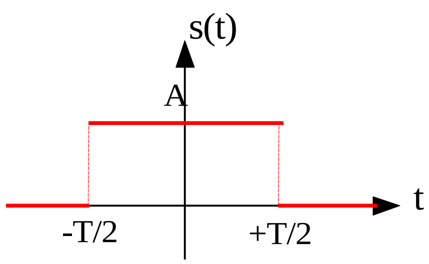
Appunti di "Controlli Automatici 1"
Capitolo 2 - parte II
Impulso di Dirac

Impulso di Dirac: caratteristiche e proprietà

Definizione

Vogliamo adesso studiare le principali proprietà della funzione denominata **impulso di Dirac**: essa viene convenzionalmente indicata con il simbolo **δ(t)** e può essere vista come un <u>rettangolo, di area unitaria, con base che tende a 0 (e quindi altezza che tende a +∞)</u>. Vediamo nel dettaglio questo concetto.

Consideriamo il segnale rappresentato in figura:



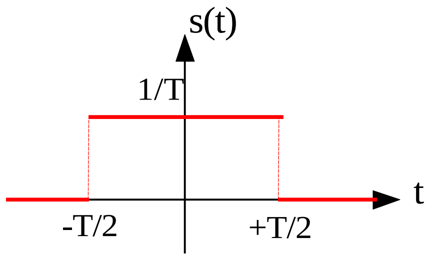
Questo segnale ha rappresentazione analitica

$$s(t) = A\mathrm{rect}\frac{t}{T} = A\left[H\left(t+\frac{T}{2}\right) - H\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$$

e spesso viene anche chiamato **impulso di durata finita** proprio in contrapposizione a quello che stiamo per dire.

Per A generico, quel segnale ha area pari ad AT. Evidentemente, perché esso abbia area unitaria, deve essere A=1/T, ossia l'espressione analitica del segnale deve essere

$$s(t) = \frac{1}{T}\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$



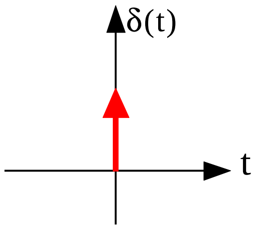
E' anche evidente che, per T→0, l'area del segnale rimane invariata e pari ad 1, la base tende a zero e l'altezza tende all' infinito per t=0 mentre è nulla altrove.

Allora, si definisce **impulso di Dirac** il segnale

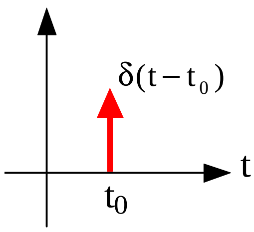
$$\boxed{\delta(t) = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \lim_{T\to 0}\left[\frac{1}{T}\left(u\left(t+\frac{T}{2}\right) - u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)\right]}$$

cioè appunto il limite, per t→0, dell'impulso unitario di durata finita.

Solitamente, lo si indica graficamente nel modo seguente:



Ovviamente, questa figura è relativa al caso in cui l'impulso è applicato nell'istante t=0: se, al contrario, esso fosse applicato in un istante t_0 diverso da 0, allora il segnale sarà $\delta(t-t_0)$ e la rappresentazione sarà



Vediamo qualche proprietà fondamentale di questo segnale (che è ovviamente ideale, in quanto è impossibile realizzarlo dal punto di vista fisico).

1° proprietà: area unitaria

Una delle proprietà fondamentali dell'impulso di Dirac è quella di avere <u>area unitaria</u>: da un punto di vista analitico, ciò significa che

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1}$$

ed anche che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)dt = 1 \qquad \forall t_0$$

2° proprietà: proprietà di setaccio

Un'altra proprietà è la seguente: consideriamo il segnale $z(t) = \delta(t - t_0)s(t)$ (dove s(t) è un segnale generico) e facciamone l'integrale tra -∞ e +∞:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)s(t)dt$$

Dato che il $\delta(t-t_0)$ vale, per definizione, sempre zero tranne che nell'istante $t=t_0$, dove invece vale 1, è ovvio che

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)s(t)dt = s(t_0)}$$

Questa proprietà è detta **proprietà di setaccio**, nel senso che essa prende, tra tutti i valori assunti da s(t) nel suo intervallo di definizione, solo quello relativo all'istante di applicazione dell'impulso. E' ovvio che un caso particolare si ha quando $t_0=0$: in questo caso, abbiamo che

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)s(t)dt = s(0)}$$

3° proprietà: prodotto di convoluzione

Una immediata conseguenza della proprietà di setaccio ha a che fare con il prodotto di convoluzione prima introdotto: infatti, dato sempre un segnale s(t) generico, il prodotto di convoluzione di questo segnale per il δ(t) vale per definizione

$$s(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

Il segnale δ(t) è una funzione chiaramente pari, per cui

$$\delta(t-\tau)=\delta(-(\tau-t))=\delta(\tau-t)$$

Sostituendo in quell’integrale, abbiamo che

$$s(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\delta(\tau-t)d\tau$$

Quell’integrale, in base alla proprietà di setaccio vista prima, vale s(t): quindi

$$\boxed{s(t)*\delta(t)=s(t)}$$

il che significa che *la convoluzione di un segnale per l’impulso di Dirac è pari sempre al segnale stesso.*

In modo analogo, possiamo affermare che *ogni segnale può anche essere espresso come convoluzione di se stesso per l’impulso unitario (non traslato).*

Trasformata di Laplace del delta di Dirac

Come ultima proprietà, andiamo a calcolare la trasformata di Laplace dell’impulso di Dirac: applicando semplicemente la definizione di trasformata e la proprietà di setaccio, abbiamo che

$$L[\delta(t)](s)=\int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt=\left[e^{-st}\right]_{t=0}=1$$

Facciamo osservare che, come estremo inferiore dell’integrale, è stato preso 0^- anziché 0: questa è una convenzione spesso adottata per le trasformate di tutti i segnali nella cui espressione analitica sia presente la funzione impulsiva. Quando, invece, la funzione impulsiva non compare, allora scegliere 0^- oppure 0 oppure 0^+ è assolutamente la stessa cosa.

Esempio di applicazione della proprietà di derivazione nel tempo

Consideriamo il segnale causale $f(t)=H(t)\cos t$. Questo segnale presenta in t=0 una discontinuità, in quanto vale 0 in $t=0^-$ e vale 1 in $t=0^+$. Vogliamo calcolare la sua trasformata di Fourier non direttamente, ma usando la proprietà di derivazione precedentemente illustrata: si tratta cioè della proprietà in base alla quale risulta

$$L[f'(t)](s)=sL[f(t)](s)-f(0^-)$$

per cui ci serve per prima cosa la trasformata di Laplace del segnale derivato di f(t): tale segnale è evidentemente

$$f'(t)=-H(t)\sin(t)+\delta(t)\cos(t)$$

D'altra parte, in base alla proprietà di δ(t) di valere 1 in t=0 e 0 altrove, è evidente che $\delta(t)\cos(t)=\delta(t)\cos(0)=\delta(t)$, per cui l'espressione del segnale derivato si riduce a

$$f'(t)=-H(t)\sin(t)+\delta(t)$$

Calcoliamo adesso la trasformata di Laplace di questo segnale: applicando semplicemente la proprietà di linearità, abbiamo che

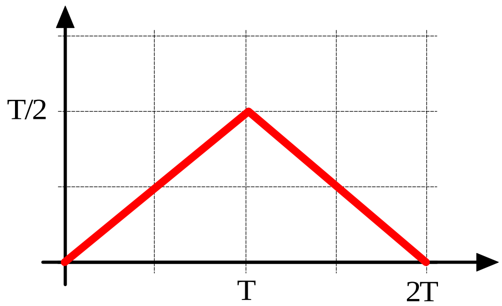
$$L[f'(t)](s)=L[-H(t)\sin(t)+\delta(t)]=-L[H(t)\sin(t)](s)+L[\delta(t)]=-\frac{1}{1+s^2}+1$$

Nota questa trasformata, applichiamo la proprietà di derivazione prima richiamata:

$$L[f(t)](s)=\frac{1}{s}L[f'(t)](s)+\frac{1}{s}f(0^-)=\frac{1}{s}\left[-\frac{1}{1+s^2}+1\right]+0=-\frac{1}{s\left(1+s^2\right)}+\frac{1}{s}=\frac{s^2}{s\left(1+s^2\right)}=\frac{s}{1+s^2}$$

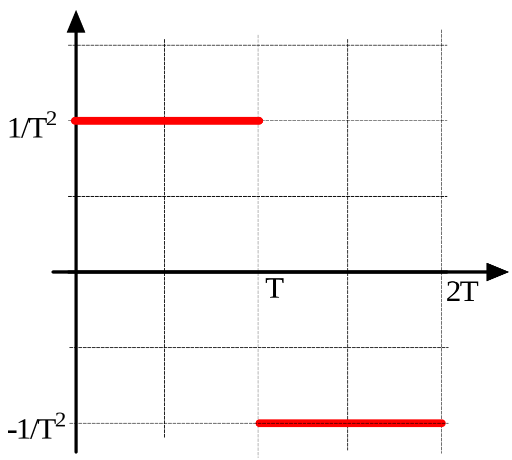
Funzioni impulsive di ordine superiore

Consideriamo il seguente segnale f(t):



Questo segnale gode della proprietà per cui $\lim_{T\to 0} f(t)=\delta(t)$.

Il suo segnale derivato è fatto nel modo seguente:



Esso gode della proprietà per cui $\lim_{T\to 0} f'(t) = \delta'(t)$, dove $\delta'(t)$ prende il nome di **doppietto**. Ci interessa la sua trasformata di Laplace: possiamo allora cominciare a scrivere che

$$L[\delta'(t)] = L\left[\lim_{T\to 0} f'(t)\right] = \lim_{T\to 0} L[f'(t)]$$

D'altra parte, la rappresentazione analitica di f'(t) è immediata:

$$f'(t) = \frac{1}{T^2}H(t) - \frac{2}{T^2}H(t-T) + \frac{1}{T^2}H(t-2T)$$

Possiamo perciò scrivere che

$$L[\delta'(t)] = \lim_{T\to 0} L\left[\frac{1}{T^2}H(t) - \frac{2}{T^2}H(t-T) + \frac{1}{T^2}H(t-2T)\right] = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T^2}L[H(t) - 2H(t-T) + H(t-2T)] =$$

$$= \lim_{T\to 0}\frac{1}{T^2}\left[\frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-Ts} + \frac{1}{s}e^{-2Ts}\right] = \frac{1}{s}\lim_{T\to 0}\frac{1-2e^{-Ts}+e^{-2Ts}}{T^2} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo trovato una forma indeterminata, per cui applichiamo il ***teorema di L'Hopital***:

$$L[\delta'(t)] = \frac{1}{s}\lim_{T\to 0}\frac{1-2e^{-Ts}+e^{-2Ts}}{T^2} \xrightarrow{\text{L'Hopital}} \frac{1}{s}\lim_{T\to 0}\frac{0-\left(-2se^{-Ts}\right)+\left(-2se^{-2Ts}\right)}{2T} =$$

$$= \frac{1}{s}\lim_{T\to 0}\frac{2se^{-Ts}-2se^{-2Ts}}{2T} = \lim_{T\to 0}\frac{e^{-Ts}-e^{-2Ts}}{T} = \frac{0}{0}$$

Ancora una volta abbiamo trovato una forma indeterminata, per cui riapplichiamo l'Hopital:

$$L[\delta'(t)] = \lim_{T\to 0}\frac{e^{-Ts}-e^{-2Ts}}{T} \xrightarrow{\text{L'Hopital}} \lim_{T\to 0}\frac{-se^{-Ts}+2se^{-2Ts}}{1} = s$$

Possiamo dunque concludere che $L[\delta'(t)] = s$. In effetti, ricordando anche che $L[\delta(t)] = 1$, possiamo concludere circa l'esistenza della seguente proprietà generale:

$$\boxed{L\left[\frac{d^k}{dt^k}\delta(t)\right] = s^k}$$

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry