Appunti di Fisica II
Campo magnetico e correnti stazionarie

FORZE MAGNETICHE SULLA CORRENTE ELETTRICA

E' noto che *una carica puntiforme q, in modo con velocità $\vec{v}$ all'interno di una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico $\vec{B}$, subisce una forza (detta **forza di Lorentz**) data da*

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Questa azione del campo magnetico deve necessariamente essere vera anche quando le cariche sono in moto, ossia quando, nel loro insieme, esse costituiscono una **corrente elettrica**. Quindi, *il campo magnetico esercita una forza su una corrente elettrica.* Vediamo qualche dettaglio in più.

Consideriamo le N **cariche mobili** presenti nell'unità di volume di un conduttore. Indichiamo con $\vec{v}_i$ la velocità della carica i-sima e con $\vec{F}_i$ la forza esercitata su di essa dal campo magnetico. In base a quanto detto prima, possiamo scrivere, per la carica i-sima, che

$$\vec{F}_i = q\vec{v}_i \times \vec{B}$$

Possiamo adesso sommare sulle N cariche, in modo da ottenere la **forza totale** che il campo magnetico esercita sull'unità di volume:

$$\vec{F}_T = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} q\vec{v}_i \times \vec{B} = q\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i\right)\times \vec{B} = qN\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i\right)\times \vec{B}$$

Se consideriamo la **velocità media** delle particelle cariche, ossia

$$< \vec{v} >= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i$$

possiamo evidentemente riscrivere la forza totale come

$$\vec{F}_T = qN < \vec{v} > \times \vec{B}$$

D'altra parte, la densità di corrente è proprio $\vec{J} = Nq < \vec{v} >$, per cui concludiamo che

$$\vec{F}_T = \vec{J} \times \vec{B}$$

Abbiamo quindi ricavato che *la forza totale esercitata da un campo magnetico $\vec{B}$ sull'unità di volume interessato da un flusso di cariche elettriche è pari al prodotto vettoriale dello stesso campo con il vettore densità di corrente elettrica.*

Se ora supponiamo che la corrente sia trasportata da un **conduttore filiforme** di sezione costante ΔS, possiamo calcolare la forza agente su un tratto di lunghezza $d\ell$: infatti, indicano con dV il volume corrispondente al tratto di lunghezza $d\ell$, possiamo scrivere che la forza su di esso esercitata dal campo magnetico è

$$d\vec{F} = \vec{F}_T dV = \vec{F}_T\left(\Delta\vec{S} \bullet d\vec{\ell}\right) = \left(\vec{J} \times \vec{B}\right)\left(\Delta\vec{S} \bullet d\vec{\ell}\right) = \left[\vec{J}\left(\Delta\vec{S} \bullet d\vec{\ell}\right)\right] \times \vec{B} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Da notare che, nell'ultimo passaggio, abbiamo posto $\vec{J}\left(\Delta\vec{S} \bullet d\vec{\ell}\right) = Id\vec{\ell}$ conservando nel segmento orientato $d\vec{\ell}$ l'informazione di direzione e verso che prima era contenuta in $\vec{J}$.

Abbiamo dunque concluso che

$$d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$$

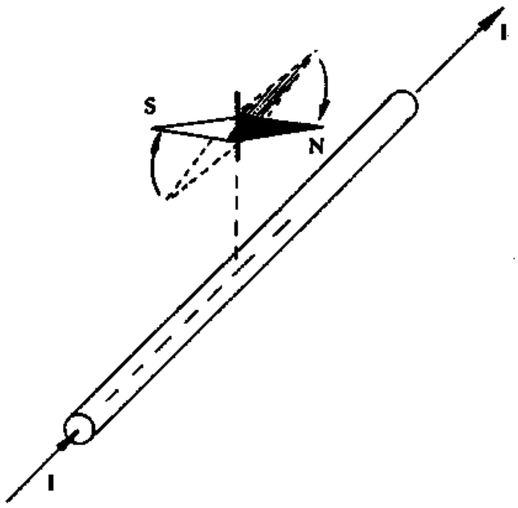
Se adesso integriamo, possiamo ottenere la forza magnetica agente sull'intero circuito preso in esame.

D'altra parte, così come notoriamente accade in presenza del cosiddetto **effetto Hall**, le cariche in un conduttore immerso in un campo magnetico subiscono una forza magnetica che tende a spingerle trasversalmente al conduttore stesso, fino a quando si viene a creare un campo elettrico $\vec{E}_H$ che compensa la forza magnetica sulle cariche mobili ed annulla l'accelerazione media trasversale su di esse.

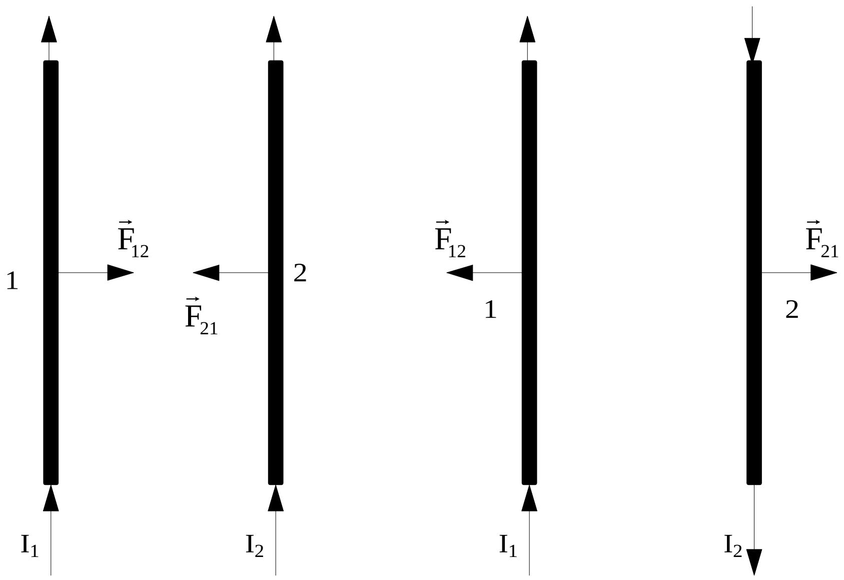
C'è inoltre da considerare un fatto: il conduttore è globalmente neutro, per cui alle N cariche mobili devono senz'altro corrispondere N cariche fisse, di segno opposto, che subiscono lo stesso campo $\vec{E}_H$ e quindi la stessa forza complessiva che il campo magnetico avrebbe creato da solo sulle cariche mobili. Questo giustifica il fatto che, quando un conduttore immerso in un campo magnetico è attraversato da una corrente I, la forza $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$ agisce sulla struttura meccanica del conduttore (nonostante invece si tenda a pensare che tale forza sia originata dal moto delle cariche mobili, che non sono collegate rigidamente alla suddetta struttura).

CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DA UNA CORRENTE ELETTRICA

Abbiamo visto, nel paragrafo precedente, che un **conduttore** percorso da corrente subisce una certa forza quando si trova in presenza di un campo magnetico; se supponiamo che questo campo magnetico sia generato da un **magnete**, in base al *principio di azione e reazione* non c'è da sorprendersi se anche il magnete, in presenza di una corrente elettrica, sente una forza uguale e contraria alla prima. Questo fatto può essere verificato sperimentalmente, ad esempio osservando le deviazioni di un **ago magnetico** avvicinato ad una corrente:



Se la corrente elettrica è in grado di generare un campo magnetico, *è lecito prevedere che due o più correnti elettriche esercitino reciproche forze di natura magnetica.* Soffermiamoci perciò su un caso molto semplice: supponiamo di avere due conduttori filiformi, rettilinei e disposti parallelamente uno all'altro; facciamoli percorrere da due correnti I_1 ed I_2 prima nello stesso verso e poi in versi opposti. Si verifica sperimentalmente che *le correnti parallele esercitano una azione attrattiva mentre correnti opposte esercitato una azione repulsiva* , come illustrato nella figura seguente:



In un certo senso, è l'opposto di quello che accade alle cariche elettriche: cariche uguali si respingono (mentre correnti parallele si attraggono) e cariche opposte si attraggono (mentre correnti opposte si respingono).

Tutta una serie di **misure quantitative** effettuate su conduttori rettilinei paralleli, del tipo appena citato, portano a verificare che la forza F_{12} che tra essi si esplica, per ogni unità di lunghezza, risulta proporzionale alle singole intensità I_1 ed I_2 ed inversamente proporzionale alla distanza r_{12} tra i conduttori: scriviamo cioè che

$$\frac{F_{12}}{\ell} = K\frac{I_1 I_2}{r_{12}}$$

Volendo includere la direzione della forza, indicando con $\vec{u}_r$ il versore della direzione ortogonale ai due vettori (quella di r_{12} per intenderci), scriveremo che

$$\boxed{\frac{\vec{F}_{12}}{\ell} = \pm K \frac{I_1 I_2}{r_{12}} \vec{u}_r}$$

dove *il segno positivo vale quando i due conduttori si attraggono, mentre il segno negativo vale quando i due conduttori si respingono.*

Misurando le correnti in Ampere, la distanza in metri e la forza per unità di lunghezza in Newton/metro, la costante K risulta sperimentalmente prossima al valore $\mathbf{2*10^{-7}}$. Da notare che, nel compiere questa misura, l'Ampere fa riferimento all'unità di carica che attraversa una sezione del conduttore nell'unità di tempo.

L'*Ampere assoluto*, attualmente usato quale unità assoluta di corrente nel sistema MKS, è stato successivamente definito sulla base della forza che si esplica tra due correnti. Allora, per fare in modo che la nuova unità di misura non si discostasse troppo dalla vecchia, la costante K è stata arbitrariamente fissata al valore $\mathbf{2*10^{-7}}$. Quindi, *l'**Ampere assoluto** è definito come quella intensità di corrente che, circolando ad un metro di distanza da una identica corrente parallela e concorde, la attrae con una forza di $2*10^{-7}$ Newton per ogni metro di lunghezza del conduttore.* Ovviamente, dall'Ampere assoluto è poi possibile passare alla definizione del **Coulomb** e delle altre grandezze elettriche.

Vediamo adesso di risalire al valore del campo magnetico prodotto da una corrente elettrica a partire dalla espressione della forza trovata poco fa.

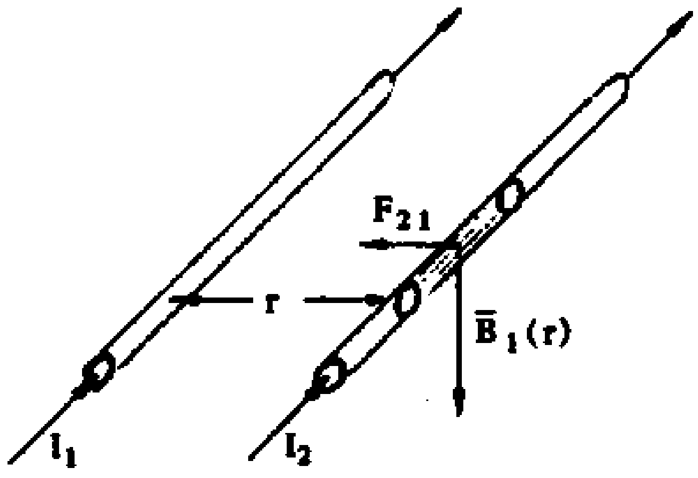
Abbiamo trovato, nel paragrafo precedente, che la forza esercitata da un campo magnetico su un elemento $d\vec{\ell}$ di un conduttore filiforme percorso da corrente I è data da

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Abbiamo poi trovato che ciascuna corrente sente una forza dovuta all'azione magnetica dell'altra data da

$$\frac{\vec{F}_{12}}{\ell} = \pm K \frac{I_1 I_2}{r_{12}} \vec{u}_r$$

Mettendo insieme le informazioni fornite da queste due relazioni possiamo dedurre sia la direzione sia l'intensità del campo $\vec{B}_1$ che la corrente I_1 produce nei punti occupati dalla corrente I_2:



La forza che I_1 esercita su un elemento dl della corrente I_2 tramite il campo magnetico $\vec{B}_1$ è esprimibile come

$$d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{\ell} \times \vec{B}_1$$

dove abbiamo incluso nel vettore $d\vec{\ell}$ le informazioni circa il verso di scorrimento di I. Questa forza giace sul piano su cui si trovano le due correnti in quanto lo abbiamo verificato sperimentalmente; allora, in base alle regole del prodotto vettoriale, il campo $\vec{B}_1$ deve essere necessariamente ortogonale a questo piano: se i due conduttori sono ad esempio orizzontali, il campo $\vec{B}_1$ sarà verticale; il verso del campo dipende dal verso della corrente I_2, ossia dal verso del vettore $d\vec{l}$, e lo si ottiene con la **regola della mano destra** (il pollice in direzione di I_2 e le altre dita nella direzione di $\vec{B}_1$).

Abbiamo quindi determinato direzione e verso del campo magnetico $\vec{B}_1$ prodotto dalla corrente I_1 nei punti occupati da I_2. Per quanto riguarda l'intensità di tale campo, dovendo valere la relazione $\frac{\vec{F}_{12}}{\ell} = \pm K \frac{I_1 I_2}{r_{12}} \vec{u}_r$, dovrà necessariamente essere

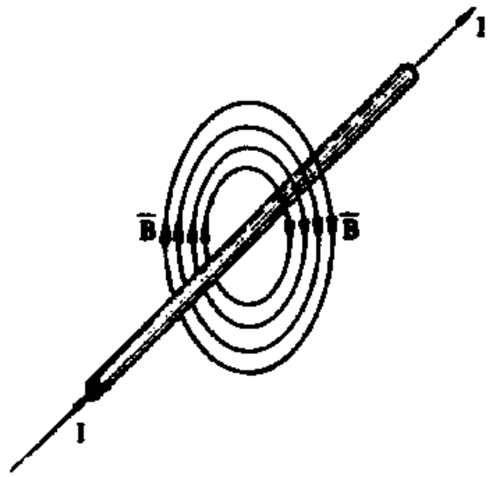
$$B_1(r) = K\frac{I_1}{r}$$

Infatti, se $d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{\ell} \times \vec{B}_1$, deduciamo che $\frac{F_{12}}{\ell} = I_2 B_1$. D'altra parte, deve essere $\frac{F_{12}}{\ell} = K\frac{I_1 I_2}{r}$, per cui uguagliando si trova che

$$I_2 B_1 = K\frac{I_1 I_2}{r}$$

Esplicitando l'espressione del campo si trova quanto riportato poco fa.

Per ragioni di simmetria e per l'**isotropia** e l'**omogeneità** dello spazio, il valore di $\vec{B}$ deve inoltre essere lo stesso in tutti i punti disposti simmetricamente a distanza r dal conduttore che crea il campo. Questo fatto, in base alla relazione $B(r) = K\frac{I}{r}$, implica che *le linee di forza del campo $\vec{B}$ siano delle circonferenze concentriche con centro proprio nel conduttore filiforme e giacenti su piano normale al conduttore stesso:*



Abbiamo in tal modo definito il campo magnetico prodotto da una corrente I che attraversa un conduttore filiforme: *esso ha lo stesso valore per punti equamente distanti dal conduttore e le sue linee sono circonferenze concentriche con il conduttore e giacenti su piani ad esso ortogonali.*

TEOREMA DI AMPERE

Consideriamo il campo magnetico prodotto da una corrente I che scorre lungo un conduttore filiforme rettilineo: dal paragrafo precedente sappiamo che le linee del campo sono delle circonferenze (perciò linee chiuse), concentriche con il conduttore stesso, giacenti su piani ortogonali ad esso. Possiamo facilmente valutare la circuitazione del vettore $\vec{B}$ lungo una qualsiasi di queste linee: tenendo conto che il campo è costante su ciascuna linea e che la lunghezza di una circonferenza è $2\pi r$, possiamo scrivere che la circuitazione vale

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \oint K \frac{I}{r} d\vec{r} \bullet d\vec{\ell} = K \frac{I}{r} \oint d\ell = K \frac{I}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi K I$$

Il prodotto $2\pi K$ prende il nome di **permeabilità del vuoto** e si indica con il simbolo μ_0: scriviamo perciò che

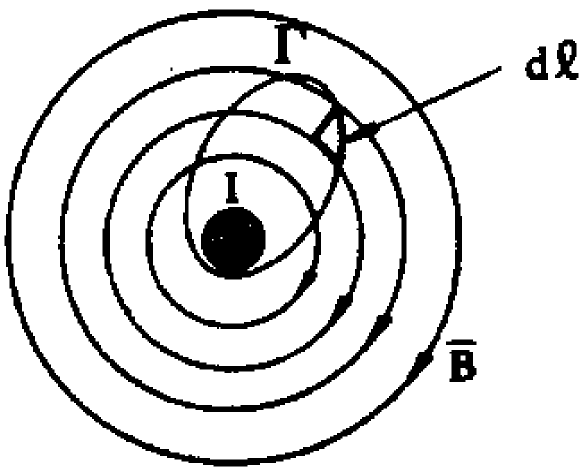
$$\mu_0 = 2\pi K \longrightarrow \oint \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

dove

$\mu_0 = 4\pi * 10^{-7}$ Weber/milliAmpere

L’espressione analitica ricavata ci dice che *la circuitazione del campo magnetico lungo una linea di forza non dipende in alcun modo dalla linea stessa.* Infatti, nel fattore $\mu_0 I$ non compare alcuna informazione circa tale linea (ad esempio il raggio).

Il valore della circuitazione del campo magnetico, ottenuto scegliendo un cammino di circuitazione circolare e concentrico rispetto alla corrente rettilineo, si può in realtà estendere a qualsiasi cammino di circuitazione che si concateni una sola volta con la corrente:



Infatti, ogni tratto $d\vec{\ell}$ di questo cammino si può sempre scomporre in due componenti, una tangenziale e l'altra radiale:

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \oint \vec{B} \bullet \left(d\vec{\ell}_T + d\vec{\ell}_R\right) = \oint \vec{B} \bullet d\vec{\ell}_T + \oint \vec{B} \bullet d\vec{\ell}_R$$

Tuttavia, la componente radiale non dà contributo alla circuitazione in quanto è ortogonale al vettore $\vec{B}$, per cui la circuitazione dipende solo dalla componente tangenziale:

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \oint \vec{B} \bullet d\vec{\ell}_T$$

D'altra parte, il campo magnetico è diretto nella direzione tangenziale, per cui è parallelo al vettore $d\vec{\ell}_T$: ricordando allora che il campo magnetico generato dalla corrente in un conduttore filiforme è $B(r) = K\frac{I}{r}$, scriviamo che

$$\vec{B} \bullet d\vec{\ell}_T = Bd\ell_T = Brd\theta = \left(K\frac{I}{r}\right)rd\theta = KId\theta$$

dove abbiamo indicato con $d\theta$ l'angolo che individua il segmento $d\vec{\ell}_T$ rispetto al conduttore attraversato dalla corrente e con r la distanza di tale segmento dal conduttore stesso.

Sostituendo nell'espressione della circuitazione del campo, otteniamo perciò che

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \oint KId\theta = KI\oint d\theta$$

Il prodotto KI è stato portato fuori dall'integrale perché è costante; l'integrale di linea di $d\theta$ è pari all'angolo giro 2π, per cui concludiamo che

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = KI \cdot 2\pi = \mu_0 I$$

Quindi, *proprio il fatto di considerare solo la componente tangenziale fa sì che il risultato della circuitazione sia lo stesso a prescindere dal fatto che il cammino chiuso di circuitazione sia una circonferenza* *oppure no, in quanto la somma dei contributi tangenziali dà un valore complessivo comunque pari a quello che si ha per un cammino circolare.*

Possiamo perciò scrivere genericamente che

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

dove Γ è un generico cammino chiuso di integrazione che si concatena una sola volta con la corrente I.

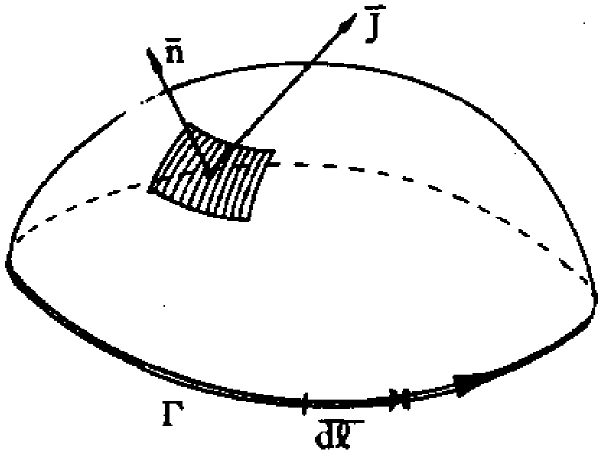
Quella relazione dice dunque che *la circuitazione del campo magnetico, lungo un qualsiasi percorso chiuso, risulta sempre nulla se tale percorso non contiene la corrente generatrice del campo, se cioè questo percorso non è "concatenato" alla corrente.*

In effetti, si può ulteriormente generalizzare questo risultato, noto come teorema di Ampere: le osservazioni sperimentali dimostrano infatti che *il risultato ottenuto per le correnti rettilinee è valido per qualsiasi corrente o sistema di* ***correnti stazionarie****, per cui, nella relazione ricavata, bisogna pensare ad I come alla somma algebrica di tutte le correnti stazionarie circondate dal cammino di integrazione.*

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I}$$

In parole povere, immaginiamo di avere un sistema di correnti stazionarie, ossia un insieme di conduttori attraverso i quali scorrono delle correnti stazionarie in qualsiasi senso; tali correnti generano un campo magnetico totale $\vec{B}$, dato dalla somma dei campi che ciascuna corrente genererebbe se fosse da sola (vale il **principio di sovrapposizione**); scelto un qualsiasi percorso chiuso, la circuitazione del campo lungo tale percorso si ottiene moltiplicando μ_0 per la somma algebrica di tutte quelle correnti, tra quelle del sistema, che sono contenute nel cammino in questione.

Il modo corretto e completo di valutare I è quello di considerare una superficie qualsiasi che si appoggia al cammino di circuitazione Γ e di usarla per calcolare I come flusso del vettore $\vec{J}$ attraverso di essa:



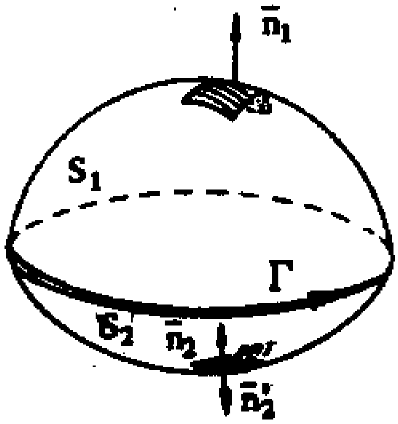
In formule scriviamo perciò che

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{SUP} \vec{J} \bullet \vec{n} dS}$$

In questa espressione, in base alla relazione $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ con cui definiamo il campo magnetico, la normale positiva $\vec{n}$ alla superficie S va scelta in modo che il verso di percorrenza positivo su Γ appaia antiorario per un osservatore orientato come $\vec{n}$.

E' importante notare che *è del tutto arbitraria la scelta della superficie attraverso cui calcolare il flusso della densità di corrente, purché ovviamente tale superficie si poggi sul contorno G.* Questa arbitrarietà nella scelta vale però solo nell'ipotesi che il regime di correnti sia stazionario, cioè costante nel tempo, mentre invece ci sono casi in cui le correnti non sono costanti nel tempo, per cui la formulazione data del teorema di Ampere va necessariamente modificata.

Per renderci conto di quanto appena detto, consideriamo due distinte superfici S_1 ed S_2 appoggiate sullo stesso contorno Γ, come indicato nella figura seguente:



In base a quanto detto, il valore della corrente I concatenata a Γ deve essere lo stesso se calcolato attraverso S_1 oppure S_2; ciò significa, allora, che dovrà risultare

$$\int_{S_1} \vec{J} \bullet \vec{n} dS = \int_{S_2} \vec{J} \bullet \vec{n} dS$$

D'altra parte, è evidente che, se invertiamo il verso della normale di S_2, possiamo scrivere che

$$\int_{S_1} \vec{J} \bullet \vec{n} dS + \int_{S_2} \vec{J} \bullet \vec{n} dS = 0$$

Il primo membro di questa equazione è pari al flusso totale della densità di corrente uscente dalla superficie chiusa S data dall'unione di S_1 ed S_2: scriviamo perciò quella relazione nella forma

$$\oint_{S} \vec{J} \bullet \vec{n} dS = 0$$

Quell'integrale può essere trasformato in un integrale di volume introducendo la **divergenza** della densità di corrente; allora, richiedere che sia nullo quell'integrale equivale a richiedere che sia nulla la divergenza di $\vec{J}$:

$$\mathrm{div}\vec{J} = 0$$

Tuttavia, la **legge di conservazione della carica** impone notoriamente che risulti sempre

$$\mathrm{div}\vec{J} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

dove ρ è la densità spaziale di carica presente all'interno di S.

Tra le ultime due equazioni c'è dunque un termine $d\rho/dt$ di differenza: dato che la seconda equazione vale senz'altro, è evidente che la prima vale solo quando risulta $\mathbf{d\rho/dt=0}$, ossia appunto quando il regime delle correnti è **stazionario**: in termini concreti, se il regime di correnti è stazionario nel tempo, la carica che entra in S nell'unità di tempo è uguale a quella che esce da S, per cui la densità spaziale di carica in S rimane invariata nel tempo, ossia appunto $d\rho/dt=0$.

In altre parole ancora, se siamo <u>in regime stazionario</u>, l'equazione $\mathrm{div}\vec{J}=0$ ci dice che le linee di corrente sono chiuse, per cui *il teorema di Ampere stabilisce che la circuitazione di $\vec{B}$ lungo un cammino chiuso G dipende solo da quelle correnti i cui cammini sono concatenati con G, ossia si trovano rispetto ad esso come maglie concatenate di una catena.*

E' importante inoltre notare, nella formula che quantifica il teorema di Ampere, che sia il campo magnetico sia la sua circuitazione dipendono solo dal valore dell'intensità di corrente I; *si ha quindi lo stesso campo magnetico sia con poche cariche veloci sia con molte cariche lente:* infatti, ricordando l'espressione della densità di corrente, scriviamo che

$$\oint_{\Gamma}\vec{B}\bullet d\vec{\ell}=\mu_0\int_{SUP}\vec{J}\bullet\vec{n}dS=\mu_0\int_{SUP}Nq<\vec{v}>\bullet\vec{n}dS$$

dove ricordiamo che $<\vec{v}>$ è la velocità media dei portatori che creano la corrente.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1