Appunti di Antenne
Concetti introduttivi

Premessa

Le **antenne** sono un argomento molto importante per le telecomunicazioni. Cominciamo perciò a fornire alcuni concetti generali sul loro utilizzo.

Consideriamo il generico **collegamento radio** tra un **trasmettitore** (**TX**) ed un **ricevitore** (**RX**):

Le antenne del trasmettitore e del ricevitore sono sostanzialmente l'**interfaccia** con il mezzo di comunicazione, che in questo caso è appunto l'**atmosfera terrestre**.

Per studiare un collegamento di questo tipo, è sempre necessario utilizzare un modello (relativo perciò al sistema TX-mezzo-RX) che tenga conto dei seguenti fenomeni:

- accoppiamento della sorgente di segnale con l'antenna di trasmissione;
- accoppiamento dell'antenna di trasmissione con il mezzo di comunicazione;
- propagazione del segnale, attraverso il mezzo di comunicazione, fino all'antenna di ricezione;
- accoppiamento del mezzo di comunicazione con l'antenna di ricezione;
- accoppiamento dell'antenna di ricezione con il carico.

Nel seguito, vedremo di capire nel dettaglio come studiare questi singoli problemi. Per il momento, ci possiamo invece dedicare ad una analisi più generale.

Modelli circuitali in trasmissione ed in ricezione

Consideriamo, ad esempio, il problema dell'accoppiamento tra la sorgente di segnale e l'antenna in trasmissione: quest'ultima non fa altro che prelevare il segnale (cioè l'energia) dalla sorgente al fine poi di irradiarlo nello spazio, per cui si comporta come un semplice *carico*. Facendo la classica ipotesi di essere in **regime sinusoidale permanente**, possiamo modellare tale carico come una impedenza $\mathbf{Z_{ant}}$, che ovviamente chiameremo **impedenza di ingresso dell'antenna in trasmissione**. Quest'ultima è generalmente costituita da una parte reale ed una parte immaginaria:

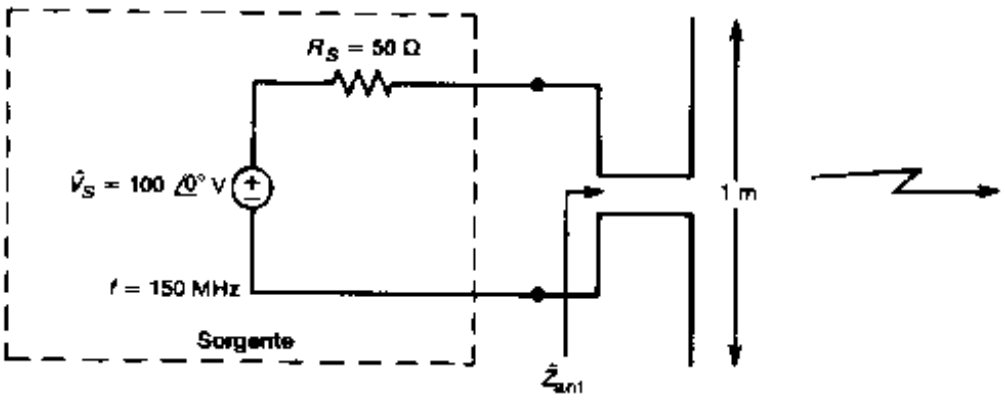
$$Z_{ant} = R_{ant} + jX_{ant}$$

Come vedremo meglio in seguito, la parte reale è data dalla somma della **resistenza di radiazione** dell'antenna considerata, che tiene conto della capacità di tale antenna di irradiare potenza nello spazio circostante, e della **resistenza di perdita**, dovuta ai conduttori non perfetti usati per la realizzazione pratica dell'antenna stessa:

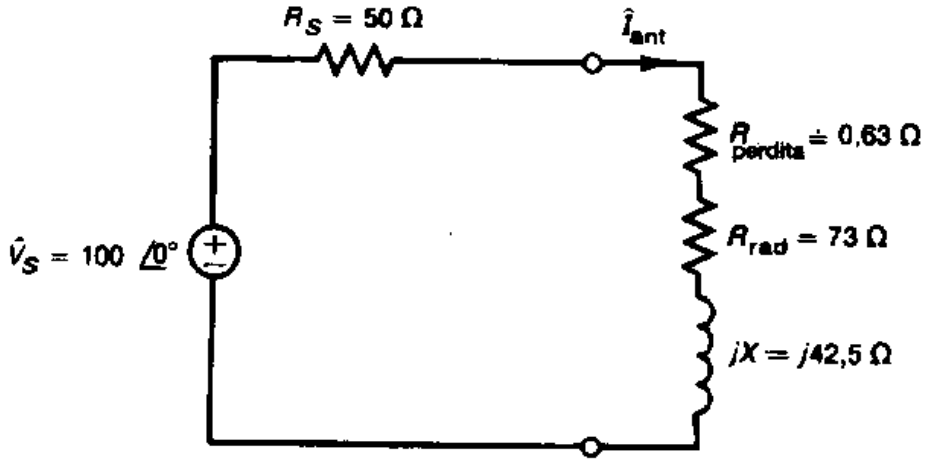
$$\boxed{Z_{ant} = \left(R_{rad} + R_{perdita}\right) + jX_{ant}}$$

Sia $\mathbf{R_{ant}}$ sia $\mathbf{X_{ant}}$ dipendono dalla frequenza di lavoro (o, ciò che è lo stesso, dalla lunghezza d'onda λ di lavoro).

