito, con un qualsiasi numero di terminali: *prende il nome di **caratteristica elettrica** del dispositivo o del circuito l'equazione che definisce il comportamento elettrico del dispositivo o del circuito ai suoi morsetti.*

Nel caso di un elemento a due soli terminali, la sua caratteristica sarà rappresentata dall'equazione che lega la tensione alla porta dell'elemento con la corrente alla stessa porta. Tanto per fare un esempio semplice, la caratteristica di un *resistore lineare tempo-invariante* è data dalla relazione $V=R\cdot I$, mentre la caratteristica di un *diodo a giunzione pn* è data dalla nota relazione (dovuta a Schockley)

$$I = I_S\left(e^{\frac{V}{V_T}} - 1\right)$$

Mentre, per un elemento a due terminali come un resistore lineare o un diodo, la caratteristica è una sola in quanto sono solo due le grandezze elettriche cui si può fare riferimento per caratterizzare il comportamento ai morsetti, per un elemento a più terminali ci sono invece più possibilità. Consideriamo, per esempio, un dispositivo fisico a 3 terminali (ad esempio un transistore), che sappiamo di poter rappresentare, a livello circuitale, mediante un cosiddetto "*elemento biporta*":



In questo caso, le grandezze elettriche cui possiamo fare riferimento sono ben 4, per cui le possibilità a disposizione sono le seguenti:

- "**caratteristica ingresso-uscita in tensione**": si tratta del grafico della funzione $f(V_1,V_2)=0$, ossia di una relazione solo tra la tensione in ingresso e quella in uscita;
- "**caratteristica ingresso-uscita in corrente**": si tratta del grafico della funzione $f(I_1,I_2)=0$;
- "**transcaratteristica**": si tratta del grafico della funzione $f(V_1,I_2)=0$ oppure di quello della funzione $f(I_1,V_2)$; in entrambi i casi, cioè, si riporta la relazione tra variabili diverse di ingresso e di uscita;
- "**caratteristica di ingresso**": si tratta del grafico della funzione $f(V_1,I_1)=0$;
- "**caratteristica di uscita**": si tratta del grafico della funzione $f(V_2,I_2)=0$.

N.B. Osserviamo che, per indicare una grandezza elettrica, *useremo lettere maiuscole quando essa è rigorosamente costante oppure quando varia in modo talmente lento da poterla ritenere costante, mentre invece useremo lettere minuscole quando essa varia con una frequenza non troppo bassa.*

Caratteristiche statiche e dinamiche

Esistono fondamentalmente due tipi di **caratteristiche**:

- si parla di **caratteristica statica** quando il segnale applicato al dispositivo o al circuito ha una frequenza molto bassa (si parla di segnale "lento"), ossia quando esso varia tanto lentamente da non "eccitare" le capacità;

- si parla invece di **caratteristica dinamica** quando il segnale applicato ha una frequenza tale da dover includere gli effetti capacitivi e da dover quindi introdurre i fenomeni dinamici che essi producono.

Linearità di un elemento e di un circuito

Al concetto di *caratteristica* è strettamente legato quello di **linearità** di un dispositivo e/o di un circuito.

Per comodità, diamo la definizione di "elemento lineare" riferendoci ad un elemento a due soli morsetti: *si dice che un elemento a due morsetti è* ***lineare*** *quando è lineare la sua caratteristica, ossia quando, preso il piano nel quale viene rappresentata tale caratteristica, essa risulta essere una retta passante per l'origine.*

In natura, tutti i dispositivi fisici sono non lineari: la linearità, quindi, non è altro che una idealizzazione, una approssimazione matematica molto utile (sotto certe ipotesi) per semplificare la risoluzione dei problemi. D'altra parte, come vedremo, la non-linearità di un circuito non è sempre un aspetto negativo: ci sono infatti applicazioni (come la moltiplicazione di frequenza, lo "scatto" e altre) che non sarebbero possibili senza gli elementi non lineari.

Da un punto di vista analitico, possiamo anche caratterizzare meglio la proprietà di linearità di una caratteristica. Indicata con y=f(x) la caratteristica dell'elemento o del circuito in esame, diremo che esso è **lineare** se sono soddisfatte le seguenti due proprietà:

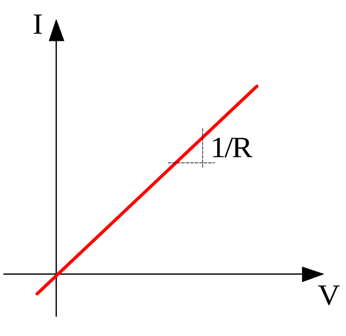
1. **proprietà additiva**: $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2) \quad \forall x_1 \text{ e } \forall x_2$

2. **proprietà di omogeneità**: $f(kx)=kf(x) \quad \forall x \text{ e } \forall k \in \Re$

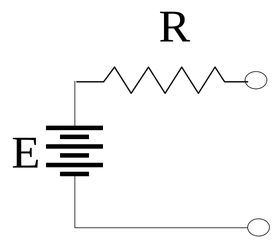
Come già anticipato prima, si può verificare che *gode di queste due proprietà solo una funzione f(x) che, rappresentata nel piano (x,y), corrisponda ad una retta passante per l'origine.*

Facciamo subito qualche esempio.

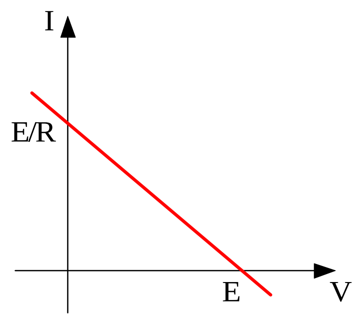
Un elemento senz'altro **lineare** è un resistore tempo-invariante la cui caratteristica sia data dalla relazione V=R·I: infatti, nel piano I-V (tensione in ascisse e corrente in ordinate), questa relazione rappresenta una retta passante per l'origine e di pendenza 1/R.



Diverso è invece il caso di un circuito fatto nel modo seguente:



L'equazione che descrive il comportamento di questo circuito alla sua porta è $V=E-R\cdot I$ e la sua rappresentazione grafica nel piano I-V, cioè appunto la caratteristica del circuito, è la seguente:



Evidentemente, si tratta di una retta NON passante per l'origine. Una caratteristica di questo tipo (cioè appunto una retta non passante per l'origine) si ha in tutti i circuiti in cui siano presenti solo elementi lineari eccezion fatta per i *generatori indipendenti*.

Allora, a proposito dei circuiti, la definizione di linearità è la seguente: *si dice che un circuito a due morsetti è **lineare** quando è costituito da tutti elementi lineari tranne i generatori indipendenti, ossia quando la sua caratteristica è una retta (passante o meno per l'origine).*

Sono poi da considerarsi elementi lineari tutti i *generatori pilotati* la cui caratteristica rientra in uno dei seguenti casi:

$V_2 = \alpha V_1$ generatore di tensione pilotato in tensione (**VCVS**)
$I_2 = \beta I_1$ generatore di corrente pilotato in corrente (**CCCS**)
$V_2 = \rho I_1$ generatore di tensione pilotato in corrente (**CCVS**)
$V_2 = \gamma I_1$ generatore di corrente pilotato in tensione (**VCCS**)

Un circuito contenente solo resistori, sorgenti dipendenti e sorgenti indipendenti si dice **circuito resistivo**. Di solito, lo si include nella categoria dei circuiti lineari: a rigore, però, solo i resistori ed eventualmente i generatori dipendenti (se rientrano tra quelli indicati poco fa) formano la parte lineare del circuito.

Il principio della sovrapposizione degli effetti

La linearità di un circuito elettrico, così come è stata definita nel paragrafo precedente, è molto importante in quanto consente di applicare il **principio della sovrapposizione degli effetti**, sintetizzato dal seguente teorema:

Teorema - *Sia dato un circuito resistivo lineare tempo-invariante; supponiamo che esista una sola soluzione per questo circuito; supponiamo inoltre che il circuito contenga a generatori di tensione e b generatori di corrente; sotto queste ipotesi, una qualsiasi uscita del circuito $y_J(t)$ è esprimibile come combinazione lineare delle sole forme d'onda degli a+b generatori, ossia*

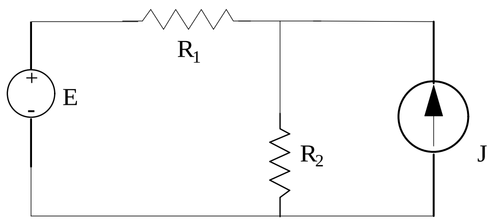
$$\boxed{y_J(t) = H_1 V_{S,1} + H_2 V_{S,2} + ... + H_\alpha V_{S,\alpha} + K_1 I_{S,1} + K_2 I_{S,2} + ... + K_\beta V_{S,\beta}}$$

dove i coefficienti H e K dipendono sia dagli elementi presenti nel circuito sia dall'uscita y_J prescelta; al contrario, essi non dipendono dalla forma d'onda dei generatori.

Questo principio, come specificato nell'enunciato, è dunque applicabile solo a circuiti che siano lineari. Su questa proprietà di linearità, però, c'è da intendersi bene. Lo facciamo con gli esempi seguenti.

Esempio

Consideriamo il circuito rappresentato in figura:



Vogliamo determinare I_2 e V_2 applicando il teorema di sovrapposizione: l'enunciato del teorema dice che i valori di tali incognite saranno dati da una combinazione lineare delle forme d'onda dei generatori di tensione e di corrente.

Nel caso generale di α generatori di tensione e β generatori di corrente, avremmo quindi che

$$I_2 = H_1 V_{S,1} + H_2 V_{S,2} + ... + H_a V_{S,a} + K_1 I_{S,1} + K_2 I_{S,2} + ... + K_b V_{S,b}$$
$$V_2 = H'_1 V_{S,1} + H'_2 V_{S,2} + ... + H'_a V_{S,a} + K'_1 I_{S,1} + K'_2 I_{S,2} + ... + K'_b V_{S,b}$$

ossia dovremmo determinare tutti i coefficienti presenti in tali relazioni.

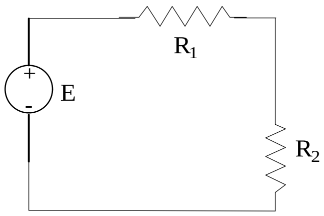
Nel circuito considerato, invece, abbiamo $\alpha=1$ generatori di tensione e $\beta=1$ generatori di corrente, per cui quelle relazioni si riducono alle seguenti:

$$I_2 = H_1 V_{S,1} + K_1 I_{S,1} = H_1 E + K_1 J$$
$$V_2 = H'_1 V_{S,1} + K'_1 I_{S,1} = H'_1 E + K'_1 J$$

Deduciamo che i coefficienti da determinare sono solo 4. Vediamo allora come si ottengono questi coefficienti; il metodo consiste di due passi fondamentali:

1. per ottenere i coefficienti relativi ai generatori di tensione basta risolvere il circuito che si ottiene da quello iniziale <u>eliminando</u> del tutto i generatori di corrente, ossia sostituendoli con dei *circuiti aperti*;
2. in modo analogo, per ottenere i coefficienti relativi ai generatori di corrente basta risolvere il circuito che si ottiene da quello iniziale <u>eliminando</u> del tutto i generatori di tensione, ossia sostituendoli con dei *cortocircuiti*.

Vediamo cosa accade nel nostro caso. Per determinare H_1 e H'_1, che sono i coefficienti relativi all'unico generatore di tensione, consideriamo il circuito che si ottiene da quello iniziale eliminando l'unico generatore di corrente:



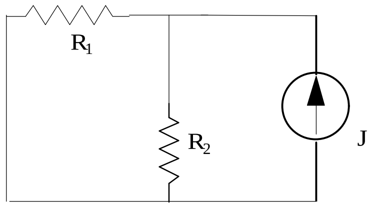
Applicando la regola del *partitore di tensione*, abbiamo che $V_{V,2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$, da cui si ha anche che

$$I_{V,2} = \frac{V_{V,2}}{R_2} = \frac{1}{R_1 + R_2} E$$

I coefficienti ricercati sono allora

$$\begin{cases} H_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \\ H'_1 = \dfrac{1}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

Per determinare, invece, i coefficienti relativi al generatore di corrente dobbiamo considerare il circuito che si ottiene da quello iniziale eliminando il generatore di corrente:



Applicando questa volta la regola del partitore di corrente, otteniamo $I_{V,2} = \frac{G_2}{G_1+G_2} J$, da cui

$$V_{V,2} = \frac{1}{G_1+G_2} J$$

Quindi, i coefficienti sono

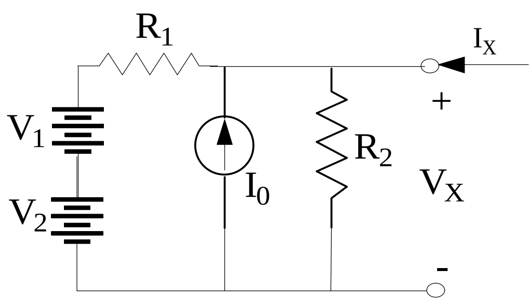
$$\begin{cases} K_1 = \frac{G_2}{G_1+G_2} \\ K'_1 = \frac{1}{G_1+G_2} \end{cases}$$

In conclusione, possiamo affermare che

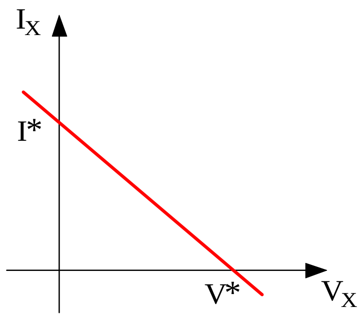
$$I_2 = H_1E + K_1J = \frac{R_2}{R_1+R_2}E + \frac{G_2}{G_1+G_2}J$$
$$V_2 = H'_1E + K'_1J = \frac{1}{R_1+R_2}E + \frac{1}{G_1+G_2}J$$

Esempio

Consideriamo il seguente circuito monoporta:



Vogliamo determinare la caratteristica del circuito, ossia la curva di I_X in funzione di V_X. Si tratterà, chiaramente, di una retta non passante per l'origine, in quanto il circuito contiene solo resistori lineari e generatori indipendenti. La sua rappresentazione grafica sarà dunque del tipo seguente:



ed avrà una equazione del tipo

$$I_X = I^* - \frac{I^*}{V^*} V_X$$

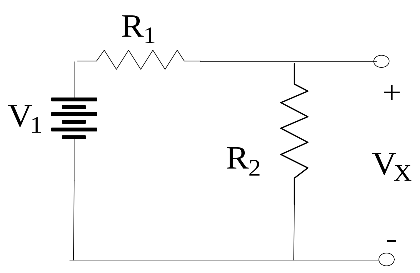
Come indicato nella figura, possiamo determinare i parametri di questa equazione andando a ricavare le due intersezioni I^* e V^* rispettivamente con l'asse delle ordinate e con l'asse delle ascisse: infatti

- l'intersezione I^* con l'asse delle ordinate è la cosiddetta **corrente di cortocircuito**, ossia la corrente che fluisce nel circuito quando i suoi due terminali sono in corto tra di loro;
- l'intersezione V^* con l'asse delle ascisse è invece la cosiddetta **tensione a vuoto**, ossia la tensione misurata ai terminali quando essi sono in condizioni di circuito aperto, ossia quando la corrente I_X che fluisce in tali terminali è nulla.

Calcoliamo perciò tali intersezioni. Possiamo applicare il principio della sovrapposizione degli effetti, visto che il circuito è lineare. Dobbiamo dunque passivare, di volta in volta, due dei tre generatori.

Cominciamo dal calcolo della tensione a vuoto V^*.

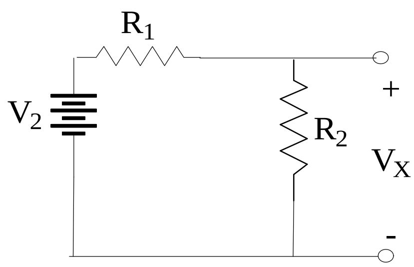
Passiviamo, come primo caso, il generatore di tensione V_2 ed il generatore di corrente I_0, in modo tale che il circuito diventi il seguente:



La tensione ai capi del circuito, applicando la regola del partitore di tensione, è

$$V'_X = V_{R2} = \frac{R_2 V_1}{R_1 + R_2}$$

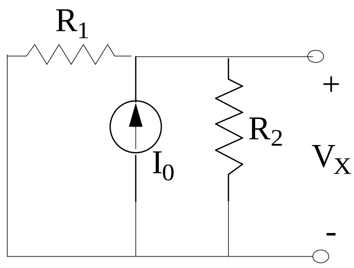
Adesso passiviamo V_1 e reinseriamo V_2:



Si ottiene ovviamente

$$V''_X = V_{R2} = \frac{R_2 V_2}{R_1 + R_2}$$

Infine, passiviamo entrambi i generatori di tensione e lasciamo in funzione solo quello di corrente:



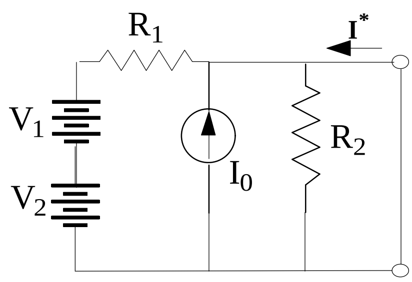
In questo caso, abbiamo le due resistenze in parallelo, per cui

$$V'''_X = V_{R2} = \frac{R_1 R_2 I_0}{R_1 + R_2}$$

In conclusione, quindi, la tensione a vuoto del circuito è

$$V^* = V'_X + V''_X + V'''_X = \frac{R_2(V_1 + V_2) + R_1 R_2 I_0}{R_1 + R_2}$$

Passiamo alla corrente di cortocircuito, la quale si ottiene, in base alla definizione data prima, ponendo in corto i terminali del circuito:

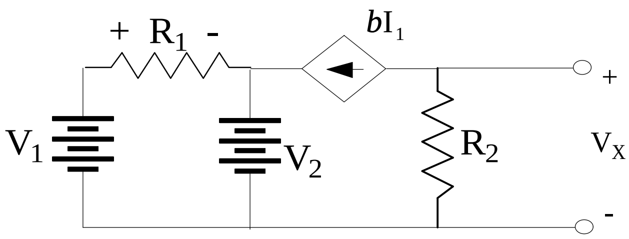


Il cortocircuito dei terminali, di fatto, esclude la resistenza R_2, per cui possiamo scrivere che

$$I^* = I_0 + \frac{V_1 + V_2}{R_1}$$

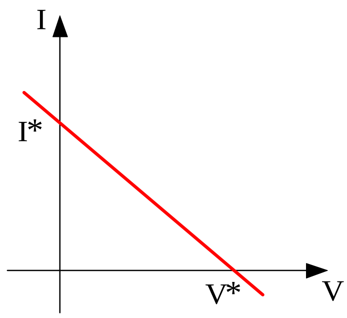
Esempio

Vediamo ora un altro esempio di determinazione della caratteristica di un circuito. In particolare, concentriamoci sul circuito seguente:



La particolarità sta evidentemente nella presenza di un *generatore pilotato di corrente* (la grandezza pilotante è la corrente nel resistore R_1, per cui si tratta di un CCCS, ossia *Current Controlled Current Source*).

Anche in questo caso, essendo il circuito costituito solo da resistori lineari (il CCCS è un resistore biporta ma è lineare) e da generatori indipendenti, la caratteristica sarà del tipo seguente:



Essa corrisponderà ad una equazione del tipo

$$I_X = I^* - \frac{I^*}{V^*} V_X$$

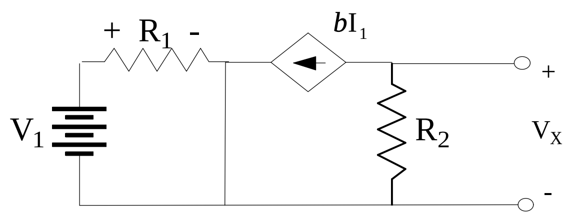
Per determinare questa equazione, possiamo calcolare innanzitutto la tensione a vuoto V^* e poi possiamo calcolare la corrente di cortocircuito I^* oppure anche direttamente la pendenza della retta, che corrisponde al reciproco della resistenza di ingresso quando tutti i generatori indipendenti sono passivati.

Cominciamo dal calcolo di V^*, che effettuiamo applicando ancora una volta la sovrapposizione degli effetti.

Prima ancora di applicare questo principio, osserviamo però che la tensione che ci interessa è $V^* = V_{R2} = R_2 I_{R2}$: considerando che si tratta della tensione a vuoto, ossia quando la corrente in ingresso è $I_X=0$, deduciamo, tramite la LKC, che $I_{R2}=-\beta I_1$, per cui $V^* = -\beta R_2 I_1$.

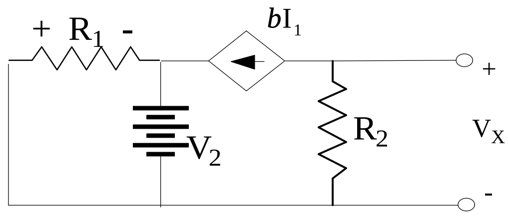
Per conoscere la tensione a vuoto dobbiamo dunque determinare I_1 sempre a vuoto, ossia sempre per $I_X=0$. Per fare questo calcolo, applichiamo, come detto, la sovrapposizione degli effetti.

Passivando il generatore V_2, il circuito diventa il seguente:



La presenza di quel cortocircuito ci dice subito, applicando la LKT, che $I'_1 = \frac{V_1}{R_1}$.

Passivando adesso il generatore V_1, otteniamo il circuito seguente:



Il discorso è formalmente identico a prima, per cui $I''_1 = -\frac{V_2}{R_1}$.

Possiamo dunque concludere che

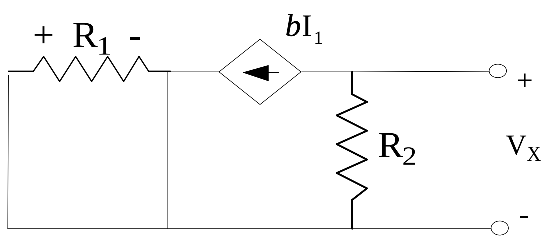
$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_1} = \frac{1}{R_1}(V_1 - V_2)$$

e quindi, sostituendo nella relazione $V^* = -\beta R_2 I_1$, abbiamo che

$$V^* = -\beta \frac{R_2}{R_1}(V_1 - V_2)$$

Questa è dunque la tensione a vuoto. Per determinare la pendenza della retta che rappresenta la caratteristica nel piano I-V, abbiamo detto che essa corrisponde al reciproco, cambiato di segno, della **resistenza di ingresso** del circuito, ossia della resistenza misurata ai terminali del circuito quando tutti i generatori indipendenti al suo interno sono passivati.

Allora, quando questi generatori sono passivati, il circuito è fatto nel modo seguente:



Dato che R_1 ha i terminali in corto, la corrente I_1 è nulla e quindi anche il generatore pilotato fornisce corrente nulla: concludiamo perciò che la resistenza di ingresso è R_2, per cui la pendenza della caratteristica è $-1/R_2$.

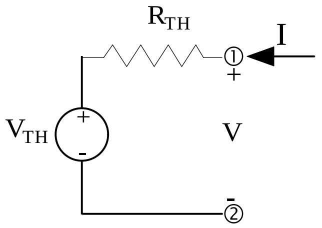
L'equazione della caratteristica del circuito considerato è dunque $I_X = \frac{V^*}{R_2} - \frac{1}{R_2} V_X$.

Teorema di Thevenin

L'enunciato di questo teorema è noto:

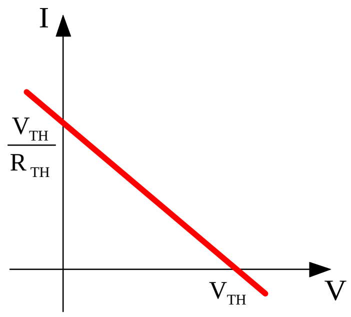
Teorema: Sia dato un circuito monoporta che sia lineare, resistivo e tempo-invariante; siano 1 e 2 i morsetti di questo monoporta e sia (V,I) la coppia delle sue variabili di porta; supponiamo che il circuito sia "ben definito", ossia che nessun elemento del circuito sia collegato a qualche variabile esterna al circuito; supponiamo infine che, "pilotando" il circuito con un generatore di corrente I(t) qualsiasi, il circuito stessa ammetta una sola soluzione (ossia una sola "risposta").

Sotto queste ipotesi, il circuito dato può essere sostituito con un circuito ad esso EQUIVALENTE del tipo seguente:



In questo circuito, la tensione V_{TH} è la tensione alla porta del circuito quando quest'ultimo è in condizioni di circuito aperto (**tensione a vuoto**); R_{TH} è invece la **resistenza di ingresso** al circuito quando tutti i generatori indipendenti presenti nel circuito sono stati passivati.

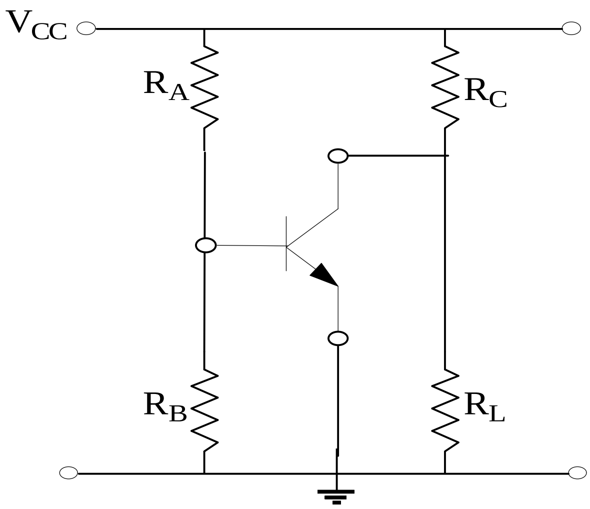
L'utilità dell'equivalente di Thevenin è abbastanza evidente: infatti, se abbiamo un circuito o una porzione di circuito a cui possiamo applicare il teorema di Thevenin, siamo subito in grado di dire che la caratteristica di questo circuito o di questa porzione di circuito, quale che sia la sua complessità, è comunque del tipo riportato nella figura seguente.



Tutto sta, chiaramente, a calcolare V_{TH} e R_{TH}, ma è chiaro quali facilitazioni di calcolo si abbiano nel momento in cui è possibile utilizzare una caratteristica di questo tipo.

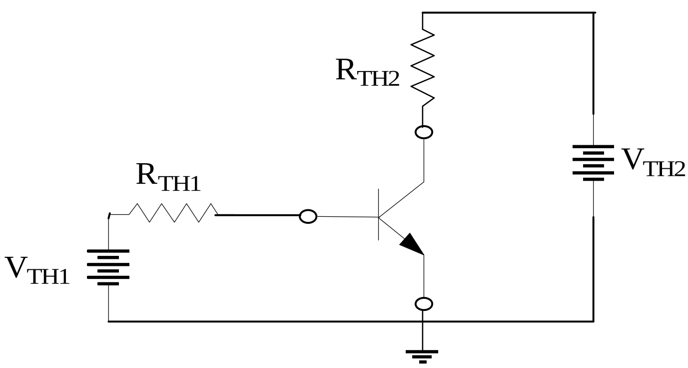
Esempio

Consideriamo il seguente *circuito di polarizzazione* di un *BJT npn*:

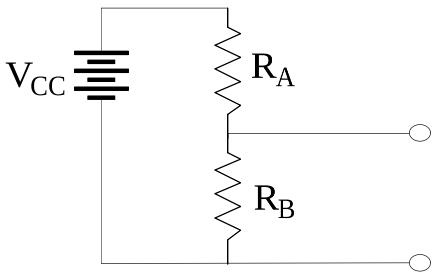


Vogliamo determinare l'influenza che la rete elettrica appena illustrata ha sui morsetti di *collettore* (C) e di *emettitore* (E) del BJT.

Per fare questo, possiamo procedere in due modi distinti: il primo è quello più complicato, in quanto consiste nel ragionare e fare i conti sulla rete così come è stata disegnata; il secondo modo, senz'altro più comodo, è quello, invece, di applicare il teorema di Thevenin, in modo da avere, sia alla *porta Base-Emettitore* sia alla *porta Collettore-Emettitore*, non la rete così com'è ma il suo equivalente di Thevenin:



Cominciamo allora a trovare l'*equivalente di Thevenin alla porta di ingresso*, ossia alla porta base-emettitore. La rete, vista da questa porta (dalla parte del BJT) è fatta nel modo seguente:



In condizioni di corrente entrante nulla, è evidente che la tensione alla porta (cioè la tensione a vuoto) è quella ai capi di R_B, per cui essa vale

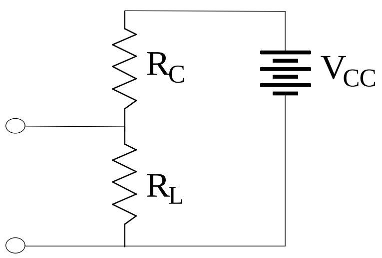
$$V_{TH1} = V_B = \frac{R_B V_{CC}}{R_B + R_A}$$

Inoltre, nel momento in cui passiviamo V_{CC}, è chiaro che le due resistenze sono in parallelo, per cui la resistenza di ingresso è

$$R_{TH1} = \frac{R_B R_A}{R_B + R_A}$$

Abbiamo così determinato l'equivalente di Thevenin alla porta di ingresso.

Facciamo lo stesso alla porta di uscita, ossia la porta collettore-emettitore: la rete, vista da questa porta, è



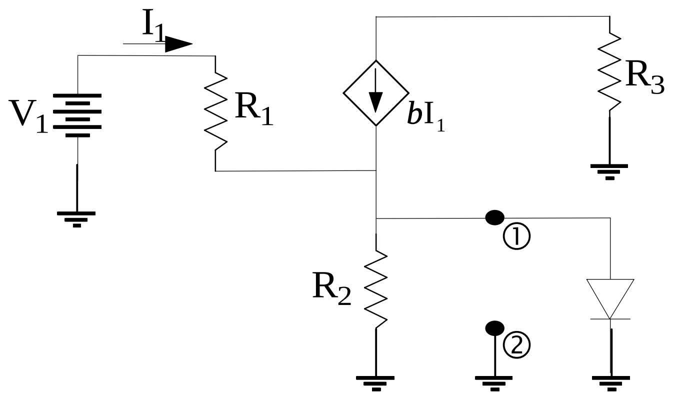
Essa è evidentemente analoga a quella vista prima, per cui diciamo subito che

$$V_{TH2} = \frac{R_L V_{CC}}{R_C + R_L}$$

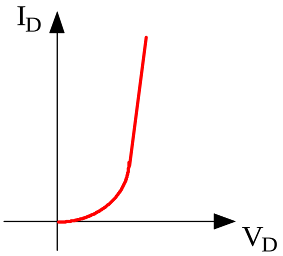
$$R_{TH2} = \frac{R_C R_L}{R_C + R_L}$$

Esempio

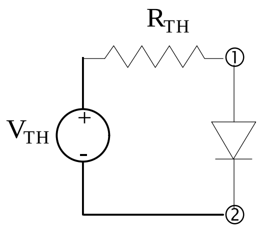
Consideriamo il seguente circuito:



Vogliamo il **punto di lavoro** del circuito nell'ipotesi che la caratteristica del diodo collegato ai morsetti 1 e 2 sia la seguente:

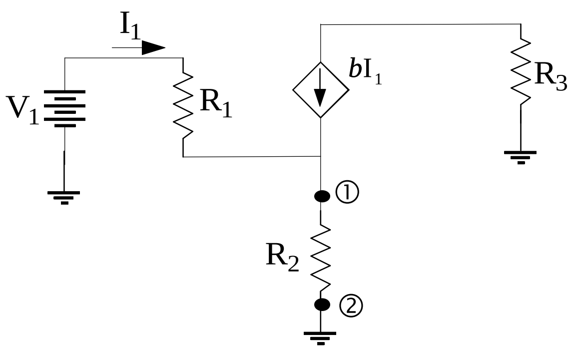


Possiamo risolvere questo problema determinando l'equivalente di Thevenin del circuito, escluso il diodo, alla porta 1-2: così facendo, il circuito diventa semplicemente



e quindi ci basterà intersecare la caratteristica dell'equivalente con quella del diodo in modo da ottenere il punto di lavoro.

Cominciamo allora a calcolare la tensione a vuoto del circuito, ossia la tensione quando la corrente ai terminali 1 e 2 è nulla. Il circuito, in questa condizione, può essere disegnato nel modo seguente:



E' subito evidente che la tensione V_{TH} che noi cerchiamo è la tensione ai capi di R_2: indicata allora con I_2 la corrente che fluisce in questo resistore, possiamo scrivere che $V_{TH} = R_2 I_2$. Dobbiamo calcolare I_2.

Applicando la LKC al nodo 1, otteniamo che

$$I_2 = I_1 + \beta I_1 = (1+\beta)I_1$$

per cui la tensione a vuoto risulta $V_{TH} = R_2(1+\beta)I_1$.

Dobbiamo calcolare I_1. Possiamo intanto applicare la LKT alla maglia costituita da R_1 stesso e da R_2: risulta infatti

$$V_1 = V_{R1} + V_{R2} = R_1 I_1 + I_2 R_2 = R_1 I_1 + R_2(1+\beta)I_1 = [R_1 + R_2(1+\beta)]I_1$$

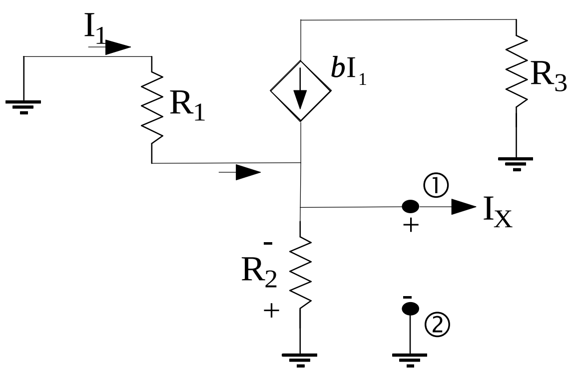
da cui

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1 + R_2(1+\beta)}$$

Sostituendo nell'espressione della V_{TH}, concludiamo dunque che

$$\boxed{V_{TH} = \frac{R_2(1+\beta)V_1}{R_1 + R_2(1+\beta)}}$$

Passiamo adesso a calcolare la resistenza di Thevenin R_{TH}, ossia la resistenza vista dai morsetti del circuito quando tutti i generatori indipendenti sono passivati; in questa condizione, il circuito diventa il seguente:



Dobbiamo calcolare il rapporto tra la tensione applicata in ingresso e la corrente misurata ai terminali.

Applicando la LKC al nodo 1, abbiamo che

$$I_X = I_1 + \beta I_1 + I_2$$

La corrente I_2 che scorre in R_2 si ricava considerando che R_2 e R_1 sono in parallelo: la tensione ai loro capi è la tensione di porta V_X, per cui $I_2 = \frac{V_X}{R_2}$ e quindi

$$I_X = \frac{V_X}{R_2} + (1+\beta)I_1$$

Stesso discorso per I_1:

$$I_X = \frac{V_X}{R_2} + (1+\beta)\frac{V_X}{R_1} \quad \rightarrow \quad R_{TH} = \frac{V_X}{I_X} = \frac{1}{\frac{1+\beta}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

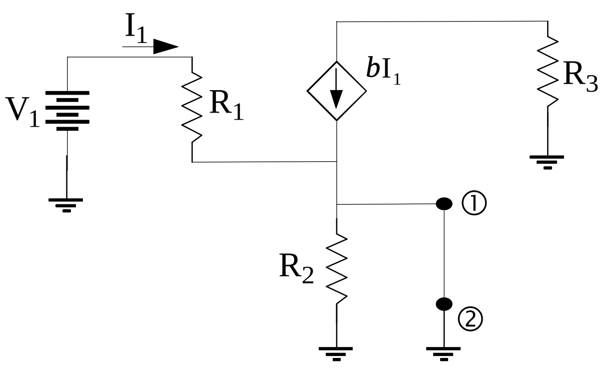
Si nota, da questa formula, che la resistenza di ingresso è il parallelo tra la resistenza R_2 e la resistenza $\frac{R_1}{1+\beta}$, per cui possiamo brevemente scrivere che

$$\boxed{R_{TH} = \frac{1+\beta}{R_1} // R_2}$$

Osservazione

C'è anche un altro modo per calcolare il valore di R_{TH}: dato che conosciamo V_{TH}, possiamo infatti calcolare questa resistenza come rapporto tra V_{TH} (tensione a vuoto) e la cosiddetta **corrente di cortocircuito**, ossia la corrente che fluisce tra i terminali del circuito (da quello a potenziale maggiore a quello a potenziale minore) quando tali terminali vengono cortocircuitati.

Il circuito su cui ragionare è dunque il seguente:



E' ovvio che, in questo circuito, la resistenza R_2 è passivata, per cui è come se non ci fosse.

La corrente che fluisce dal nodo 1 al nodo 2 è evidentemente

$$I_{SC} = I_1 + \beta I_1 = (1+\beta) I_1$$

dove il pedice "SC" sta per "short circuit", ossia per "cortocircuito".
La corrente I_1 è quella che fluisce nel resistore R_1, il quale ha evidentemente un terminale a massa e l'altro connesso al polo positivo del generatore V_1: di conseguenza, la tensione ai capi di tale resistore è proprio V_1, per cui $I_1 = G_1 V_1$ e quindi possiamo scrivere che

$$I_{SC} = (1+\beta) G_1 V_1$$

Infine, la resistenza equivalente di Thevenin è

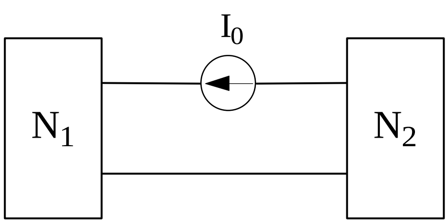
$$R_{TH} = \frac{V_{TH}}{I_{SC}} = \frac{\dfrac{R_2(1+\beta)V_1}{R_1 + R_2(1+\beta)}}{(1+\beta)G_1 V_1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2(1+\beta)}$$

ed è ovviamente lo stesso risultato trovato prima.

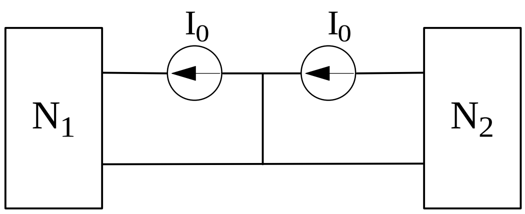
Questo esercizio serve a mostrare un principio generale: *dovendo analizzare un circuito resistivo che contiene un solo elemento non lineare (come il diodo nel caso esaminato), è sempre opportuno sostituire la porzione di circuito non contenente tale elemento con il suo equivalente di Thevenin.*

Operazioni di "shift" dei generatori di corrente

Supponiamo di avere un circuito fatto nel modo seguente:

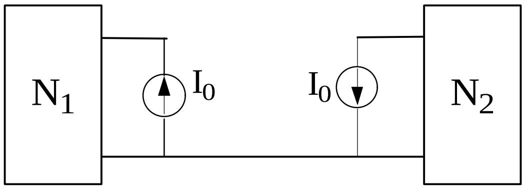


Vogliamo provare a trovare una *configurazione circuitale equivalente* a questa, ma con il generatore di corrente disposto in modo più comodo.
La prima **operazione di equivalenza** che possiamo compiere consiste in uno spostamento (shift) del generatore di corrente nel modo seguente:



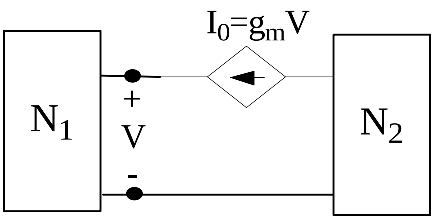
E' infatti evidente che la LKC non subisce alcuna variazione rispetto alla situazione iniziale.

Una seconda operazione è inoltre la seguente:

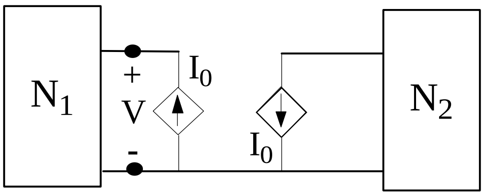


Anche in questo caso non abbiamo modifiche della LKC rispetto alla situazione iniziale, per cui questa configurazione circuitale è del tutto equivalente a quella di partenza.

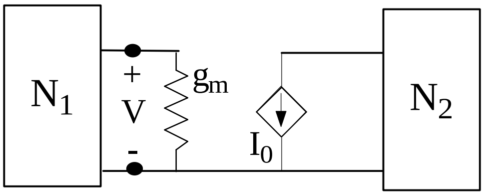
E' ovvio che possiamo compiere gli stessi passaggi se, al posto del generatore indipendente di corrente, ne avessimo uno dipendente. Supponiamo ad esempio che il circuito sia fatto nel modo seguente:



Eseguendo la stessa operazione compiuta prima, otteniamo



C'è però una differenza fondamentale con prima: infatti, il generatore pilotato che si trova a sinistra vede applicata ai suoi capi la stessa tensione che lo pilota; trattandosi di un generatore di corrente, esso si comporta perciò come un resistore di resistenza pari a $1/g_m$, per cui la configurazione finale è la seguente:

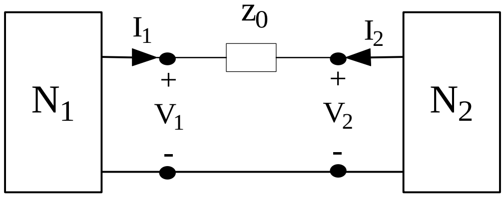


Questa operazione di equivalenza sarà utilizzata spesso nel seguito, ma è anche utile per introdurre un’altra operazione di equivalenza spesso applicata nella pratica.

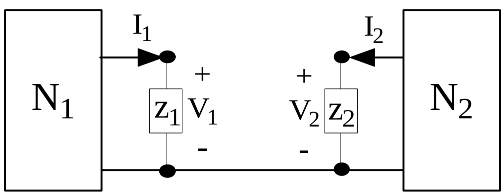
Equivalente di Miller

Circuito equivalente di Miller

Supponiamo di avere un circuito fatto nel modo seguente:



Ci chiediamo se sia possibile determinare due impedenze z_1 e z_2 in modo che questa configurazione circuitale sia equivalente a quest’altra:



La soluzione di questo problema è immediata: infatti, nella configurazione circuitale di partenza è evidente che

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{z_0}$$

mentre nell’altra configurazione circuitale si ha che $I_1 = \frac{V_1}{z_1}$.

Eguagliando le due espressioni di I_1 ed esplicitando z_1, si ottiene quindi

$$\boxed{z_1 = \frac{z_0}{1 - \frac{V_2}{V_1}}}$$

Facendo lo stesso discorso per la corrente I_2, si ha che

$$\frac{V_2 - V_1}{z_0} = I_2 = \frac{V_2}{z_2}$$

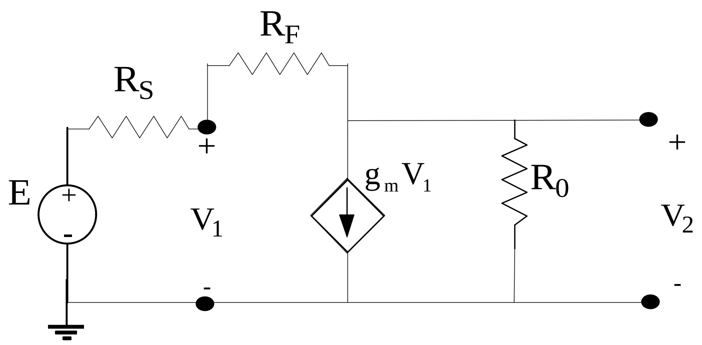
da cui possiamo concludere che

$$\boxed{z_2 = \frac{z_0}{1 - \frac{V_1}{V_2}}}$$

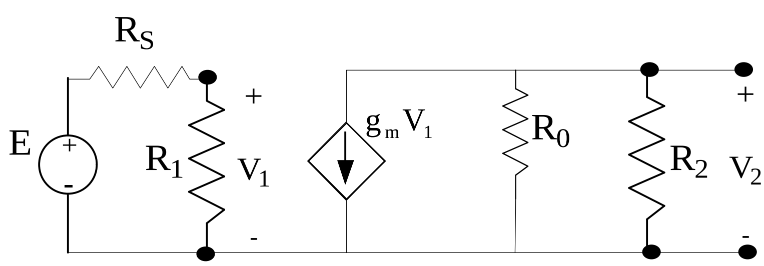
Abbiamo dunque trovato l' **equivalente di Miller** del circuito considerato.

Esempio

Consideriamo il circuito seguente:



La resistenza che vogliamo spostare usando l'equivalenza di Miller è R_S La configurazione circuitale cui vogliamo arrivare è dunque la seguente:



Le formule da applicare per il calcolo di R_1 e R_2 sono quelle viste nel paragrafo precedente, ossia

$$R_1 = \frac{R_F}{1 - \frac{V_2}{V_1}} \qquad\qquad R_2 = \frac{R_F}{1 - \frac{V_1}{V_2}}$$

Tutto sta, evidentemente, a calcolare quanto vale il rapporto V_2/V_1 nel circuito di partenza.

Intanto, applicando la LKT, abbiamo che $V_1 = R_F I_{RF} + V_2$. Per trovare quanto vale il rapporto V_2/V_1 dobbiamo dunque trovare una espressione della I_{RF} in funzione di una o entrambe queste tensioni. Questa espressione si ottiene facilmente applicando la LKC: si vede infatti che

$$I_{RF} = g_m V_1 + G_0 V_2$$

Sostituendo nell'equazione trovata prima, abbiamo che

$$V_1 = R_F\left(g_m V_1 + G_0 V_2\right) + V_2$$

e da qui possiamo concludere che

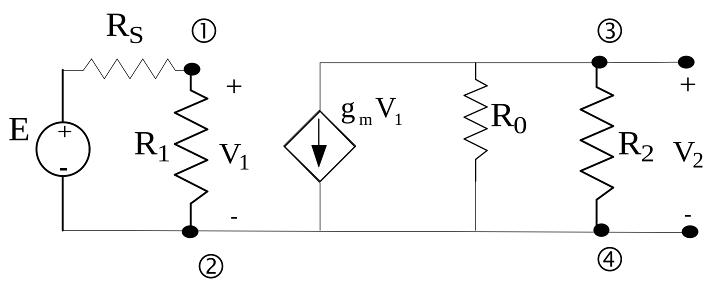
$$\boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{1 - R_F g_m}{R_F G_0 + 1}}$$

Quindi, le due resistenze da porre al posto di R_F sono le seguenti:

$$R_1 = \frac{R_F}{1 - \dfrac{1 - R_F g_m}{R_F G_0 + 1}}$$

$$R_2 = \frac{R_F}{1 - \dfrac{R_F G_0 + 1}{1 - R_F g_m}}$$

Il circuito cui siamo pervenuti è dunque il seguente:



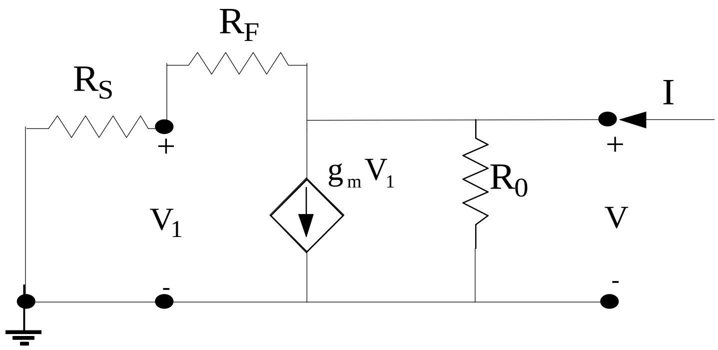
Di questo circuito può essere interessante calcolare quanto vale il **guadagno di tensione** del circuito, ossia quanto vale il rapporto $A_V = \frac{V_2}{E}$ tra la tensione in ingresso E e quella in uscita V_2 (a vuoto). Si nota infatti che

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_S} E$$

per cui

$$A_V = \frac{V_2}{E} = \frac{V_2}{V_1}\frac{V_1}{E} = \left(\frac{1-R_F g_m}{R_F G_0 + 1}\right)\left(\frac{R_1}{R_1 + R_S}\right)$$

Un'altra figura di merito che possiamo calcolare del circuito in esame è la resistenza equivalente di Thevenin (altrimenti detta **resistenza di uscita**). Tuttavia, per effettuare questo calcolo, dobbiamo fare attenzione ad una cosa fondamentale: per definizione, ***il calcolo della R_{TH} si effettua calcolando il rapporto tensione-corrente alla porta del circuito quando i generatori indipendenti presenti nel circuito stesso sono passivati;*** calcolare il rapporto tensione-corrente in uscita equivale a porre in uscita un generatore di tensione V, nel misurare la corrispondente corrente assorbita I e nel fare il rapporto tra le due quantità; quindi, il circuito su cui andiamo a ragionare è il seguente:



Questo circuito è chiaramente diverso da quello di partenza, per cui avrà anche un equivalente di Miller diverso. Di conseguenza, se vogliamo sfruttare l'equivalente di Miller al fine di calcolare $R_{TH}=V/I$, dobbiamo applicare questa operazione di equivalenza a questo circuito e non utilizzare quella applicata prima al circuito di partenza.

Premesso questo, passiamo al calcolo vero e proprio. E' evidente che non è necessario applicare l'equivalente di Miller in quanto il circuito è abbastanza semplice.

Intanto, V_1 è la tensione ai capi di R_S, per cui $V_1 = R_S I_{RS}$. Inoltre, applicando la LKC abbiamo che

$$I_{RS} - g_m V_1 - I_{R0} + I = 0$$

da cui si ricava che $(1-g_m R_S)I_{RS} = G_0 V - I$.

La corrente I_{RS} è quella che fluisce nei resistori R_S ed R_F, che sono in serie e che si trovano sottoposti alla tensione di ingresso V: quindi

$$I_{RS} = \frac{V}{R_S + R_F}$$

da cui, sostituendo nella relazione di prima, otteniamo

$$\frac{1-g_m R_S}{R_S + R_F} V = G_0 V - I$$

Da questa relazione possiamo infine concludere che

$$\boxed{R_{TH} = \frac{V}{I} = \frac{1}{G_0 - \dfrac{1 - g_m R_S}{R_S + R_F}}}$$

Autore: **Sandro Petrizzelli**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry