Appunti di “Controlli Automatici 1”
Capitolo 2 - parte III
Antitrasformata di Laplace

Antitrasformazione di Laplace

Introduzione: funzioni razionali

Esaminando le proprietà fondamentali della trasformata di Laplace, abbiamo detto che la condizione necessaria affinché una funzione F(s) possa essere la trasformata di Laplace di un segnale f(t) è che essa sia infinitesima all'infinito, ossia che $\boxed{\lim_{Re(s)\to\infty} F(s)=0}$. Supponiamo, in particolare, che la nostra F(s) sia una funzione razionale del tipo

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$$

dove P e Q sono due **polinomi a coefficienti complessi** di grado, rispettivamente, m e n e dove $s\in C$. In questo caso, il limite per $Re(s)\to\infty$ della F(s) esiste e fornisce un risultato diverso a seconda del valore di m e di n:

$$\lim_{Re(s)\to+\infty}\frac{P(s)}{Q(s)}=\begin{cases}\infty & \text{se } m>n\\ \frac{b_m}{a_n} & \text{se } m=n\\ 0 & \text{se } m<n\end{cases}$$

dove è ovvio che a_n è il coefficiente di massimo grado di P(s) e b_m quello di massimo grado di Q(s).

E' possibile dimostrare, sotto certe ipotesi che adesso elencheremo, che la condizione necessaria citata prima è anche sufficiente: *se la F(s) è una funzione razionale fratta, ossia data dal rapporto P(s)/Q(s), se m<n (cioè se F(s) è razionale propria) e se i due polinomi hanno zeri diversi, allora F(s) sarà certamente la trasformata di Laplace di un qualche segnale.*

Antitrasformazione delle funzioni razionali strettamente proprie

Abbiamo dunque appurato che una funzione razionale fratta del tipo $P(s)/Q(s)$ è antitrasformabile secondo Laplace nelle semplici ipotesi che il grado del numeratore sia strettamente minore di quello del denominatore e che numeratore e denominatore abbiano zeri diversi. Dobbiamo allora capire come effettuare, sotto queste ipotesi, l'antitrasformazione.

Intanto, supponiamo che la funzione F(s) abbia una espressione del tipo seguente:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}$$

Per semplicità, facciamo l'ipotesi che il coefficiente di grado massimo al denominatore sia unitario (il che corrisponde a richiedere che il polinomio Q(s) sia **monico**):

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}$$

E' ovvio che, se così non fosse, basterebbe dividere la frazione a secondo membro per a_n stesso.

La differenza n-m tra i gradi del denominatore e del numeratore si dice **grado relativo** della funzione razionale considerata: esso è almeno pari ad 1 per le funzioni strettamente proprie, è pari a 0 quando la funzione è propria ed è minore di 0 quando la funzione è impropria. <u>Facciamo allora l'ipotesi che la funzione F(s) sia strettamente propria</u>.

Essendo data dal rapporto di due polinomi, la funzione F(s) presenta degli **zeri**, ossia dei valori (in numero pari ad n) che annullano il polinomio a numeratore, e dei **poli**, ossia dei valori (in numero pari ad m) che annullano il polinomio a denominatore: allora, <u>l'altra ipotesi da fare è che gli zeri siano distinti dai poli</u>.

Sotto queste ipotesi, possiamo espandere la funzione F(s) mediante la **formula dei fratti semplici**. Tale formula è diversa a seconda della molteplicità dei poli, ossia a seconda della molteplicità delle radici dell'equazione

$$Q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

Esaminiamo prima il caso in cui questa equazione ammette tutte **radici semplici**, ossia radici di molteplicità algebrica unitaria: indicate con $p_1, p_2, ..., p_n$ tali radici, potremo dunque scrivere che

$$Q(s) = (s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)$$

Allora, la formula dell'espansione in fratti semplici dice che la funzione F(s) è esprimibile nel modo seguente:

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{s+p_k}$$

in cui le costanti R_K prendono il nome di **residui** (ciascuno relativo al corrispondente polo p_k): si tratta di costanti che risultano reali in corrispondenza dei poli reali e complesse coniugate in corrispondenza delle coppie di poli complessi coniugati. Analiticamente, il generico residuo si calcola nel modo seguente:

$$R_k = G(s)(s+p_k)\big|_{s=p_k}$$

Una volta effettuata la scomposizione in fratti semplici, si può procedere alla antitrasformazione della funzione F(s) applicando semplicemente la proprietà di linearità ed anche le proprietà

$$\begin{cases} L[t^n](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \\ L[t^n e^{\alpha t}](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}} \end{cases}$$

della trasformata di Fourier: si ottiene in tal modo una espressione del tipo

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} R_k e^{-p_k t}$$

Questo accade dunque nel caso semplice in cui la funzione F(s) presenta solo poli semplici. Vediamo invece come cambiano le cose in presenza di **poli multipli**.

Supponiamo dunque che gli n poli della funzione F(s) si possano dividere in h gruppi, ciascuno formato da r_k (k=1,....,h) poli coincidenti. In altre parole, stiamo supponendo che ci siano h poli diversi $p_1, p_2, \ldots, p_h$ caratterizzati rispettivamente da molteplicità $r_1, r_2, \ldots, r_h$ maggiori o uguali ad 1. E' chiaro che queste molteplicità sono tali che

$$\sum_{k=1}^{h} r_k = n$$

Sotto queste ipotesi, si può scrivere che

$$Q(s) = (s+p_1)^{r_1}(s+p_2)^{r_2}\ldots(s+p_n)^{r_k}$$

e la formula di espansione in fratti semplici dice quanto segue:

$$F(s)=\frac{P(s)}{(s+p_1)^{r_1}(s+p_2)^{r_2}\dots(s+p_n)^{r_k}}=\sum_{k=1}^{h}\sum_{\ell=1}^{r_k}\frac{R_{k\ell}}{(s+p_k)^{r_k-\ell+1}}$$

dove le nuove costanti $R_{k\ell}$ si ricavano mediante la formula

$$R_{k\ell}=\frac{1}{(\ell-1)!}\left\{\frac{d^{\ell-1}}{ds^{\ell-1}}\left[(s+p_k)^{r_k}\frac{P(s)}{Q(s)}\right]\right\}_{s=p_k}$$

Una volta effettuata l'espansione, l'operazione di antitrasformazione è abbastanza immediata:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{h}\sum_{\ell=1}^{r_k}\frac{R_{k\ell}}{(r_k-\ell)}t^{r_k-\ell}e^{-p_k t}$$

Anche in questo caso, i coefficienti $R_{k\ell}$ risultano complessi coniugati in corrispondenza di poli complessi coniugati, per cui i termini esponenziali complessi $e^{-p_k t}$ possono essere sostituiti con prodotti di esponenziali reali $e^{-\mathrm{Re}(p_k)t}$ e funzioni trigonometriche $e^{-j\mathrm{Im}(p_k)t}=\cos(\mathrm{Im}(p_k)t)+j\sin(\mathrm{Im}(p_k)t)$.

Applicazione alle equazioni differenziali

L'applicazione più importante dei concetti appena esposti è quella sulle **equazioni differenziali**: sappiamo infatti che una equazione differenziale, con relativi valori iniziali (cioè quello che si definisce un **problema di Cauchy**), corrisponde al modello matematico (dinamico) di un sistema che subisce l'azione di un ingresso x(t), che rappresenta il termine noto, e reagisce con una uscita rappresentata dalla funzione incognita y(t). Applicando l'operatore trasformata di Laplace all'equazione differenziale si passa ad una nuova equazione, algebrica, dove l'unica incognita è la funzione Y(s), cioè la trasformata di y(t). Questa equazione, nel caso più generale possibile, è espressa nella seguente forma:

$$\boxed{Y(s)=H(s)\Gamma(s)+H(s)X(s)}$$

La funzione Γ(s) è una funzione che dipende esclusivamente dalle condizioni iniziali, cioè dai valori che la funzione incognita y(t), ed eventualmente le sue derivate (a seconda del grado della equazione), assume nel punto $t=0^-$. Nel caso che le condizioni iniziali siano nulle, questa funzione vale zero, per cui la Y(s) è data solo dal prodotto tra H(s), detta **funzione di trasferimento**, e X(s), ossia la trasformata del segnale x(t) in ingresso.

Per ottenere l'espressione di y(t), basta dunque antitrasformare la funzione Y(s), ossia antitrasformare il secondo membro di quella relazione. Dato che lo scopo di questa antitrasformazione è ricavare la risposta del sistema alla sollecitazione x(t), spesso non serve conoscere l'espressione completa di y(t), bensì solo quella per t→+∞, ossia ciò che accade "**a regime**". In quest'ottica, non influiscono più di tanto sulla risposta y(t) le condizioni iniziali del sistema, per cui noi possiamo limitarci ad antitrasformare la funzione H(s)X(s), ossia a considerare il caso di <u>*condizioni iniziali identicamente nulle*</u>.

Questa funzione H(s)X(s), detta **risposta forzata** del sistema alla sollecitazione X(s), è sempre una funzione razionale, data cioè dal rapporto tra due polinomi. Possiamo allora provare ad applicare quanto visto prima circa l'antitrasformazione delle funzioni razionali.

Esempio

Consideriamo il seguente problema di Cauchy di ordine 2:

$$\begin{cases} y''+3y'+y = x(t) \\ x(t) = r(t) - 2r(t-1) + r(t-2) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Esso può essere pensato come un sistema che, nelle condizioni iniziali specificate, riceve un segnale in ingresso x(t) e risponde con un segnale in uscita y(t). Risolvere quel problema di Cauchy significa determinare il segnale y(t).

Applicando l'operatore trasformata di Laplace all'equazione si ottiene la seguente espressione per la trasformata del segnale y(t):

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+3s+1}X(s) + \frac{1}{s^2+3s+1}\Gamma(s)$$

La prima cosa da fare è verificare con che tipo di sistema abbiamo a che fare: andiamo perciò a trovarci i poli della funzione di trasferimento: si trova che tali α e β hanno entrambi parte reale negativa. Questo ci dice che il sistema è **asintoticamente stabile**: allora, ai fini della valutazione della risposta del sistema, possiamo limitarci a calcolare la risposta forzata, trascurando sia il contributo delle condizioni iniziali sia quello della risposta naturale. Dato che

$$G(s) = \frac{1}{s^2+3s+1}X(s) - \frac{A}{s-\alpha} - \frac{B}{s-\beta}$$

l'unico problema sta nell'antitrasformare la funzione $X(s)/(s^2+3s+1)$, in quanto l'antitrasformazione delle 2 frazioni è immediata.

Esempio

Vogliamo antitrasformare la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^2+s+s}{(s+3)^2(s+1)(s+5)}$$

Questa funzione presenta 3 poli (ossia tre zeri del denominatore) tutti reali: s=-3 è un polo del 3° ordine, s=-1 è un polo semplice ed anche s=-5 è un polo semplice. Scomponiamo allora la funzione in fratti semplici:

$$G(s)=\frac{A}{(s+3)^2}+\frac{B}{(s+3)}+\frac{C}{(s+1)}+\frac{D}{(s+5)}$$

Possiamo immediatamente calcolarci 3 di quei quattro residui:

$$A=G(s)(s+3)^2\Big|_{s=-3}=\left[\frac{s^2+s+s}{(s+1)(s+5)}\right]_{s=-3}=-\frac{7}{4}$$

$$C=G(s)(s+1)\Big|_{s=-1}=\left[\frac{s^2+s+s}{(s+3)^2(s+5)}\right]_{s=-1}=\frac{1}{16}$$

$$D=G(s)(s+5)\Big|_{s=-5}=\left[\frac{s^2+s+s}{(s+3)^2(s+1)}\right]_{s=-1}=-\frac{21}{16}$$

Adesso, per calcolare il coefficiente B abbiamo diverse strade: la prima è quella di applicare il **teorema dei residui** ; la seconda è quella di calcolare la G(s) ad esempio in s=0 in modo da uguagliare con il valore assunto dalla sua scomposizione in fratti semplici sempre in s=0; una terza strada potrebbe essere l'applicazione di un noto teorema in base al quale risulta

$$B=\left[\frac{d}{ds}\left(G(s)(s+3)^2\right)\right]_{s=-3}$$

Seguendo, per esempio, la seconda strada, abbiamo che

$$\underbrace{\frac{s^2+s+1}{(s+3)^2(s+1)(s+5)}}_{s=0}=\underbrace{\frac{A}{(s+3)^2}+\frac{B}{(s+3)}+\frac{C}{(s+1)}+\frac{D}{(s+5)}}_{s=0}\longrightarrow\frac{1}{45}=\frac{A}{9}+\frac{B}{3}+C+\frac{D}{5}$$

Da qui otteniamo dunque che

$$B=\frac{3}{45}-\frac{A}{3}-3C-\frac{3D}{5}=\frac{5}{4}$$

Concludiamo che l'espansione in fratti semplici della funzione G(s) ha la seguente espressione:

$$G(s)=\frac{-7/4}{(s+3)^2}+\frac{5/4}{(s+3)}+\frac{1/16}{(s+1)}+\frac{-21/16}{(s+5)}$$

A questo punto siamo in grado di antitrasformare: applicando la proprietà di linearità, otteniamo

$$g(t)=-\frac{7}{4}L^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2}\right]+\frac{5}{4}L^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)}\right]+\frac{1}{16}L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right]-\frac{21}{16}L^{-1}\left[\frac{1}{(s+5)}\right]=$$

$$=-\frac{7}{4}te^{-3t}+\frac{5}{4}e^{-3t}+\frac{1}{16}e^{-t}-\frac{21}{16}e^{-5t}$$

Esempio: problema di Cauchy del 2° ordine

Vogliamo risolvere, mediante la trasformata di Laplace, il seguente **problema di Cauchy del 2° ordine**:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dx^2} + 4x(t) = 4t \\ x(0) = 1 \\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

Per prima cosa risolviamo l'equazione differenziale: applicando l'operatore trasformata di Laplace, otteniamo l'equazione

$$\left(s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\right) + 4X(s) = \frac{4}{s^2}$$

da cui, sostituendo i valori di x(0) e x'(0) e riarrangiando, otteniamo

$$X(s) = \frac{4+s^3}{s^2(s^2+4)}$$

Questa funzione presenta 3 poli: s=0 è un polo del 2° ordine, mentre s=2j ed s=-2j sono due poli complessi coniugati semplici. Scomponiamo allora la funzione in fratti semplici:

$$X(s) = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

Possiamo calcolare direttamente solo il coefficiente A:

$$A = X(s)s^2\Big|_{s=0} = \left[\frac{s^3+4}{s^2+4}\right]_{s=0} = 1$$

Possiamo adesso calcolare gli altri coefficienti usando il **metodo del riporto al primo membro**: sostituendo infatti l'espressione di X(s) al primo membro e portando anche il termine A/s^2 (con A=1) a primo membro, otteniamo

$$\frac{4+s^3}{s^2(s^2+4)} - \frac{1}{s^2} = \frac{B}{s} + \frac{Cs+D}{s^2+4} \longrightarrow \frac{4+s^3-(s^2+4)}{s^2(s^2+4)} = \frac{B}{s} + \frac{Cs+D}{s^2+4} \longrightarrow \frac{s-1}{s^2+4} = \frac{B}{s} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

Imponendo adesso l'uguaglianza tra il primo ed il secondo membro, otteniamo B=0, C=1 e D=-1, per cui possiamo concludere che l'espansione in fratti semplici della funzione X(s) ha la seguente espressione:

$$X(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{s-1}{s^2+4} = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+4}$$

Siamo ora in grado di antitrasformare:

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right] = t + \cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t)$$

Proprietà: poli complessi coniugati

In generale, quando dobbiamo antitrasformare secondo Laplace una funzione del tipo

$$F(s) = \frac{1}{(s+p)^{n+1}} + \frac{1}{(s-\overline{p})^{n+1}}$$

dove p e $\overline{p}$ sono due numeri complessi coniugati, otteniamo

$$f(t) = \frac{1}{n!} t^n \left(e^{pt} + e^{\overline{p}t}\right)$$

Esempio: sistema di equazioni differenziali del 1° ordine

Proviamo adesso ad utilizzare la trasformata di Laplace per risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali del 1° ordine:

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = y - 2x \\ x(0) = 8 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Applicando la trasformazione, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} sX(s) - 8 = 2X(s) - 3Y(s) \\ sY(s) - 3 = Y(s) - 2X(s) \end{cases}$$

la cui soluzione si ottiene immediatamente o usando il metodo matriciale oppure, più semplicemente per sostituzione:

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{-3Y(s) + 8}{s-2} \\ \left[(s-1)(s-2) - 6\right]Y(s) = +3s - 22 \longrightarrow Y(s) = \dfrac{3s-22}{s^2-3s-4} \longrightarrow X(s) = \dfrac{8s-17}{s^2-3s-4} \end{cases}$$

Adesso dobbiamo antitrasformare le due funzioni ottenute: considerando che le due funzioni hanno entrambe due poli semplici (hanno infatti lo stesso denominatore), abbiamo facilmente che le rispettive espansioni in fratti semplici sono

$$X(s) = \frac{8s-17}{s^2-3s-4} = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s-1} = \frac{3}{s-4} + \frac{5}{s-1}$$
$$Y(s) = \frac{3s-22}{s^2-3s-4} = \frac{C}{s-4} + \frac{D}{s+1} = \frac{-2}{s-4} + \frac{5}{s-1}$$

e quindi le rispettive antitrasformate sono

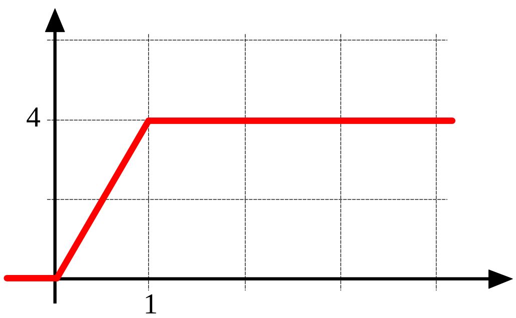
$$x(t) = 3e^{4t} + 5e^{t}$$
$$y(t) = -2e^{4t} + 5e^{t}$$

Esempio: problema di Cauchy del 2° ordine

Applichiamo nuovamente la trasformata di Laplace per risolvere un problema di Cauchy del 2° ordine:

$$\begin{cases} x''(t) + 4x(t) = u(t) \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \\ u(t) = \begin{cases} 4t & t \in [0,1] \\ 4 & t > 1 \end{cases} \end{cases}$$

E' evidente che l'unica complicazione deriva dal fatto che l'ingresso è una funzione "un po' particolare":



Possiamo allora esprimere analiticamente questo ingresso nella forma

$$u(t) = 4H(t)r(t) - 4H(t-1)r(t-1)$$

per cui il problema di Cauchy da risolvere è

$$\begin{cases} x''(t) + 4x(t) = 4H(t)r(t) - 4H(t-1)r(t-1) \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Applicando l'operatore trasformata di Laplace, otteniamo l'equazione

$$\left(s^2X(s)-sx(0)-x'(0)\right)+4X(s)=\frac{4}{s^2}+\frac{4}{s^2}e^{-s}$$

da cui, sostituendo i valori di x(0) e x'(0) e riarrangiando, otteniamo

$$X(s)=\frac{\frac{4}{s^2}+\frac{4}{s^2}e^{-s}+s}{s^2+4}=\frac{4+4e^{-s}+s^3}{s^2\left(s^2+4\right)}$$

Questa funzione presenta un polo del 2° ordine nell'origine e due poli complessi coniugati semplici. Scomponiamo allora la funzione in fratti semplici:

$$X(s)=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{Cs+D}{s^2+4}$$

Possiamo calcolare direttamente solo il coefficiente A:

$$A=X(s)s^2\Big|_{s=0}=\left[\frac{4+4e^{-s}+s^3}{\left(s^2+4\right)}\right]_{s=0}=2$$

Per il calcolo degli altri coefficienti, possiamo provare ad utilizzare il già citato **metodo del riporto al primo membro**: sostituendo l'espressione di X(s) al primo membro e portando anche il termine A/s^2 (con A=2) a primo membro, otteniamo

$$\frac{4+4e^{-s}+s^3}{\left(s^2+4\right)}-\frac{2}{s^2}=\frac{B}{s}+\frac{Cs+D}{s^2+4}\longrightarrow\frac{4+4e^{-s}+s^3-2\left(s^2+4\right)}{s^2\left(s^2+4\right)}=\frac{B}{s}+\frac{Cs+D}{s^2+4}$$

Da qui si intuisce che il metodo non porta ad alcuna conclusione, per cui dobbiamo pensare a qualcos'altro. Possiamo ad esempio procedere applicando la proprietà di sovrapposizione degli effetti nel modo seguente.

Per prima cosa, calcoliamo la **risposta libera** del sistema, ossia la risposta che il sistema produce, in presenza di un ingresso nullo, a causa delle sole condizioni iniziali; si tratta cioè di risolvere il problema di Cauchy rappresentato da

$$\begin{cases} x''(t)+4x(t)=0 \\ x(0)=1 \\ x'(0)=0 \end{cases}$$

Applicando l'operatore trasformata di Laplace, otteniamo l'equazione

$$\left(s^2X(s)-sx(0)-x'(0)\right)+4X(s)=0$$

da cui, sostituendo i valori di x(0) e x'(0) e riarrangiando, otteniamo

$$X(s)=\frac{s}{s^2+4}\xrightarrow{L^{-1}}x_0(t)=\cos(2t)$$

Adesso passiamo a determinare la **risposta forzata** del sistema, ossia la risposta che il sistema produce, per condizioni iniziali nulle, in presenza dell'ingresso u(t):

$$\begin{cases} x''(t) + 4x(t) = 4H(t)r(t) - 4H(t-1)r(t-1) \\ x(0) = 0 = x'(0) \end{cases}$$

Applicando ancora una volta l'operatore trasformata di Laplace, otteniamo l'equazione

$$s^2X(s) + 4X(s) = \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s^2}e^{-s} \longrightarrow X(s) = \frac{\frac{4}{s^2} + \frac{4}{s^2}e^{-s}}{s^2+4} = \frac{4(1+e^{-s})}{s^2(s^2+4)}$$

Anche qui abbiamo qualche problema, per cui possiamo applicare ancora una volta la proprietà di sovrapposizione degli effetti, calcolando la risposta forzata del sistema prima all'ingresso 4H(t)r(t) e poi all'ingresso 4H(t-1)r(t-1).

Cominciamo dunque dall'ingresso 4H(t)r(t):

$$\begin{cases} x''(t) + 4x(t) = 4H(t)r(t) \\ x(0) = 0 = x'(0) \end{cases} \xrightarrow{L} s^2X_1(s) + 4X_1(s) = \frac{4}{s^2} \longrightarrow X_1(s) = \frac{4/s^2}{s^2+4} = \frac{4}{s^2(s^2+4)}$$

Espandendo in fratti semplici, abbiamo che

$$X_1(s) = \frac{4}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)}$$

Possiamo calcolare direttamente solo il coefficiente A:

$$A = X_1(s)s^2\Big|_{s=0} = \left[\frac{4}{(s^2+4)}\right]_{s=0} = 1 \xrightarrow{\text{sostituendo}} X_1(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)}$$

Qui possiamo applicare il metodo del riporto al primo membro:

$$\frac{4}{s^2(s^2+4)} - \frac{1}{s^2} = \frac{B}{s} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)} \longrightarrow \frac{-s^2}{s^2(s^2+4)} = \frac{B}{s} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)} \longrightarrow \frac{-1}{(s^2+4)} = \frac{B}{s} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)} \longrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \\ D = -1 \end{cases}$$

Abbiamo dunque che

$$X_1(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{(s^2+4)} \longrightarrow x_1(t) = r(t) - \frac{1}{2}\sin(2t)$$

Passiamo adesso all'ingresso H(t-1)r(t-1): considerando che si tratta dell'ingresso H(t)r(t) traslato di 1 e moltiplicato per -1, possiamo immediatamente affermare che la risposta (forzata) del sistema a tale ingresso ha espressione

$$x_2(t) = -H(t-1)r(t-1) + \frac{1}{2}H(t-1)\sin(2(t-1))$$

Concludiamo, dunque, che la risposta complessiva del sistema è pari alla somma delle 3 risposte appena calcolate:

$$x(t)=x_0(t)+x_1(t)+x_2(t)=\cos(2t)+r(t)-\frac{1}{2}\sin(2t)-H(t-1)r(t-1)+\frac{1}{2}H(t-1)\sin(2(t-1))$$

Esempio: problema di Cauchy del 2° ordine

Consideriamo adesso quest'altro problema di Cauchy del 2° ordine:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dt}+2y(t)=1+3t\\ y(0)=1\\ \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{x=0}=0\end{cases}$$

La prima cosa è sempre quella di risolvere l'equazione differenziale: trasformando secondo Laplace, otteniamo l'equazione

$$\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+3\left(sY(s)-y(0)\right)+2Y(s)=\frac{1}{s}+\frac{3}{s^2}$$

da cui, sostituendo i valori di x(0) e x'(0) e riarrangiando, otteniamo

$$Y(s)=\frac{\frac{1}{s}+\frac{3}{s^2}+s+3}{s^2+s+2}=\frac{s^3+s^2+3s+3}{s^2\left(s^2+s+2\right)}$$

Questa funzione presenta 4 poli: i poli semplici s=-1 ed s=-2 ed il polo doppio s=0. Potremmo procedere direttamente con l'espansione in fratti semplici, ma è più conveniente applicare ancora una volta la *proprietà di sovrapposizione degli effetti*, calcolando prima l'evoluzione libera e poi quella forzata.

L'**evoluzione libera** è quella dipendente solo dalle condizioni iniziali, per cui si tratta di risolvere il problema di Cauchy rappresentato da

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dt}+2y(t)=0\\ y(0)=1\\ \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{x=0}=0\end{cases}$$

Trasformando secondo Laplace, otteniamo

$$Y_0(s)=\frac{s+3}{s^2+s+2}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{(s+1)}+\frac{B}{(s+2)}=\frac{2}{(s+1)}+\frac{-1}{(s+2)}$$

da cui, antitrasformando, si ha che

$$y_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

L'**evoluzione forzata** è invece quella dipendente solo dall'ingresso, per cui si tratta di risolvere il problema di Cauchy rappresentato da

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y(t) = 1 + 3t \\ y(0) = 0 = \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{x=0} \end{cases}$$

Trasformando secondo Laplace, otteniamo

$$Y_F(s) = \frac{\dfrac{1}{s} + \dfrac{3}{s^2}}{s^2 + s + 2} = \frac{s + 3s}{s^2\left(s^2 + s + 2\right)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{s} + \frac{D}{s^2}$$

Possiamo facilmente calcolare i residui A,B e D:

$$A = [Y(s)(s+1)]_{s=-1} = 2 \qquad B = [Y(s)(s+2)]_{s=-1} = -\frac{1}{4} \qquad D = [Y(s)s]_{s=0} = \frac{3}{2}$$

Per quanto riguarda il coefficiente C, possiamo ad esempio scrivere che

$$C = \left[\frac{d}{ds}[Y(s)s]\right]_{s=0} = -\frac{7}{4}$$

In conclusione, la trasformata dell'uscita forzata ha espressione

$$Y_F(s) = \frac{2}{(s+1)} + \frac{-1/4}{(s+2)} + \frac{-7/4}{s} + \frac{3/2}{s^2}$$

da cui, antitrasformando, si ha che

$$y_F(t) = 2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{7}{4} + \frac{3}{2}t$$

L'uscita complessiva è dunque

$$y(t) = y_0(t) + y_F(t) = 4e^{-t} - \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{7}{4} + \frac{3}{2}t$$

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry