

ESERCIZI
di
TEORIA dei SEGNALI

La Correlazione

Correlazione

Si definisce correlazione (o correlazione incrociata o cross-correlazione) tra i due segnali di energia, in generale complessi, $x(t)$ e $y(t)$ la quantità:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

che ha come trasformata di Fourier:

$$S_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$$

Caso particolare è l'autocorrelazione di un segnale di energia definita come:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

il cui spettro è:

$$S_{xx}(f) = |X(f)|^2$$

Questa quantità è reale e positiva, pertanto la autocorrelazione di un segnale di energia è una funzione pari.

Inoltre l'energia del segnale coincide con il valore nell'origine della sua autocorrelazione. Due sono pertanto le vie per calcolare una correlazione:

la prima usa direttamente la definizione in tempo per cui si deve:

coniugare un segnale $[x^*(t)]$,

traslare l'altro di una quantità che è >0 se la traslazione avviene verso sinistra $[y(t+\tau)]$,

eseguire il prodotto tra i segnali così costruiti $[x^*(t)y(t+\tau)]$,

calcolare l'integrale del prodotto.

la seconda presuppone il passaggio in frequenza per cui bisogna:

calcolare le trasformate dei due segnali $[X(f)$ e $Y(f)]$,

moltiplicare una per l'altra coniugata $[X^*(f)Y(f)]$,

antitrasformare il prodotto.

Si ricorda comunque che il calcolo della correlazione si può ricondurre a quello di una convoluzione valendo la relazione:

$$R_{xy}(\tau) = x^*(-t) * y(t)$$

Esercizio 1

Calcolare la correlazione tra i segnali:

$$x(t) = A \text{ rect}_T(t) \quad y(t) = -B \text{ tri}_T(t - 5T)$$

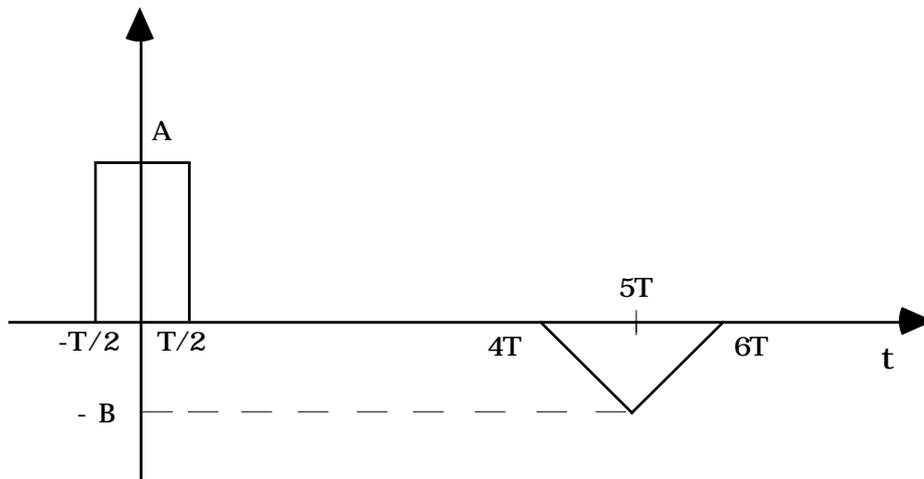


Fig 1.1

Le trasformate dei segnali sono:

$$X(f) = AT \text{ sinc}(fT)$$

$$Y(f) = -BT \text{ sinc}^2(fT) e^{-j10fT}$$

per cui la trasformata della correlazione sarà:

$$S_{yx}(f) = -ABT^2 \text{ sinc}^3(fT) e^{+j10fT}$$

Si vede allora come lo spettro della correlazione si ottiene traslando in anticipo il segnale di spettro:

$$S_{yx}'(f) = -ABT^2 \text{ sinc}^3(fT)$$

E' facile verificare che una proprietà di questo tipo vale in generale, infatti se i due segnali sono ricavati da altri attraverso un ritardo:

$$\begin{aligned} x(t) &= v(t - t_x) \\ y(t) &= u(t - t_y) \end{aligned}$$

si ha per la correlazione:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v^*(t - t_x) u(t + \tau - t_y) dt = \int_{-\infty}^{\infty} v^*(t) u(t + \tau - (t_y - t_x)) dt$$

si può, pertanto, calcolare la correlazione tra i segnali non ritardati e successivamente applicare il ritardo $t_y - t_x$.

Si può osservare che antitrasformare l'ultima espressione ricavata non è molto semplice, pertanto invece che operare in frequenza è opportuno calcolare la correlazione direttamente nel tempo sui due segnali riportati nella fig.1.2.

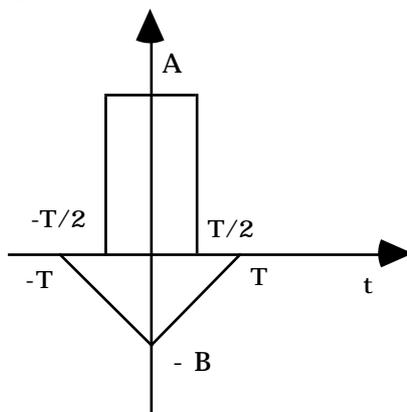


Fig.1.2

Si può anche osservare come in questo caso la correlazione dei segnali coincida con la loro convoluzione per la parità del segnale $y(t + 5T)$.

Essendo lo spettro una quantità reale, la correlazione sarà una funzione pari nel tempo; sarà allora sufficiente calcolarla per traslazioni negative (cioè che si sviluppano verso destra).

E' evidente come per traslazioni superiori a $3T/2$ i due segnali occupano intervalli di tempo distinti, allora il loro prodotto è nullo e tale sarà anche la loro correlazione che quindi è diversa da zero per $|t| < 3T/2$.

Nella fig.1.3 è descritta la situazione che si ha quando $|t| < T/2$.

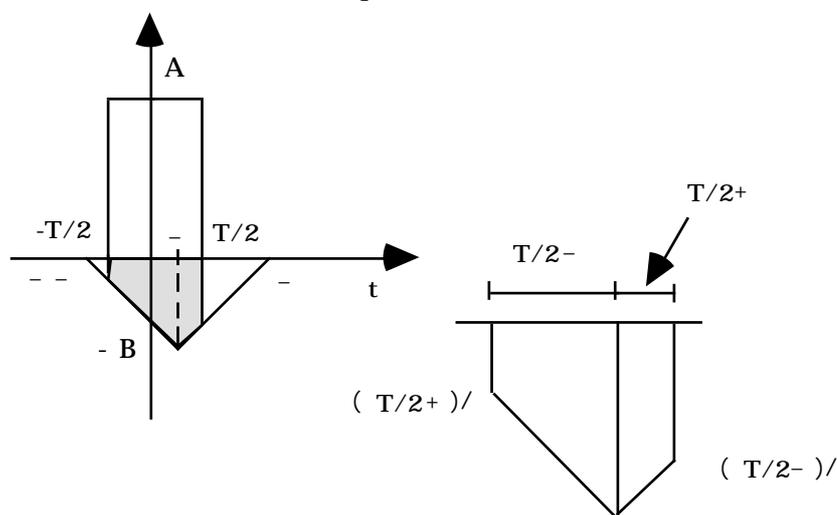


Fig.1.3

L'area tratteggiata individua la regione di sovrapposizione. Per calcolare il valore della correlazione basta calcolare l'area del pentagono irregolare così ottenuto, dato dalla somma di due trapezi rettangoli:

il primo (quello a sinistra della linea verticale tratteggiata) ha altezza $(T/2 - |x|)$, la base maggiore AB e quella minore $AB(T/2 + |x|)/T$,
il secondo (quello a destra della linea verticale tratteggiata) ha altezza $(T/2 + |x|)$, la base maggiore AB e quella minore $AB(T/2 - |x|)/T$.

Si può pertanto concludere che per $|x| < T/2$:

$$R'_{yx}(x) = -\frac{1}{2} AB \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{|x|}{T}\right) \left(\frac{T}{2} + |x|\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{|x|}{T}\right) \left(\frac{T}{2} - |x|\right) \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} AB \left\{ T + \frac{2}{T} \left(\frac{T}{2} - |x|\right) \left(\frac{T}{2} + |x|\right) \right\} = -\frac{1}{2} AB \left\{ \frac{3T}{2} - \frac{2}{T} |x|^2 \right\}$$

Si osservi che per $x = 0$ si ottiene il valore $-3/4$, come è facile verificare geometricamente e per $x = T/2$ il valore $-ABT/2$.

Nella fig.1.4 è descritta la situazione che si ha quando $T/2 < |x| < 3T/2$.

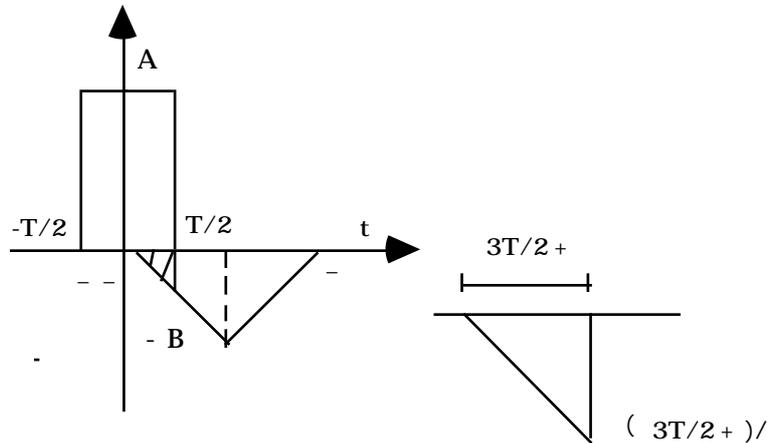


Fig.1.4

La correlazione in questo caso vale:

$$R'_{yx}(x) = -\frac{1}{2} \frac{AB}{T} \left\{ \frac{3T}{2} - |x| \right\}^2$$

Tale correlazione è riportata nella fig.1.5 per $AB = 4$ e $T = 1$.

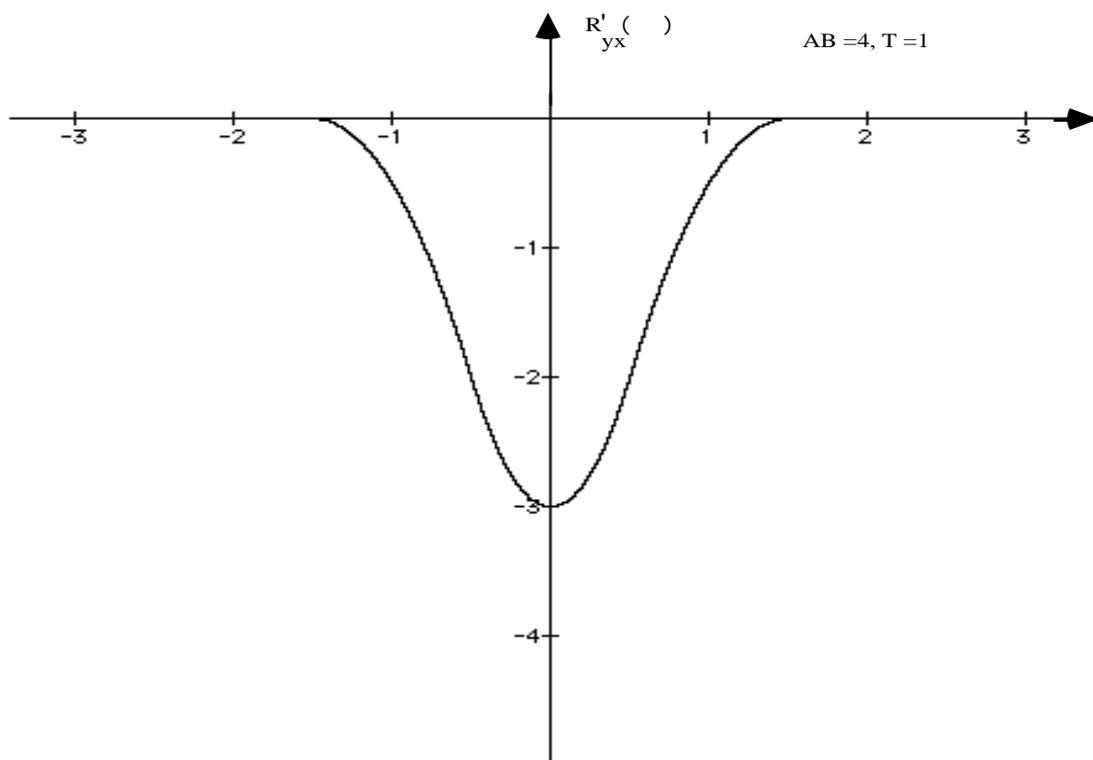


Fig.1.5

Si può osservare come l'intervallo di tempo in cui la correlazione è diversa da zero coincide con la somma degli intervalli in cui sono diversi da zero i segnali correlati.

Imponendo la traslazione di $5T$ si ottiene allora il risultato cercato.

Esercizio 2

Calcolare la autocorrelazione del segnale di figura.

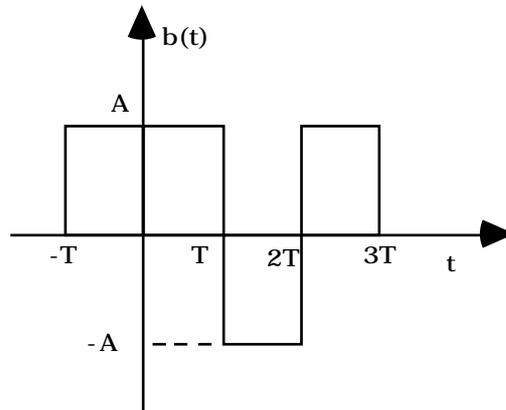


Fig.2.1

Il segnale $b(t)$ si può scrivere come:

$$b(t) = A \{ \text{rect}_T(t + T/2) + \text{rect}_T(t - T/2) - \text{rect}_T(t - 3T/2) + \text{rect}_T(t - 5T/2) \}$$

Indicando con \cdot il simbolo che rappresenta la correlazione si potrà scrivere:

$$R_{bb}(\cdot) = b(t) \cdot b(t) = A^2 \{ \text{rect}_T(t + T/2) + \text{rect}_T(t - T/2) - \text{rect}_T(t - 3T/2) + \text{rect}_T(t - 5T/2) \} \\ \{ \text{rect}_T(t + T/2) + \text{rect}_T(t - T/2) - \text{rect}_T(t - 3T/2) + \text{rect}_T(t - 5T/2) \}$$

Sviluppando si vede facilmente come bisogna calcolare 16 correlazioni del tipo:

$$R_{ss}(\cdot) = \text{rect}_T(t - k T/2) \cdot \text{rect}_T(t - h T/2)$$

Tenendo conto delle proprietà introdotte nel precedente esercizio relative alla traslazione dei segnali, per calcolare la $R_{ss}(\cdot)$ è sufficiente calcolare la quantità:

$$\text{rect}_T(t) \cdot \text{rect}_T(t)$$

e poi traslarla di $(k-h)T/2$.

Il calcolo della autocorrelazione di un impulso rettangolare è molto facile sia in tempo che in frequenza. Operando in questo dominio infatti si trova che lo spettro di densità di energia è:

$$|A(f)|^2 = T^2 \text{sinc}^2(\cdot fT)$$

cui corrisponde in tempo:

$$R_{aa}(\cdot) = T \text{tri}_T(\cdot)$$

Si osserva facilmente che si hanno 4 delle 16 correlazioni in cui $k = h$, 3 in cui $k = h + 2$, ancora 3 in cui $k = h - 2$, 2 in cui $k = h + 4$ e 2 in cui $k = h - 4$, infine vi è 1 caso in cui $k = h + 6$ e 1 in cui $k = h - 6$.

Nei casi di distanza 2 e -2, due volte la correlazione elementare è negativa e una positiva, in quelli a distanza 4 e -4 una volta è positiva e una negativa, in quelli a distanza 6 o -6 è positiva.

Si ha allora in conclusione:

$$R_{bb}(\tau) = A^2 \{ 4 R_{aa}(\tau) - R_{aa}(\tau + T) - R_{aa}(\tau - T) + R_{aa}(\tau + 3T) + R_{aa}(\tau - 3T) \}$$

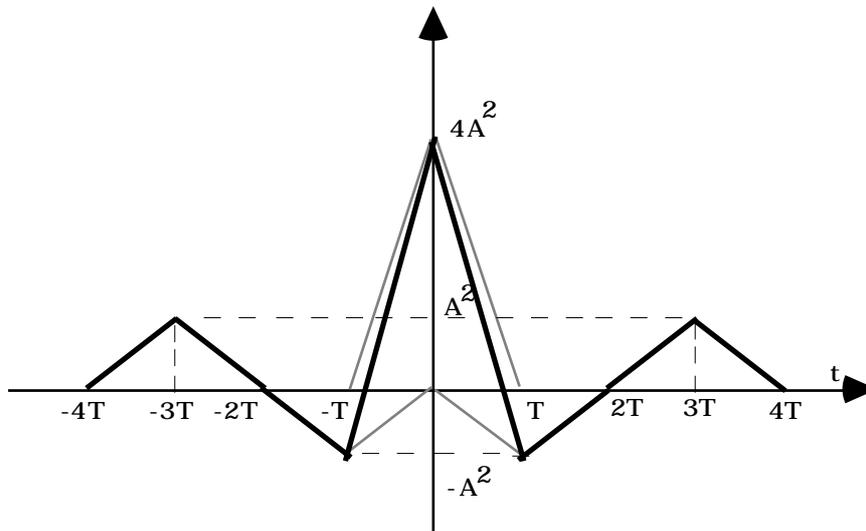


Fig.2.2

Si può osservare come questa autocorrelazione sia pari, come doveva essere in quanto $b(t)$ è un segnale reale.

Un'altra possibilità comune a tutti i segnali come questo, cosiddetti a codice, deriva dal fatto che è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} b(t) &= A \text{rect}_T(t) * \{ u_0(t + T/2) + u_0(t - T/2) - u_0(t - 3T/2) + u_0(t - 5T/2) \} = \\ &= a(t) * c(t) \end{aligned}$$

ove $a(t)$ è l'impulso, in questo caso un rettangolo, ricorrendo al quale il segnale è costruito e $c(t)$ è l'insieme degli impulsi di Dirac che definiscono il codice particolare in esame.

Ricorrendo alla proprietà secondo cui:

$$R_{xy}(\tau) = x^*(-t) * y(t)$$

si ha:

$$R_{bb}(\tau) = [a^*(-t) * c^*(-t)] * [a(t) * c(t)]$$

Per le proprietà distributiva ed associativa del prodotto di convoluzione, si può ancora scrivere:

$$R_{bb}(\tau) = [a^*(-t) * a(t)] * [c^*(-t) * c(t)] = R_{aa}(\tau) * R_{cc}(\tau)$$

Ora:

$$R_{aa}(\tau) = A^2 T \text{tri}_T(\tau)$$

mentre per calcolare $R_{cc}(\tau)$ si può passare in frequenza ricavando facilmente:

$$C(f) = e^{j f T} + e^{-j f T} + e^{-3j f T} + e^{-5j f T}$$

e:

$$|C(f)|^2 = [e^{j f T} + e^{-j f T} - e^{-3j f T} + e^{-5j f T}] [e^{-j f T} + e^{j f T} - e^{3j f T} + e^{5j f T}]$$

che vale:

$$|C(f)|^2 = 4 - e^{j 2 f T} - e^{-j 2 f T} + e^{j 2 f T} + e^{-j 2 f T}$$

Questa espressione è facilmente antitrasformabile come:

$$R_{cc}(\tau) = \{4 u_0(t) - u_0(t-T) - u_0(t+T) + u_0(t-3T) + u_0(t+3T)\}$$

Si ricava allora il risultato già ottenuto in precedenza:

$$R_{bb}(\tau) = A^2 \{4 R_{aa}(\tau) - R_{aa}(\tau+T) - R_{aa}(\tau-T) + R_{aa}(\tau+3T) + R_{aa}(\tau-3T)\}$$

Esercizio 3

Calcolare la correlazione tra i segnali di figura:

$$x(t) = -B e^{-t} u_{-1}(t) \quad \text{e} \quad y(t) = A \text{rect}_T(t)$$

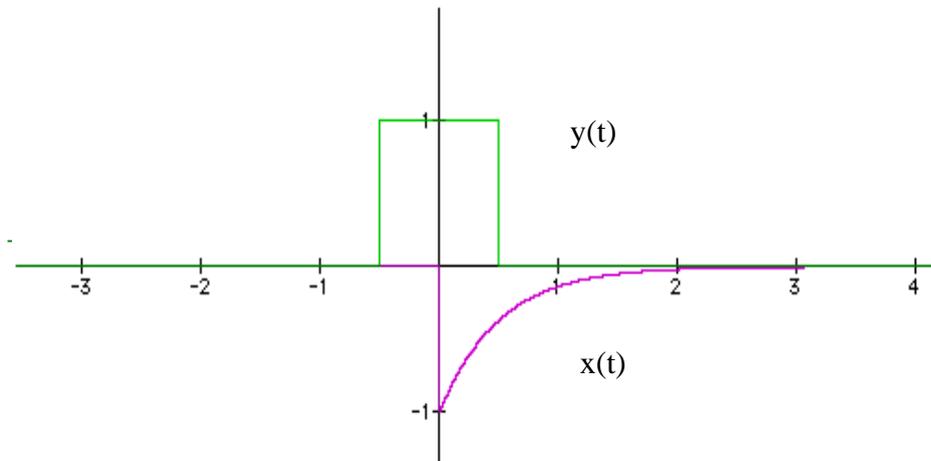


Fig 3.1

Nella fig.3.1 A e B sono stati posti uguali a 1 e $\tau = 2$.

Operando traslazioni del rettangolo verso sinistra (cioè positive) si può facilmente osservare come per $\tau > T/2$ non si ha più la sovrapposizione dei due segnali, il loro prodotto è nullo e tale sarà anche l'integrale. Per $-\tau < -T/2$ si ha invece la situazione descritta in figura 3.2.

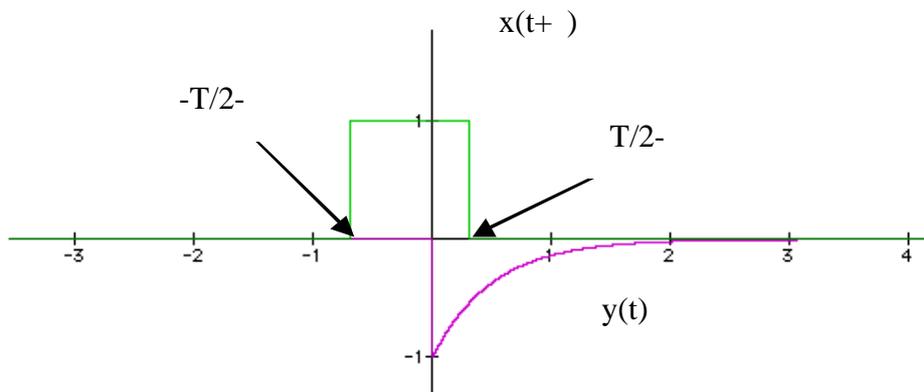


Fig 3.2

Si può scrivere:

$$R_{xy}(\tau) = -AB \int_0^{T/2-\tau} e^{-\alpha t} dt = -\frac{AB}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha(T/2-\tau)}\right)$$

Per $\tau = -T/2$ si ha la situazione descritta in figura 3.3 e quindi

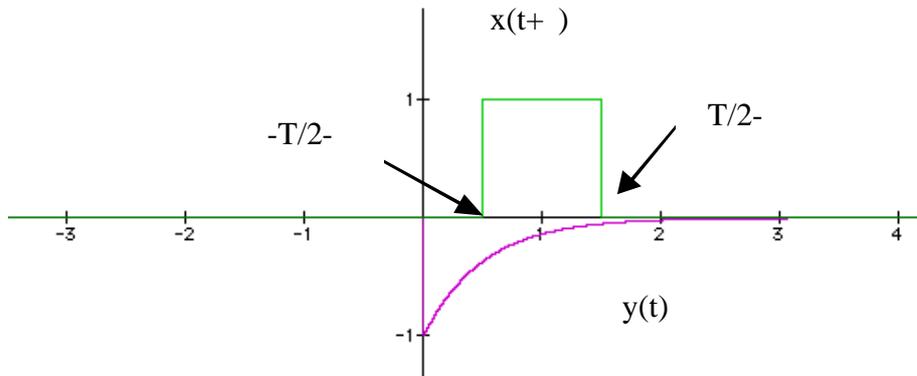


Fig 3.3

$$R_{xy}(\tau) = -AB \int_{-T/2}^{T/2-\tau} e^{-\alpha t} dt = \frac{AB}{\alpha} \left(e^{-\alpha(T/2-\tau)} - e^{-\alpha(T/2-\tau)} \right) =$$

La correlazione così ottenuta è riportata nella fig.3.4

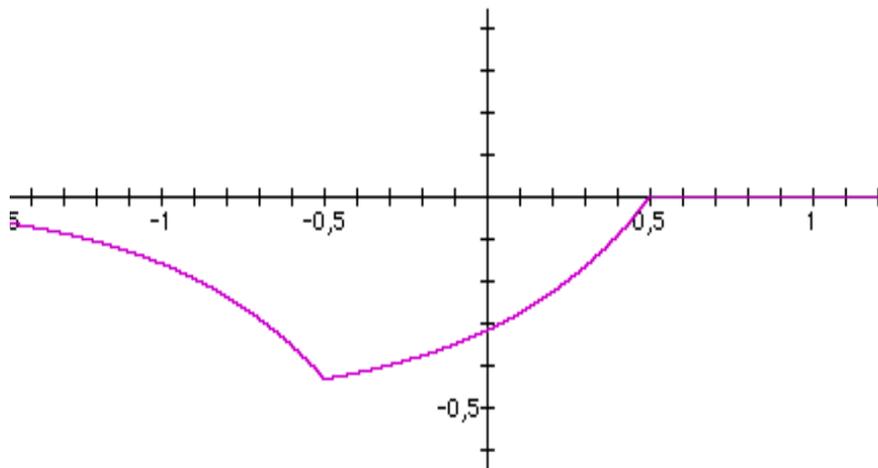


Fig 3.4

Esercizio 4

Calcolare la correlazione tra i segnali:

$$x(t) = A e^{-t} u_{-1}(t) \quad y(t) = B e^{-t} u_{-1}(t)$$

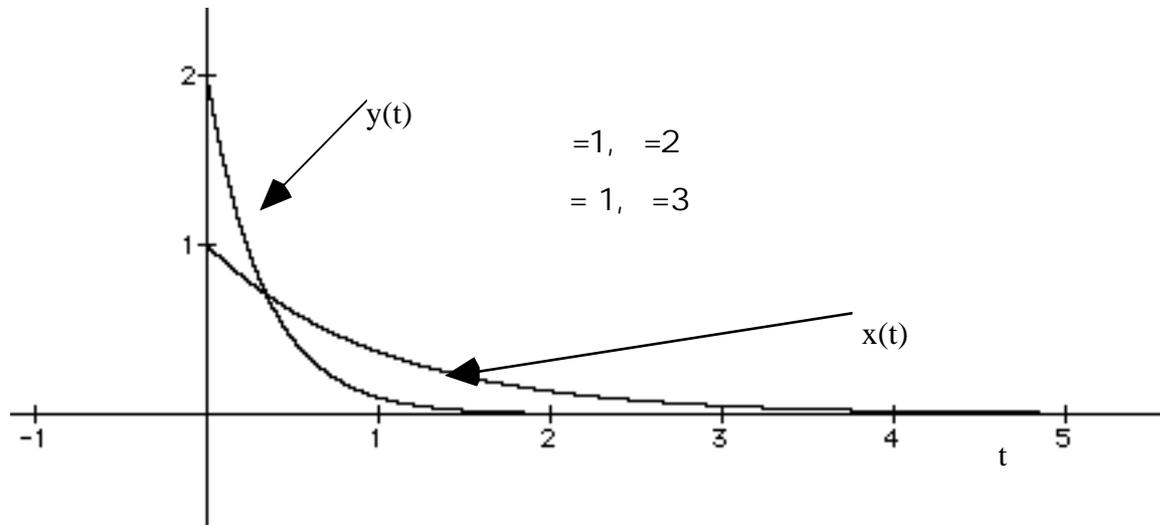


Fig.4.1

Data la semplicità delle trasformate si tratta di verificare se non sia più semplice operare in questo caso in frequenza invece che in tempo.

Si ricordi infatti che:

$$X(f) = \frac{A}{+j2\pi f}$$

$$Y(f) = \frac{B}{+j2\pi f}$$

allora lo spettro di densità di energia incrociato è:

$$S_{xy}(f) = \frac{AB}{(+j2\pi f)(-j2\pi f)}$$

che si può anche scrivere:

$$S_{xy}(f) = \frac{AB}{+} \left\{ \frac{1}{+j2\pi f} - \frac{1}{-j2\pi f} \right\}$$

Ricordando la proprietà della trasformata di Fourier relativa alla inversione degli assi (a $x(-t)$ corrisponde $X(-f)$) si può allora scrivere in conclusione:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{AB}{+} \left\{ e^{-\tau} u_{-1}(\tau) + e^{-\tau} u_{-1}(-\tau) \right\}$$

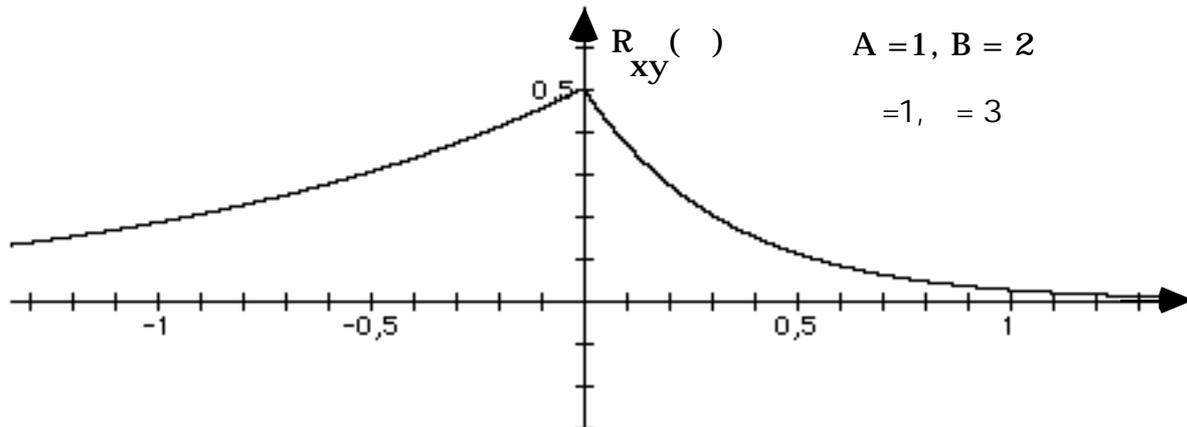


Fig.4.2

Si vuole qui ricordare che l'altra possibile correlazione, avendo lo spettro coniugato, ha una espressione che si ricava semplicemente invertendo l'asse (la correlazione trovata è reale):

$$R_{yx}(\tau) = \frac{AB}{+} \left\{ e^{-\tau} u_{-1}(-\tau) + e^{\tau} u_{-1}(\tau) \right\}$$

Esercizio 5

Calcolare la autocorrelazione del segnale di figura:

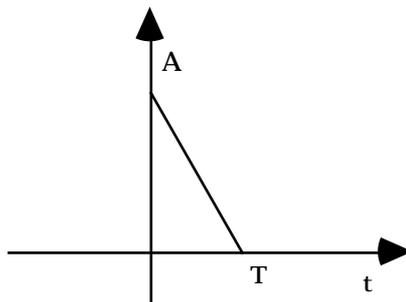


Fig.5.1

Data la semplicità della descrizione del segnale in tempo è opportuno affrontare in questo dominio il calcolo della autocorrelazione.

Ricordando che l'autocorrelazione di un segnale reale è una funzione reale e pari è sufficiente eseguire i calcoli per valori di traslazione positivi (cioè traslando verso sinistra).

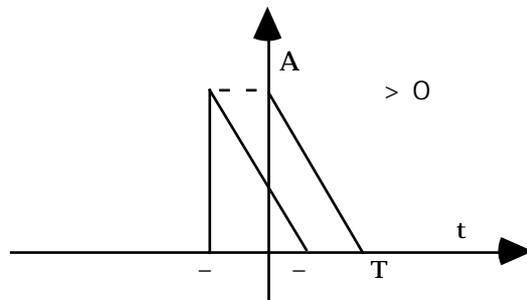


Fig.5.2

Si può allora scrivere:

$$R_{xx}(\tau) = A^2 \int_0^{T-\tau} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \left(1 - \frac{t+\tau}{T}\right) dt = A^2 \int_0^{T-\tau} \left[1 - \frac{\tau}{T} - \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) \frac{t}{T} + \left(\frac{t}{T}\right)^2\right] dt =$$

$$= A^2 T \int_0^{1 - \frac{\tau}{T}} \left[1 - \frac{\tau}{T} - \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) x + x^2\right] dx = A^2 T \left\{ \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^3 \right\}$$

=

$$= A^2 T \left\{ \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^3 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^3 \right\}$$

che è riportata nella figura 5.3 per $A=3$ e $T=2$

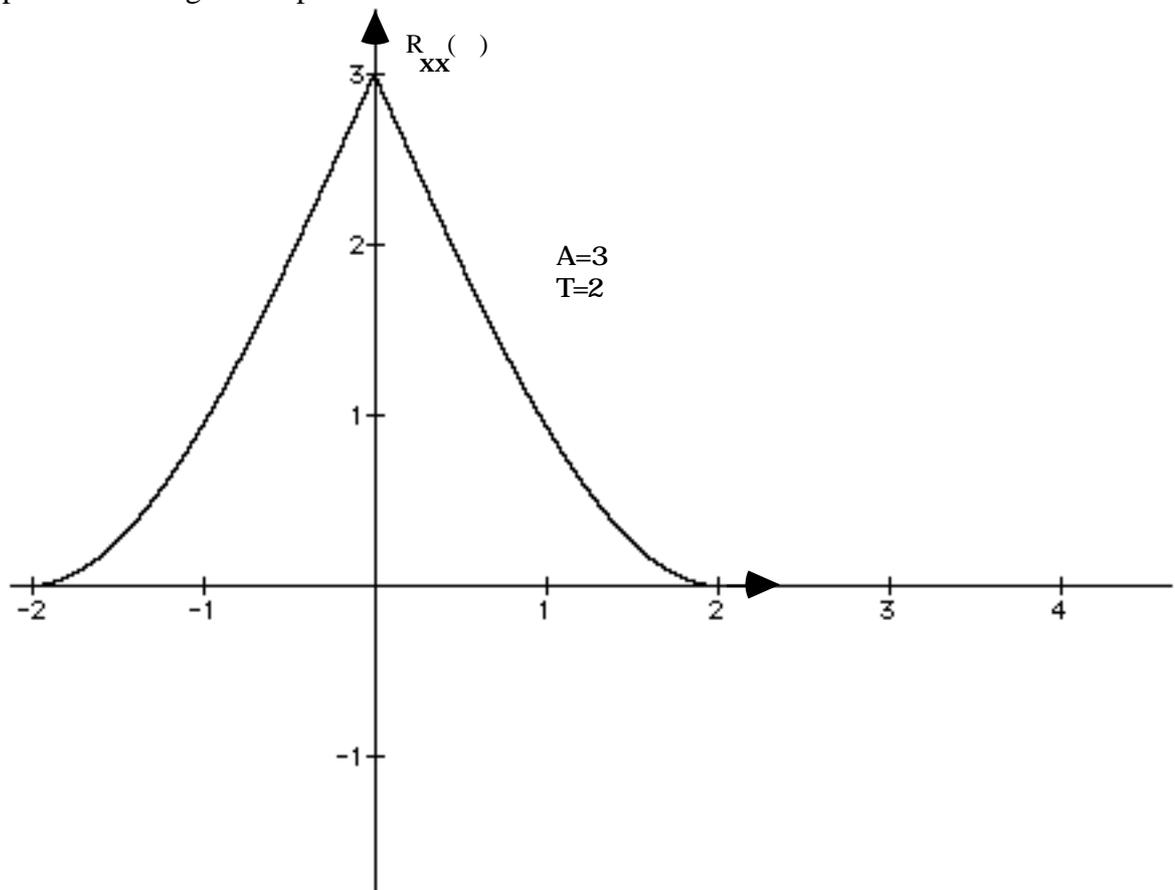


Fig 5.3

Esercizio 6

Calcolare la correlazione tra i segnali:

$$x(t) = \text{rect}_T(t) e^{j2\pi Wt} \quad y(t) = \text{rect}_T(t) e^{j2\pi Ft}$$

Applicando la definizione si può scrivere:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}_T(t) e^{-j2\pi Wt} \text{rect}_T(t + \tau) e^{j2\pi F(t + \tau)} dt$$

Nel caso $F = W$ la soluzione dell'integrale si semplifica in quanto diventa:

$$R_{xx}(\tau) = e^{j2\pi F\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}_T(t) \text{rect}_T(t + \tau) dt = T e^{j2\pi F\tau} \text{tri}_T(\tau)$$

Nel caso generale si ha:

$$R_{xy}(\tau) = e^{j2\pi F\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}_T(t) \text{rect}_T(t + \tau) e^{j2\pi (F-W)t} dt$$

In fig.6.1 è mostrato come valutare gli estremi di integrazione per τ positivi e negativi.

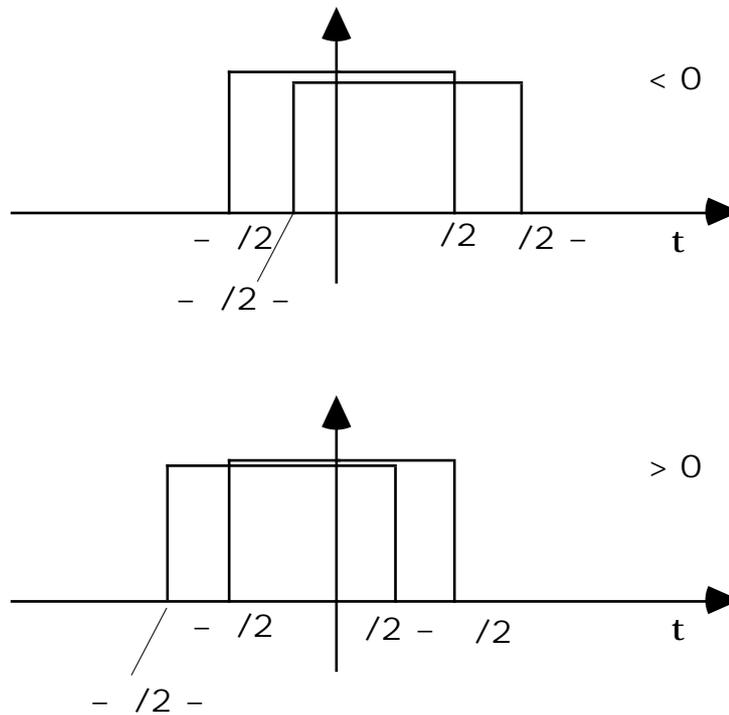


Fig.6.1

Si ha allora per τ negativi:

$$R_{xy}(\tau) = e^{j2\pi F\tau} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi (F-W)t} dt = \frac{e^{j2\pi F\tau}}{j2\pi (F-W)} \left[e^{j2\pi (F-W)t} \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{e^{j2\pi F\tau}}{j2\pi (F-W)} \left(e^{j2\pi (F-W)T/2} - e^{-j2\pi (F-W)T/2} \right)$$

e per τ positivi:

$$R_{xy}(\tau) = e^{j2\pi F\tau} \int_{-T/2}^{-T/2 + \tau} e^{j2\pi (F-W)t} dt = \frac{e^{j2\pi F\tau}}{j2\pi (F-W)} \left[e^{j2\pi (F-W)t} \right]_{-T/2}^{-T/2 + \tau} = \frac{e^{j2\pi F\tau}}{j2\pi (F-W)} \left(e^{-j2\pi (F-W)T/2} - e^{-j2\pi (F-W)(T/2 - \tau)} \right)$$