Tanto per fare un esempio concreto, consideriamo un particolare tipo di antenna che descriveremo in seguito e cioè il cosiddetto **dipolo in $\lambda/2$**:



L'antenna viene qui alimentata da una **sorgente** a 150 MHz, con **tensione a vuoto** di 100 V (in valore efficace) e **resistenza serie** da 50 Ω. Se volessimo calcolare la potenza irradiata dall'antenna nello spazio, ci basterebbe sostituire l'antenna con il suo **circuito equivalente** e calcolare la potenza dissipata su R_{rad}:



I valori numerici utilizzati in figura non sono casuali: infatti, quelli di R_{rad} (=73 Ω) e quello di X (=42.5 Ω) sono costanti per il tipo di antenna che stiamo considerando. Il valore di $\mathbf{R_{perdita}}$, che dipende sostanzialmente dai conduttori usati per il collegamento tra la sorgente e l'antenna, è invece stato calcolato ipotizzando che i fili utilizzati siano del tipo **AWG20**: alla frequenza di lavoro di 150 MHz, si può verificare che il raggio r_W dei fili è molto maggiore della *profondità di penetrazione per effetto pelle* (che vale δ=5.4μm), per cui si può adottare la formula generale della *resistenza specifica* (cioè per unità di lunghezza) di un filo nel caso in cui esso operi ad alte frequenze:

$$r_{filo} = \frac{1}{2\pi r_W \sigma \delta} = 1.25\ \frac{\Omega}{m}$$

dove si sono usati i valori caratteristici di $\mathbf{r_W}$ e σ (conducibilità) per il cavo AWG20.

Per ottenere la resistenza ohmica complessiva dei fili usati per realizzare il dipolo, basta moltiplicare la resistenza specifica per la lunghezza L/2 (dove L=1m):

$$R_{perdita} = r_{filo}\frac{L}{2} = 1.25 \cdot \frac{1}{2} = 0.63\Omega$$

A questo punto, come accennato prima e come approfondiremo più avanti, in base alla definizione della **resistenza di radiazione** *la potenza attiva totale irradiata dall'antenna corrisponde esattamente alla potenza attiva dissipata su* R_{rad}. Allora, dato che la corrente in ingresso all'antenna è

$$I_{ant} = \frac{V_S}{R_S + R_{perdita} + R_{rad} + jX} = \frac{100\angle 0°}{50 + 0.63 + 73 + j42.5} = 0.765\angle -18.97°$$

deduciamo che la potenza attiva irradiata dall'antenna (pari a quella dissipata su R_{rad}) vale

$$P_{rad} = R_{rad}\left|I_{ant,eff}\right|^2 = 42.72W$$

Analogamente, la potenza dissipata dall'antenna a causa delle perdite, è

$$P_{perdita} = R_{perdita}\left|I_{ant,eff}\right|^2 = 0.368W$$

Ad ogni modo, a prescindere dai calcoli appena illustrati, il concetto importante è quello di *considerare l'antenna in trasmissione come un carico per la sorgente, in modo poi da ottenere, nota appunto la sorgente, la potenza irradiata dall'antenna*.

Un discorso abbastanza simile va fatto per studiare quello che succede in **ricezione**, dove la situazione è perfettamente duale (o, meglio, **reciproca**): in questo caso, infatti, il ricevitore rappresenta un carico $\mathbf{Z_L}$ che preleva energia da una sorgente rappresentata dall'antenna. Di conseguenza, *il modello circuitale da adottare è praticamente lo stesso di prima, ma a ruoli invertiti*: la sorgente (caratterizzata da una tensione a vuoto $\mathbf{V_O}$ e da una impedenza serie $\mathbf{Z_U}$) rappresenta l'antenna, mentre il carico (caratterizzato da una impedenza $\mathbf{Z_L}$) rappresenta l'utilizzatore.

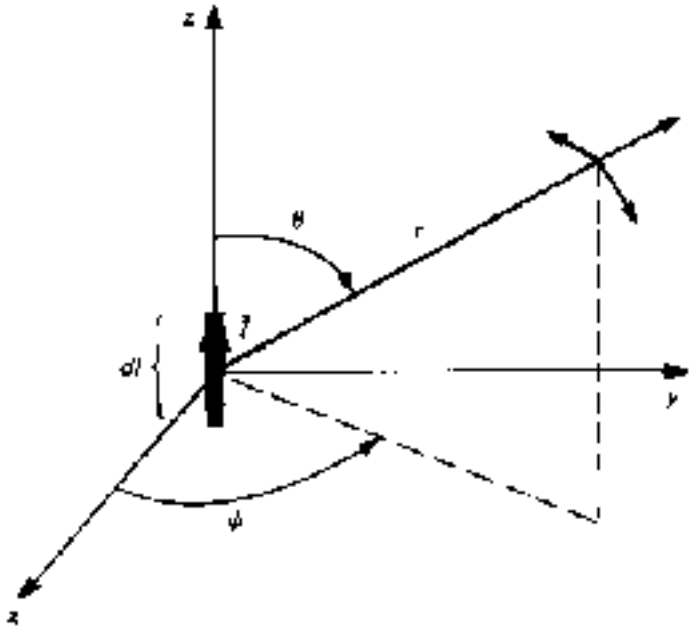
E' anche importante notare una cosa: se usassimo la stessa antenna (ad esempio il dipolo in $\lambda/2$ citato prima) sia in trasmissione sia in ricezione, tale antenna si comporterebbe in modo perfettamente **reciproco** nelle due situazioni e, dal punto di vista matematico, questa proprietà delle antenne si può caratterizzare tramite una opportuna **costante universale**.

In generale, vedremo che l'antenna in trasmissione viene caratterizzata da due parametri denominati rispettivamente **direttività** e **guadagno**, mentre invece l'antenna in ricezione viene caratterizzata da altri due parametri denominati rispettivamente **area efficace** e **altezza efficace**.

Infine, *osserviamo che i due modelli circuitali (in trasmissione ed in ricezione) tengono conto solo dell'accoppiamento delle antenne con la sorgente in trasmissione e con il carico in ricezione, mentre non tengono conto assolutamente di quello che avviene al segnale durante la propagazione nel mezzo di comunicazione*; l'analisi di questa propagazione si fonda sull'applicazione delle **equazioni di Maxwell**.

Caratterizzazione di una antenna in trasmissione

Per semplicità, consideriamo una **antenna puntiforme** situata nel centro di un sistema di riferimento cartesiano Oxyz:



Considerato un generico punto di osservazione P nello spazio, esso è individuato, oltre che da una terna (x,y,z) di coordinate cartesiane, anche da una terna **(r,θ,φ)** di **coordinate polari**: il raggio **r** (cui è associato il versore $\vec{a}_r$) corrisponde alla distanza di P dal centro O del sistema cartesiano; l'angolo **θ** (cui corrisponde il versore $\vec{a}_\theta$) è la cosiddetta **anomalia rispetto all'asse z**, ossia l'angolo formato dall'asse z e dal raggio vettore $\vec{r} = r \cdot \vec{a}_r$ che individua P ([1]); infine l'angolo φ (cui corrisponde il versore $\vec{a}_\varphi$) è l'angolo formato dall'asse x e dal raggio che individua (rispetto ad O) la proiezione di P sul piano [x,y] ([2]).

Possiamo pensare di misurare il **campo elettromagnetico** irradiato dall'antenna nel punto P; noto tale campo, sappiamo di poter anche calcolare il **vettore di Poynting** nel punto P: con riferimento alla definizione di tale vettore nel **dominio della frequenza** (cioè in regime sinusoidale permanente), abbiamo in generale che

$$\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{a}_r & \vec{a}_\theta & \vec{a}_\varphi \\ E_r & E_\theta & E_\varphi \\ H_r^* & H_\theta^* & H_\varphi^* \end{vmatrix}$$

Da notare che abbiamo usato il simbolo $\vec{p}$, con la "p" minuscola, in quanto si tratta di una **densità di potenza** (misurata cioè in **W/m²**).

In generale, dato che i vettori del campo sono anche dei **fasori** (dotati perciò di modulo e fase), la densità di potenza avrà anch'essa modulo e fase, ossia anche una parte reale ed una parte immaginaria. La parte immaginaria

[1] Segnaliamo che l'angolo θ si misura partendo dall'asse z

[2] L'angolo φ si misura partendo dall'asse x)

(**densità di potenza reattiva**) corrisponde ad un *palleggiamento* di potenza tra l'antenna trasmittente ed il mezzo circostante, mentre invece la parte reale (**densità di potenza attiva**) corrisponde ad una potenza definitivamente ceduta dall'antenna al mezzo e che si propaga nel mezzo stesso (allontanandosi dalla sorgente, come vedremo). A noi interessa dunque solo la densità di potenza attiva, ossia la quantità

$$\vec{p}_{att} = \mathrm{Re}\{\vec{p}\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{E}\times\vec{H}^*\}$$

D'ora in poi, salvo diverso avviso, parlando di **potenza** ci riferimento implicitamente alla potenza attiva, ossia appunto alla parte reale del vettore di Poynting. Si parla anche talvolta di *potenza disponibile*.

A questo punto, è ovvio che la densità di potenza varia da punto a punto in quanto varia il campo elettromagnetico. Quindi, si tratta di una funzione, in generale, delle coordinate (r,θ,φ):

$$\vec{p}_{att} = \vec{p}_{att}(r,\theta,\varphi)$$

Intensità di radiazione

Consideriamo un *elemento infinitesimo di superficie*, di area **dS**, posto in corrispondenza del generico punto $P(r,\theta,\varphi)$: se indichiamo con **dΩ** l'angolo solido sotteso da dS (rispetto cioè all'origine O del sistema di coordinate) e tenendo conto che siamo a distanza **r** da O, possiamo scrivere che

$$dS = r^2 d\Omega$$

Allora, facendo il prodotto tra la densità di potenza e questa area infinitesima, otteniamo nient'altro che la potenza totale (in W) intercettata da dS:

$$d\vec{P}_{att} = \vec{p}_{att}\cdot dS = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{E}\times\vec{H}^*\}\cdot r^2 d\Omega$$

Se portiamo il termine dΩ al primo membro, otteniamo una **densità di potenza (attiva) per angolo solido**, misurata quindi in **W/sterad**:

$$\frac{d\vec{P}_{att}}{d\Omega} = \frac{\vec{p}_{att}\cdot r^2}{d\Omega} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{E}\times\vec{H}^*\}\cdot r^2$$

A questa quantità si dà specificamente il nome di **intensità di radiazione** (o **intensità di potenza**) quando $d\Omega=1$:

$$I = \vec{p}_{att}\cdot r^2$$

L'intensità di radiazione rappresenta dunque una potenza per unità di angolo solido, misurata quindi ancora in W/sterad.

E' evidente una cosa: se allontaniamo il punto P, sempre però sulla stessa verticale (cioè senza modificare il versore $\vec{a}_r$), il valore di r^2 aumenta (in quanto aumenta r), mentre invece l'angolo solido $d\Omega$ rimane invariato. Inoltre, se facciamo l'ipotesi di essere a distanza sufficientemente elevata dalla sorgente ([3]), possiamo ritenere che il campo elettromagnetico presenti le caratteristiche del **campo lontano**, il che significa notoriamente che i moduli del campo elettrico e del campo magnetico dipendono entrambi da **1/r**: sotto questa ipotesi, essendo $\vec{p}_{att} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{E}\times\vec{H}^*\right\}$, è evidente che $\vec{p}_{att}$ dipende da $1/r^2$, il quale $1/r^2$ si annulla con il termine' r^2 presente nell'espressione di I.

Abbiamo cioè concluso che l'intensità di radiazione di una antenna è una funzione solo delle coordinate θ e φ, mentre invece non dipende dalla distanza r a cui la si misura:

$$I(\theta,\varphi) = \vec{p}_{att}\cdot r^2$$

Guadagno direttivo e direttività

Nota la densità di potenza attiva, possiamo facilmente calcolare la **potenza (attiva) complessiva irradiata** dall'antenna: infatti, anziché considerare solo il generico elemento di superficie dS, possiamo compiere una integrazione della densità di potenza su una superficie chiusa che racchiuda completamente l'antenna:

$$P_{rad} = \oint_{SUP}\vec{p}_{attiva}\cdot d\vec{S} = \oint_{SUP}\vec{p}_{attiva}\cdot\vec{a}_r dS$$

Confrontando la funzione integranda con $I(\theta,\varphi) = \frac{\vec{p}_{att}\cdot r^2}{d\Omega}$ e ricordando che $dS=r^2 d\Omega$, è evidente che l'espressione appena scritta equivale anche alla seguente:

$$\boxed{P_{rad} = \oint_{SUP} I(\theta,\varphi)d\Omega}$$

Quindi, *la potenza totale irradiata da una antenna si ottiene integrando l'intensità di radiazione dell'antenna stessa su una superficie chiusa che racchiude l'antenna stessa*.

Notiamo inoltre che, se fosse **I(θ,φ)=1**, il risultato di quell'integrale sarebbe **4π** (e cioè l'angolo solido sotto cui la sorgente vede la superficie chiusa che la circonda interamente). Di conseguenza, la potenza totale irradiata si ottiene integrando l'intensità di radiazione su un angolo solido di 4π steradianti.

Si definisce allora **intensità media di radiazione** il rapporto tra la potenza totale irradiata e 4π steradianti:

$$I_{media} = \frac{P_{rad}}{4\pi}$$

[3] E' noto che per distanza "sufficientemente elevata" si intende dire che tale distanza deve essere sufficientemente maggiore della lunghezza d'onda λ di lavoro.

Questa intensità media di radiazione ha un significato fisico evidente: infatti, richiedere che sia $I(\theta,\varphi)=1$ equivale sostanzialmente a richiedere che l'antenna irradi energia allo stesso modo in tutte le direzioni e cioè che si tratti di un **radiatore (puntiforme) isotropo**. Quindi, la quantità I_{media} corrisponde all'*intensità di radiazione di un radiatore isotropo*.

A questo punto, il **guadagno direttivo** di una antenna, in una determinata direzione (θ,φ), è definito come il rapporto tra l'intensità di radiazione in quella direzione e l'intensità media di radiazione:

$$D(\theta,\varphi)=\frac{I(\theta,\varphi)}{I_{media}}=\frac{4\pi\cdot I(\theta,\varphi)}{P_{rad}}$$

Questa formula dice dunque che $D(\theta,\varphi)$ si ottiene moltiplicando l'intensità di radiazione $I(\theta,\varphi)$ per 4π e dividendo il tutto per la potenza totale irradiata dall'antenna. Da notare, inoltre, che la presenza del termine 4π al numeratore fa sì che la funzione $D(\theta,\varphi)$ sia adimensionale.

Il valore massimo del guadagno direttivo prende il nome di **direttività** dell'antenna:

$$D_{max}=\frac{[I(\theta,\varphi)]_{max}}{I_{media}}=\frac{4\pi\cdot[I(\theta,\varphi)]_{max}}{P_{rad}}$$

Quindi, una volta individuato l'andamento di $D(\theta,\varphi)$, si individua la direzione in cui tale parametro assume il valore massimo e tale valore massimo è proprio la direttività.

Guadagno di potenza

Mentre il guadagno direttivo $D(\theta,\varphi)$ è una funzione solo del modo con cui una antenna irradia la potenza che le arriva (cioè è funzione del cosiddetto **diagramma di radiazione** dell'antenna), esiste un altro parametro, detto **guadagno di potenza** e indicato con $\mathbf{G(\theta,\varphi)}$, che tiene invece conto delle perdite dell'antenna.

Immaginiamo che la nostra antenna venga alimentata da una potenza complessiva $\mathbf{P_{app}}$ (si tratta cioè della potenza erogata dalla sorgente), ma che irradi invece solo una potenza $\mathbf{P_{rad}}$, frazione di P_{app}. La differenza P_{app}-P_{rad} è dissipata sia per effetto delle inevitabili perdite ohmiche dell'antenna sia per altri tipi di perdite, diversi da antenna ad antenna.

Si definisce allora **fattore di efficienza** (o **rendimento**) il rapporto tra potenza totale irradiata e potenza totale proveniente dall'alimentazione:

$$e=\frac{P_{rad}}{P_{app}}$$

Successivamente, si definisce **guadagno di potenza** il prodotto tra fattore di efficienza e guadagno direttivo dell'antenna:

$$G(\theta,\varphi) = e \cdot D(\theta,\varphi)$$

Dato che il guadagno direttivo è stato definito come $D(\theta,\varphi) = \frac{4\pi \cdot I(\theta,\varphi)}{P_{rad}}$, possiamo scrivere che il guadagno di potenza è

$$G(\theta,\varphi) = \frac{4\pi \cdot I(\theta,\varphi)}{P_{app}}$$

Si tratta dunque di una definizione assolutamente analoga a quella del guadagno direttivo, con la differenza di considerare la potenza totale in ingresso all'antenna al posto di quella effettivamente irradiata.

Per la maggior parte delle antenne, il fattore di efficienza risulta generalmente del 100%, il che significa che è indifferente parlare di guadagno di potenza o guadagno direttivo.

Radiatore puntiforme isotropico

Per definizione, un **radiatore puntiforme isotropico** è costituito da *una antenna ideale (cioè senza perdite, per cui G=D) che irradia potenza allo stesso modo in tutte le direzioni.*

Per una simile antenna, indicata con P_{rad} la potenza totale irradiata, è particolarmente facile calcolare la *densità di potenza irradiata*: infatti, considerando una sfera di raggio r centrata nel radiatore, è evidente che tale densità vale

$$\vec{p}_{att} = \frac{P_{rad}}{4\pi r^2}\vec{a}_r$$

Questa espressione è nota in quanto definisce il cosiddetto fenomeno della **divergenza sferica** delle onde: dato che il radiatore emette energia in tutte le direzioni e con la stessa intensità, man mano che ci si allontana da esso, ossia man mano che si considerano sfere di raggio d sempre più grande, la densità di potenza diminuisce con $1/r^2$ ed è una diminuzione a cui non si può in alcun modo rimediare.

Il radiatore puntiforme isotropico, per quanto sia un modello puramente ideale, è comunque molto utile come **antenna di riferimento**, con la quale confrontare i risultati ottenuti per le antenne reali. Ad esempio, si può pensare di determinare il guadagno direttivo ed il guadagno di potenza delle antenne proprio rispetto a quello di un radiatore isotropico.

Avendo detto che il radiatore puntiforme isotropico non presenta perdite, deduciamo che il guadagno direttivo coincide con il guadagno di potenza: applicando la definizione, quest'ultimo vale

$$I_0(\theta,\varphi) = \frac{4\pi \cdot I_0(\theta,\varphi)}{P_{app}} = \frac{4\pi \cdot r^2 \cdot \left|\vec{p}_{attiva}(\theta,\varphi)\right|}{P_{app}} = 1$$

dove si è tenuto conto sostanzialmente del fatto che il radiatore emette potenza uguale in tutte le direzioni, per cui la densità di potenza è $|\vec{p}_{att}(\theta,\varphi)| = \frac{P_{app}}{4\pi r^2}$.

In secondo luogo, molto spesso il guadagno (direttivo o di potenza) di una antenna è espresso in dB:

$$G_{dB} = 10\log_{10} G$$

In particolare, viene espressa in dB la direttività dell'antenna, ossia il valore massimo del guadagno direttivo: si caratterizza cioè l'antenna in base alla sua capacità di emettere potenza in una specifica direzione, ossia appunto quella di massima radiazione. Ad esempio, la direttività del cosiddetto **dipolo elettrico elementare** (di cui parleremo in seguito) è **1.76 dB** (corrispondente ad 1.5 in unità naturali), mentre invece quella di un radiatore isotropico puntiforme è ovviamente di 0 dB.

Caratterizzazione di una antenna in ricezione

Uno dei problemi di maggiore interesse, nello studio delle antenne, è quello relativo ai problemi di **accoppiamento** tra due antenne, di cui ovviamente una fa da *trasmettitore* e l'altra da *ricevitore*. Allora, è importantissimo il **principio della reciprocità**: esso implica che *la sorgente ed il ricevitore possano essere scambiati tra loro senza che i risultati subiscano alterazioni, a patto però che l'impedenza della sorgente e del ricevitore siano le stesse.*

Si possono poi dimostrare diverse proprietà conseguenti a questo principio. Citiamo due di queste:

- l'impedenza misurata ai morsetti di una antenna quando essa sia utilizzata da trasmettitore è pari alla impedenza di sorgente del **circuito equivalente di Thevenin** dell'antenna quando essa è usata per ricevere;
- il **diagramma di irradiazione** caratterizza una antenna sia che questa venga usata per la trasmissione sia che venga usata per la ricezione.

Apertura efficace

L'**apertura efficace** di una antenna è legata alla capacità dell'antenna stessa di estrarre energia da un'onda incidente. Essa è rigorosamente definita come il rapporto tra la potenza totale P_R raccolta dall'antenna[4] e la densità di potenza p_{att} dell'onda incidente, nell'ipotesi che la polarizzazione dell'onda incidente e quella dell'antenna ricevente siano le stesse:

$$A_{eff} = \frac{P_R}{p_{att}} \qquad [m^2]$$

[4] Questa "potenza totale raccolta" corrisponde alla potenza dissipata sul carico alimentato dall'antenna

Detta in altre parole, l'apertura efficace di una antenna ricevente è tale che sia soddisfatta la relazione $P_R = p_{att} A_{eff}$, dove ricordiamo che $\vec{p}_{att} = \vec{p}_{att}(r,\theta,\varphi)$.

In generale, anche l'apertura efficace di una antenna dipende dalla direzione: infatti, pur considerando la stessa densità di potenza incidente, basta variare la direzione di misura (ossia sostanzialmente l'orientamento dell'antenna) per ottenere una potenza P_R di volta in volta diversa. Scriviamo dunque in generale che

$$A_{eff}(\theta,\varphi) = \frac{P_R}{p_{att}} \qquad [m^2]$$

Quando l'impedenza del carico alimentato dall'antenna è pari al complesso coniugato dell'impedenza dell'antenna stessa, ossia quando si è in condizioni di adattamento tra antenna e carico, si verifica il massimo trasferimento di potenza al carico e quindi l'apertura efficace raggiunge il suo valore massimo, detto appunto **apertura efficace massima**:

$$A_{eff,max} = \frac{P_{R,max}}{p_{attiva}} \qquad [m^2]$$

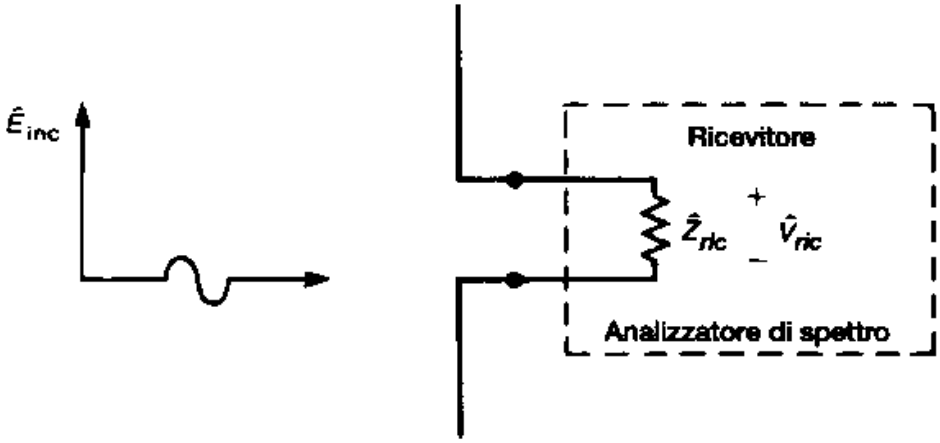
In generale, l'adattamento non viene mai raggiunto, anche perché ci sono sempre **perdite di potenza** nel trasferimento di energia dall'antenna al carico, così come abbiamo visto, in trasmissione, per il trasferimento di energia dalla sorgente all'antenna.

Supponiamo adesso che l'onda incidente sia polarizzata linearmente e che l'antenna che funge da ricevitore sia un **dipolo elettrico elementare**, che produce notoriamente in trasmissione onde polarizzate linearmente. Sotto queste ipotesi, dato che la definizione di apertura efficace richiede polarizzazioni identiche, bisogna fare in modo che l'antenna sia orientata, rispetto all'onda incidente, in modo da massimizzare i segnali in ingresso, ossia in modo che il vettore campo elettrico incidente sia parallelo al vettore campo elettrico prodotto dall'antenna nel caso in cui essa venga usata come trasmettitore.

Fattore d'antenna

Le proprietà elencate nel precedente paragrafo sono particolarmente utili quando le antenne sono usate per le telecomunicazioni oppure per impianti radar. Se invece si considerano altre applicazioni, ad esempio nel campo della compatibilità elettromagnetica e simili, il parametro più usato, per caratterizzare una antenna in ricezione, è il cosiddetto *fattore d'antenna*.

Consideriamo, per esempio, una **antenna a dipolo** usata per misurare il campo elettrico di un'onda incidente che sia piana, uniforme e polarizzata linearmente, come schematizzato nella figura seguente:



Immaginiamo inoltre che un ricevitore, ad esempio un analizzatore di spettro, sia collegato ai capi di questa antenna di misura. La tensione misurata da tale strumento (ad esempio visualizzata sullo schermo) è indicata con $\mathbf{V_{ric}}$ (si tratta chiaramente di un fasore, dotato perciò di modulo e fase).

Vogliamo mettere in relazione la tensione misurata dallo strumento con il campo elettrico incidente sull'antenna ed è possibile far ciò tramite il **fattore d'antenna**, definito proprio come *il rapporto tra il modulo del campo elettrico incidente sulla superficie dell'antenna di misura e il modulo della tensione misurata ai morsetti dell'antenna stessa:*

$$AF = \frac{\text{V/m dell'onda incidente}}{\text{V ricevuti}} = \frac{|E_{inc}|}{|V_{ric}|} \qquad \left[\frac{1}{m}\right]$$

Come si vede, si tratta di una grandezza che si misura in **metri^{-1}**. Talvolta si ragione anche in dB, scrivendo perciò che

$$AF_{dB} = |E_{inc}|_{dB\mu V/m} - |V_{ric}|_{dB\mu V}$$

Il genere, il fattore d'antenna viene fornito direttamente dal costruttore, mediante misure effettuate a diverse frequenze all'interno dell'intervallo di misura. I dati vengono talvolta forniti mediante tabelle (in cui si riporta AF in corrispondenza delle varie frequenze) o direttamente in forma grafica (tramite diagrammi cartesiani con AF in ordinate e le frequenze di misura in ascisse).

Il reciproco del fattore di antenna, che si misura evidentemente in metri, prende il nome di **altezza efficace dell'antenna**:

$$h_e = \frac{1}{AF} = \frac{\text{V ricevuti}}{\text{V/m dell'onda incidente}} = \frac{|V_{ric}|}{|E_{inc}|} \qquad [m]$$

E' necessario sottolineare, a questo punto, che la misura del fattore d'antenna fa riferimento ad una serie di importanti ipotesi; se una o più di queste ipotesi non fosse verificata nel momento in cui l'antenna viene effettivamente usata per compiere una misura, allora i dati rilevati con tale misura sono errati.

Le due ipotesi più importanti sono le seguenti:

- *il campo incidente deve essere polarizzato in modo da ottenere il massimo segnale ai morsetti dell'antenna:* ad esempio, nel caso di un dipolo o, più in generale, di una **antenna a filo**, questa ipotesi è verificata quando il campo incidente risulta parallelo all'asse dell'antenna, come nell'ultima figura;
- *l'impedenza di ingresso del ricevitore usato per la misura vera e propria deve essere uguale a quella del ricevitore usato per la taratura.* Il valore tipico è di **50 Ω**, pari all'impedenza di ingresso della maggior parte degli analizzatori di ingresso. Ad ogni modo, non ci si affida a semplici convezioni: è il costruttore stesso a dire esplicitamente il valore dell'impedenza di ingresso usata in fase di calibrazione dell'antenna. E' importante notare che non è necessario che ci sia adattamento tra ricevitore ed antenna, cosa che infatti non avviene quasi mai: è solo importante che l'impedenza di carico dell'antenna sia la stessa durante la misura e durante la taratura.

Osservazione

Volendo dare una definizione, ad esempio, dell'altezza efficace di una antenna senza dover fare preventivamente delle ipotesi particolare, si può scrivere semplicemente che

$$\vec{h}_e \bullet \vec{E}_{inc} = |V_0|$$

In pratica, per tenere conto sia della **polarizzazione** dell'onda incidente sia dell'orientazione dell'antenna ricevente, si considerano dei vettori anziché degli scalari come fatto prima: in tal modo, l'**altezza efficace** di una antenna usata in ricezione è definita come *quel vettore* $\vec{h}_e$ *che, moltiplicato scalarmente per il vettore del campo elettrico incidente, fornisce il modulo della tensione a vuoto dell'antenna (cioè la tensione misurata ai morsetti dell'antenna ricevente quando essi non sono chiusi su alcun carico).*

Naturalmente, in base alle considerazioni già fatte in precedenza, risulta $\vec{h}_e = \vec{h}_e(\theta,\varphi)$.

Inoltre, in base alla definizione appena riportata, ci sono evidentemente almeno due casi particolari: quando $\vec{h}_e$ è ortogonale al vettore campo elettrico, il loro prodotto scalare è nullo, ossia l'antenna non fornisce niente in uscita; viceversa, il massimo valore della tensione in uscita dall'antenna si ha quando i suddetti vettori sono paralleli.

Diagrammi di radiazione (cenni)

Si è visto che il guadagno direttivo è, in generale, funzione delle proprietà radiative dell'antenna, sintetizzate, come è noto, dai cosiddetti *diagrammi di radiazione*: il **diagramma di radiazione** di una antenna è semplicemente una

rappresentazione grafica della irradiazione dell'antenna in funzione delle direzioni del sistema di riferimento prescelto. Ci sono varie possibilità a seconda di cosa viene rappresentato graficamente:

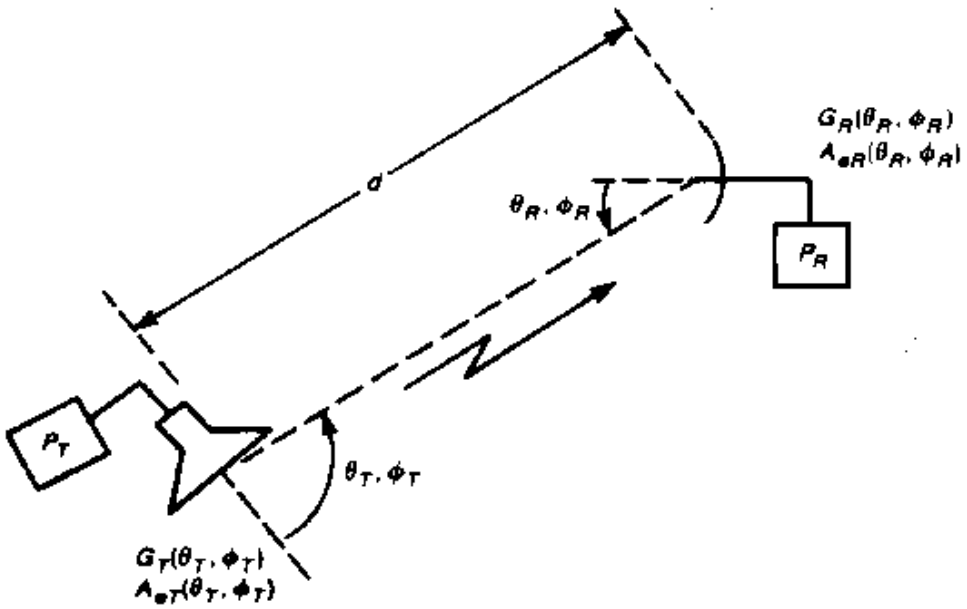
- è possibile, ad esempio, diagrammare l'ampiezza del campo elettrico irradiato, nel qual caso il diagramma di radiazione è un **diagramma di ampiezza del campo**;
- è anche possibile diagrammare la *potenza per unità di angolo solido*, nel quale caso si parla di **diagramma di potenza** (che, ovviamente, sarà proporzionale al quadrato dell'ampiezza del campo elettrico). Si parla anche di **pattern di radiazione** per indicare la distribuzione della potenza irradiata dall'antenna al variare delle direzioni nello spazio.

Nel nostro contesto, il diagramma di radiazione è sempre quello in cui riportiamo l'andamento dell'ampiezza del campo elettrico.

Equazione di Friis della trasmissione

Il calcolo esatto dell'**accoppiamento** tra due antenne presenta generalmente una serie di difficoltà. Allora, nella pratica, questo calcolo viene eseguito in modo approssimato tramite l'ausilio dell'*equazione di Friis della trasmissione*, che andiamo ad illustrare.

Consideriamo due generiche antenne in spazio libero, come mostrato nella figura seguente:



Una antenna trasmette una potenza totale $\mathbf{P_T}$, mentre la potenza ricevuta complessivamente sull'impedenza di carico dell'altra antenna è $\mathbf{P_R}$. L'antenna trasmittente è caratterizzata, lungo la direzione (θ_T,φ_T) della trasmissione, da un guadagno direttivo $D_T(\theta_T,\varphi_T)$ e da una apertura efficace $A_{eT}(\theta_T,\varphi_T)$. Analogamente, l'antenna ricevente è caratterizzata, lungo la direzione (θ_R,φ_R)

della trasmissione, da un guadagno direttivo $D_R(\theta_R,\varphi_R)$ e da una apertura efficace $A_{eR}(\theta_R,\varphi_R)$.

Sulla base di queste informazioni, possiamo fare i seguenti discorsi. In primo luogo, possiamo calcolare la *densità di potenza disponibile* in corrispondenza dell'antenna ricevente: ipotizzando che l'antenna ricevente si trovi nella regione di campo lontano dell'antenna trasmittente, possiamo assumere che il campo elettromagnetico sia, localmente, quello di un'onda piana uniforme; di conseguenza, in base ai discorsi visti in precedenza, la densità di potenza all'antenna ricevente si otterrà come prodotto della densità di potenza di un *radiatore puntiforme isotropico* per il guadagno direttivo dell'antenna trasmittente nella direzione in cui avviene la trasmissione:

$$p_{attiva} = \frac{P_T}{4\pi d^2} D_T(\theta_T,\varphi_T)$$

Il senso di questa formula è evidente: se l'antenna trasmittente fosse un radiatore isotropico puntiforme e nell'ipotesi implicita che il mezzo sia senza perdite (come nel caso ideale del vuoto), la densità di potenza sarebbe quella delle onde sferiche, ossia appunto $\frac{P_T}{4\pi d^2}$; al contrario, dato che l'antenna trasmittente ha delle *proprietà direzionali*, queste sono tenute in conto dal guadagno direttivo, ovviamente considerato nella direzione che congiunge tale antenna con quella ricevente.

Se adesso consideriamo le caratteristiche dell'antenna ricevente, sappiamo che, per definizione, il prodotto tra la densità di potenza disponibile e l'area efficace corrisponde proprio alla potenza ricevuta dall'antenna: scriviamo perciò che

$$P_R = p_{attiva} \cdot A_{eR}(\theta_R,\varphi_R)$$

Naturalmente, avendo supposto che l'antenna riceva potenza solo nella direzione individuata dalla coppia di angoli (θ_R,φ_R), si è considerato il valore dell'apertura efficace solo lungo tale direzione.

Se ora combiniamo le ultime due relazioni, concludiamo che la potenza ricevuta, nella direzione congiungente l'antenna ricevente e quella trasmittente, vale

$$P_R = \frac{P_T}{4\pi d^2} D_T(\theta_T,\varphi_T) \cdot A_{eR}(\theta_R,\varphi_R)$$

Questa espressione potrebbe già andare bene per i nostri scopi. Tuttavia, in essa non appare esplicitamente la frequenza di lavoro o, in alternativa, la corrispondente lunghezza d'onda; per far comparire la lunghezza d'onda, è sufficiente allora utilizzare l'espressione che lega l'apertura efficace dell'antenna ricevente con il suo guadagno direttivo:

$$A_{eff,max}(\theta,\varphi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} D(\theta,\varphi)$$

Come si vede, questa espressione fa riferimento al valore massimo dell'apertura efficace, il che si ottiene quando il carico dell'antenna è adattato e quando la polarizzazione dell'onda incidente è parallela a quella del campo prodotto dall'antenna se venisse usata in trasmissione. Facciamo allora l'ipotesi che entrambe queste condizioni siano verificate: sostituendo nell'espressione di P_R, concludiamo che tale potenza ricevuta risulta essere

$$P_R = P_T \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 \cdot D_R(\theta_R,\varphi_R)\cdot D_T(\theta_T,\varphi_T)$$

Questa è dunque l'**equazione di Friis della trasmissione**, scritta nella sua forma più tradizionale. Da notare che, spesso, al posto del guadagno direttivo si usa il *guadagno di potenza G*: infatti, abbiamo visto in precedenza che i due guadagni sono uguali se l'antenna non presenta perdite, il che si può ritenere vero nella maggior parte dei casi.

Segnaliamo inoltre che, nella pratica, i guadagni delle antenne e le potenze in gioco sono espressi in dB. Allora, l'equazione di Friis in dB assume la seguente espressione:

$$(P_R)_{dB} = 10\log_{10} P_R = (P_T)_{dB} + 20\log_{10}\frac{\lambda}{4\pi d} + 10\log_{10} D_R(\theta_R,\varphi_R) + 10\log_{10} D_T(\theta_T,\varphi_T)$$

Questa espressione consente, tra le altre cose, di ricavare facilmente la cosiddetta **attenuazione in spazio libero**, ossia l'attenuazione subita dal segnale, nella sua propagazione dall'antenna trasmittente a quella ricevente, a causa solamente della divergenza sferica delle onde:

$$(\alpha_{SL})_{dB} = (P_T)_{dB} - (P_R)_{dB} = 20\log_{10}\frac{4\pi d}{\lambda} - 10\log_{10} D_R(\theta_R,\varphi_R) - 10\log_{10} D_T(\theta_T,\varphi_T)$$

Questa espressione mostra sostanzialmente due cose:

- la prima è che non è possibile eliminare, come contributo all'attenuazione, il termine $20\log_{10}\frac{4\pi d}{\lambda}$, che rappresenta proprio la divergenza sferica; questo termine prende il nome di **attenuazione di tratta** (o anche *attenuazione base*): una volta fissata la distanza d tra le due antenne, esso è tanto maggiore quanto minore è la lunghezza d'onda, ossia quanto maggiore è la frequenza[5];
- la seconda è che l'attenuazione risulta tanto più ridotta quanto maggiori sono i guadagni direttivi delle due antenne nella direzione di trasmissione; si tratta di un risultato ovvio.

[5] Queste considerazioni sembrerebbero dire che lo "spazio libero" sia un mezzo passa-basso, dato che l'attenuazione aumenta al crescere della frequenza. In realtà, è noto che non è così: l'atmosfera terrestre è infatti notoriamente un mezzo passa-banda, per cui le equazioni appena individuate valgono solo nella banda passante.

Un'altra espressione di notevole utilità pratica è quella che consente di calcolare l'intensità del campo elettrico trasmesso ad una certa distanza *d* dall'antenna trasmittente. Infatti, cominciamo col ricordare che, a patto di essere in zona lontana dall'antenna trasmittente, la densità di potenza dell'onda trasmessa è (localmente) quella di un'onda piana uniforme, per cui è data dalla nota espressione

$$\vec{p}_{attiva} = \frac{\left|\vec{E}\right|^2}{2\eta_0}\vec{a}_r$$

Avendo detto prima che vale anche la relazione $p_{attiva} = \frac{P_T}{4\pi d^2} D_T(\theta_T, \varphi_T)$, possiamo combinare le due per ottenere che il modulo del campo elettrico, a distanza d dalla sorgente, vale

$$\left|\vec{E}\right| = \sqrt{P_T \frac{2\eta_0}{4\pi d^2} D_T(\theta_T, \varphi_T)}$$

Ricordando che l'impedenza caratteristica del vuoto è $\eta_0 = 120\pi\ \Omega$, concludiamo che

$$\boxed{\left|\vec{E}\right| = \frac{\sqrt{P_T \cdot 60 \cdot D_T(\theta_T, \varphi_T)}}{d}}$$

Torniamo adesso all'equazione di Friis nella sua forma generale. In base ai discorsi fatti, ci sono alcune ipotesi implicite sotto le quali vale questa equazione:

- la prima ipotesi è che si possa usare, per l'antenna ricevente, la relazione $A_{eff,max}(\theta,\varphi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} D(\theta,\varphi)$, il che è possibile solo se l'antenna è *adattata* alla propria impedenza di carico ed alla polarizzazione dell'onda incidente; se almeno una di queste condizioni non è verificata, anche l'equazione finale non potrà essere applicata, per cui la si potrà considerare solo come un limite superiore per l'accoppiamento, ossia come il massimo accoppiamento cui potremo tendere nel nostro progetto;
- la seconda ipotesi è che entrambe le antenne si trovino nella regione di *campo lontano* dell'una rispetto all'altra, in modo da poter ritenere che il campo sia rappresentabile in termini di onda piana uniforme. Di solito, il criterio usato per la determinazione della regione di campo lontano di una antenna è il seguente: la distanza $\mathbf{d_0}$, dall'antenna in questione, alla quale si può ritenere di essere in campo lontano è il valore maggiore da scegliersi tra $\mathbf{2D^2/\lambda}$ e $\mathbf{3\lambda}$, dove λ è la massima lunghezza d'onda di lavoro e D la massima dimensione dell'antenna. Generalmente, per le antenne ad apertura si usa $2D^2/\lambda$, mentre invece per le antenne a filo si usa 3λ:

* il valore $2D^2/\lambda$ è stato scelto in quanto garantisce che, sui bordi dell’antenna, l’onda incidente differisca, per quanto riguarda la fase rispetto a quella dell’onda piana, di non più di $\lambda/16$;

* il valore 3λ garantisce invece che l’impedenza d’onda (pari al rapporto tra i moduli del campo elettrico e di quello magnetico) dell’onda incidente sia approssimativamente la stessa dello spazio libero ($=\eta_0$)

Autore: **Sandro Petrizzelli**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1