Appunti di Controlli Automatici 1

Servomeccanismo con retroazione tachimetrica

ESERCIZIO: SINTESI DEL CONTROLLORE DI UN SERVOMECCANISMO CON RETROAZIONE TACHIMETRICA

Consideriamo un **servomotore con retroazione tachimetrica**: si tratta di un sistema del secondo ordine con funzione di trasferimento nella forma

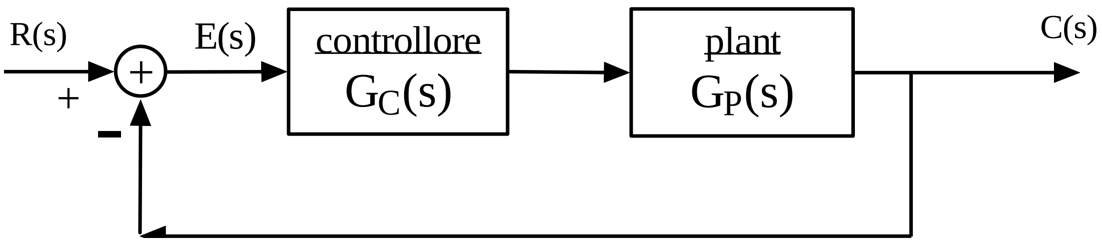
$$G_P(s) = \frac{1}{s(1+\tau s)}$$

dove supponiamo che il guadagno sia unitario.

Il nostro scopo è quello di progettare la funzione di trasferimento $G_C(s)$ di un **controllore** da porre in cascata al servomotore in modo tale, che, chiudendo il tutto in un <u>anello di retroazione unitaria</u>, siano rispettate le seguenti specifiche:

- tempo di assestamento $t_S = 2(\text{sec})$
- coefficiente di smorzamento $\delta \in [0.6, 0.8]$

Lo schema a blocchi cui dobbiamo far riferimento è dunque il seguente:

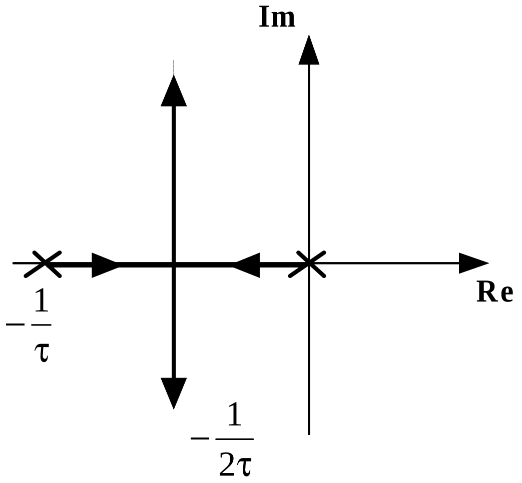


La cosa più semplice cui possiamo pensare è quella di usare il controllore al fine di modificare il guadagno del sistema controllato: possiamo cioè supporre $G_C(s) = k$, in modo da chiederci quale valore debba avere il guadagno k affinché siano rispettate le due specifiche imposte dalla traccia.

Consideriamo dunque la nuova funzione di trasferimento ad anello aperto:

$$G(s) = G_C(s)G_P(s) = \frac{k}{s(1+\tau s)}$$

Andiamo a determinare il <u>*luogo delle radici*</u> di questo sistema, ossia il modo con cui, al variare del guadagno k, l'anello di reazione (unitaria) modifica la posizione dei poli di G(s). La funzione $G(s) = \frac{k}{s(1+\tau s)}$ non ha zeri e presenta un polo semplice nell'origine ed un polo semplice in s=-1/τ, per cui il suo luogo delle radici è fatto nel modo seguente:



Abbiamo dunque tracciato come variano, al variare del guadagno k, i poli della funzione di trasferimento in anello chiuso $G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$.

Possiamo cominciare a verificare se il sistema (ad anello chiuso) verifica la prima specifica imposta dal problema, ossia un preciso valore del tempo di assestamento: a tal proposito, ricordiamo che il **tempo di assestamento** è definito, per un sistema del secondo ordine come quello in esame, come il tempo necessario affinché l'uscita del sistema, in risposta ad un gradino unitario, rimanga entro il ±5% del valore finale di regime. Per determinare l'espressione analitica di tale tempo di assestamento, dobbiamo fare alcuni passaggi analitici.

L'espressione completa della funzione di trasferimento ad anello chiuso è

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{k}{\tau s^2 + s + k}$$

I suoi poli corrispondono a tutte e sole le radici dell'*equazione caratteristica* $\tau s^2 + s + k = 0$, che possiamo anche riscrivere nella forma

$$s^2 + \frac{1}{\tau}s + \frac{k}{\tau} = 0$$

In base a questa espressione, la pulsazione naturale del sistema è $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{\tau}}$, mentre il coefficiente di smorzamento è tale che $2\delta\omega_n = \frac{1}{\tau}$, per cui ha espressione $\delta = \frac{1}{2\tau\omega_n} = \frac{1}{2\sqrt{k\tau}}$. Possiamo dunque riscrivere la funzione di trasferimento nella forma

$$G_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Consideriamo l'espressione analitica dei poli del sistema in anello chiuso: ponendo $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{\tau}}$ è $\delta = \frac{1}{2\tau\omega_n} = \frac{1}{2\sqrt{k\tau}}$, l'espressione di tali poli è notoriamente

$$p_{1/2} = \omega_n\left(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}\right) \longrightarrow \begin{cases} p_1 = \omega_n\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - 1}\right) \\ p_2 = \omega_n\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - 1}\right) \end{cases}$$

La specifica indicata dalla traccia vuole un δ compreso tra 0.6 e 0.8: quindi, risulta $\delta<1$, da cui consegue che la quantità sotto radice è negativa e quindi che i due poli devono <u>essere complessi coniugati</u> (con parte reale $-\delta\omega_n$ negativa):

$$p_1 = \omega_n\left(-\delta + j\sqrt{1-\delta^2}\right) \qquad p_2 = \omega_n\left(-\delta - j\sqrt{1-\delta^2}\right)$$

Supponiamo, adesso, di porre in ingresso al sistema il gradino unitario x(t)=H(t): la trasformata di tale ingresso è X(s)=1/s, per cui la trasformata della risposta (forzata) del sistema a questa sollecitazione assume l'espressione

$$Y(s) = G_0(s)X(s) = \frac{\omega_m^2}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}\frac{1}{s}$$

Espandendo in fratti semplici questa funzione otteniamo

$$Y(s) = \frac{\omega_m^2}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}$$

Possiamo subito calcolare il residuo A:

$$A = [Y(s)s]_{s=0} = \left[\frac{\omega_m^2 s}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}\right]_{s=0} = 1 \longrightarrow Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}$$

Per il calcolo dei coefficienti B e C possiamo invece utilizzare il *metodo del riporto a primo membro*: sostituendo l'espressione di Y(s) al primo membro e portando anche il termine 1/s a primo membro, otteniamo

$$\frac{\omega_m^2}{s^2+2\delta\omega_m s+\omega_m^2}\frac{1}{s}-\frac{1}{s}=\frac{Bs+C}{s^2+2\delta\omega_m s+\omega_m^2}\longrightarrow\frac{-s-2\delta\omega_m}{s^2+2\delta\omega_m s+\omega_m^2}=\frac{Bs+C}{s^2+2\delta\omega_m s+\omega_m^2}\longrightarrow\begin{cases}B=-1\\C=-2\delta\omega_m\end{cases}$$

Possiamo dunque concludere che l'espansione in fratti semplici dell'uscita (forzata) del sistema ha l'espressione

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+2\delta\omega_m}{s^2+2\delta\omega_m s+\omega_m^2}$$

Dobbiamo adesso antitrasformare questa funzione (al fine di passare nel dominio del tempo) ed i maggiori problemi vengono chiaramente dal secondo termine a secondo membro. Possiamo allora porre $\omega_d=\omega_m\sqrt{1-\delta^2}$, in modo da poter scrivere il denominatore di quella frazione nella forma

$$s^2+2\delta\omega_m s+\omega_m^2=\left(s+\delta\omega_m\right)^2+\omega_d^2$$

Con questa posizione, possiamo effettuare i seguenti passaggi:

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+2\delta\omega_m}{\left(s+\delta\omega_m\right)^2+\omega_d^2}=\frac{1}{s}-\frac{s+\delta\omega_m}{\left(s+\delta\omega_m\right)^2+\omega_d^2}-\frac{\delta\omega_m}{\left(s+\delta\omega_m\right)^2+\omega_d^2}=$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+\delta\omega_m}{\left(s+\delta\omega_m\right)^2+\omega_d^2}-\frac{\delta\omega_m}{\omega_d}\frac{\omega_d}{\left(s+\delta\omega_m\right)^2+\omega_d^2}=\frac{1}{s}-\frac{s+2\delta\omega_m}{\left(s+\delta\omega_m\right)^2+\omega_d^2}-\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\frac{\omega_d}{\left(s+\delta\omega_m\right)^2+\omega_d^2}$$

Possiamo adesso antitrasformare:

$$y(t)=H(t)-e^{-\delta\omega_m t}\left[\cos\left(\omega_d t\right)+\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\sin\left(\omega_d t\right)\right]$$

Possiamo anche fare qualche manipolazione algebrica su questa funzione:

$$y(t)=H(t)-\frac{e^{-\delta\omega_m t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\left[\sqrt{1-\delta^2}\cos\left(\omega_d t\right)+\delta\sin\left(\omega_d t\right)\right]=H(t)-\frac{e^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi}\left[\sin\varphi\cos\left(\omega_d t\right)+\cos\varphi\sin\left(\omega_d t\right)\right]=$$

$$=H(t)-\frac{e^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi}\sin\left(\omega_d t+\varphi\right)$$

Considerando dunque un angolo φ tale che $\begin{cases}\sqrt{1-\delta^2}=\sin\varphi\\\delta=\cos\varphi\end{cases}$, abbiamo concluso che l'andamento nel tempo dell'uscita forzata del sistema ha la seguente espressione:

$$y(t) = H(t) - \frac{e^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi}\sin(\omega_d t + \varphi)$$

Si individua dunque un termine esponenziale $e^{-\delta\omega_m t}$ caratterizzato da una **costante di tempo** pari a $\boxed{\tau = 1/\delta\omega_m}$. Questo termine esponenziale smorza o amplifica il termine sinusoidale $\sin(\omega_d t + \varphi)$ a seconda che il segno del coefficiente di smorzamento δ sia >0 o <0: quando δ>0, il termine sinusoidale si smorza e y(t) tende asintoticamente ad H(t), mentre, quando H(t)<0, l'oscillazione sinusoidale assume ampiezza sempre crescente e quindi y(t) diverge da H(t). Nel nostro caso, dovendo essere 0.6<δ<0.8, deduciamo che δ>0, ossia che il sistema risponde al gradino in ingresso con una oscillazione smorzata.

Sulla base di tutto ciò, *possiamo considerare come tempo di assestamento un intervallo di tempo pari a 4 costanti di tempo,* da cui deduciamo che l'espressione analitica di tale tempo di assestamento è

$$\boxed{t_S = \frac{4}{\delta\omega_n}}$$

A questo punto, la traccia ci dice che il tempo di assestamento deve essere di 2 sec, da cui deduciamo che deve risultare $\delta\omega_n = 2$. Dato che $\delta\omega_n = \frac{1}{2\tau}$, deduciamo che deve risultare $\frac{1}{2\tau} = 2$, ossia $\tau = \frac{1}{4}$. Facciamo allora l'ipotesi che il valore di τ non sia tale da rispettare questa specifica: ciò significa che la funzione di trasferimento $G_C(s)$ del controllore non può ridursi ad una costante k, ma deve essere più complessa.

Per capire come deve essere fatta la $G_C(s)$, possiamo allora ragionare nel modo seguente: è evidente che, al fine di rispettare la specifica sul tempo di assestamento, non ci interessa il valore del guadagno k, ma dobbiamo solo modificare il valore di τ, ossia, fondamentalmente, dobbiamo modificare la posizione dei poli in anello aperto: possiamo allora procedere cancellando il polo situato in -1/τ e aggiungendo un nuovo polo in -1/ατ, dove il coefficiente α va determinato opportunamente.

Per ottenere questo risultato, basta utilizzare un controllore con la seguente funzione di trasferimento:

$$G_C(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$$

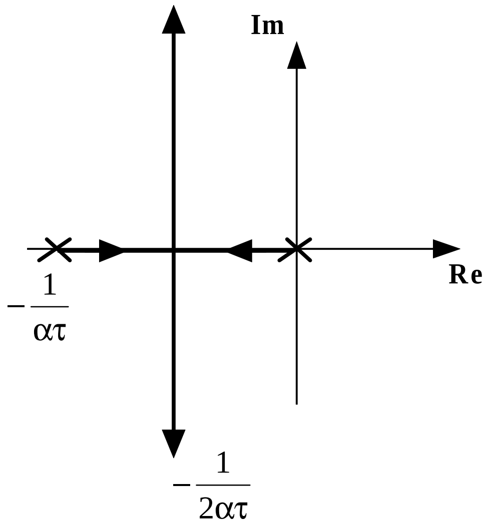
In tal modo, infatti, la nuova funzione di trasferimento in anello aperto è la seguente:

$$G(s) = G_C(s)G_P(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\frac{k}{s(1+\tau s)} = \frac{k}{s(1+\alpha\tau s)}$$

Ripetendo allora lo stesso ragionamento fatto prima, la specifica sul tempo di assestamento si traduce nella relazione $\alpha\tau = \frac{1}{4}$, da cui ricaviamo che, una volta fissato τ, ci basta prendere $\alpha = \frac{1}{4\tau}$. Ad esempio, se τ=2 sec, dovremo prendere α=1/8=0.125.

Abbiamo dunque scelto il valore di α in modo che il sistema ad anello chiuso rispetti la specifica sul tempo di assestamento[1]. Andiamo allora a verificare se il sistema (sempre ad anello chiuso) verifica la seconda specifica imposta dal problema, ossia un valore del **coefficiente di smorzamento** δ compreso tra 0.6 e 0.8. A tale scopo, possiamo ancora servirci del luogo delle radici del sistema.

In base alle considerazioni fatte poco fa, il luogo delle radici del sistema $G(s) = \frac{k}{s(1+\alpha\tau s)}$, una volta fissato α, è fatto nel modo seguente:



Si tratta semplicemente di riprendere il luogo tracciato prima e di porre $\alpha\tau$ al posto di τ.

Dato che dobbiamo determinare se esistono dei valori del guadagno k tali che il sistema soddisfi la seconda specifica, è evidente che dobbiamo capire in cosa si traduce, da un punto di vista grafico, tale specifica.

Consideriamo allora l'espressione analitica dei poli del sistema in anello chiuso: ponendo $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{\alpha\tau}}$ è $\delta = \frac{1}{2\alpha\tau\omega_n} = \frac{1}{2\sqrt{k\alpha\tau}}$, l'espressione di tali poli è notoriamente

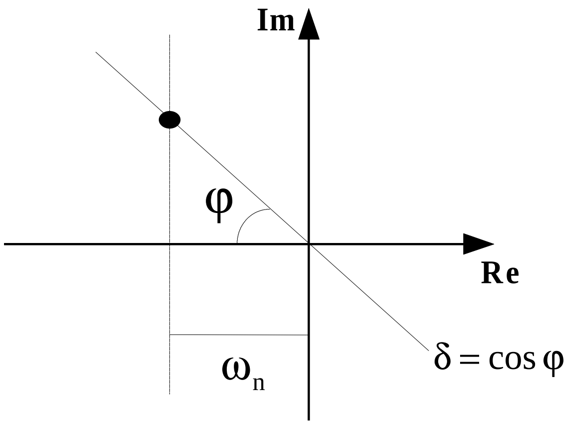
$$p_{1/2} = \omega_n\left(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}\right) \longrightarrow \begin{cases} p_1 = \omega_n\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - 1}\right) \\ p_2 = \omega_n\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - 1}\right) \end{cases}$$

La specifica indicata dalla traccia vuole un δ compreso tra 0.6 e 0.8: quindi, risulta $\delta<1$, da cui consegue che la quantità sotto radice è negativa e quindi che i due poli sono complessi coniugati (con parte reale $-\delta\omega_n$ negativa):

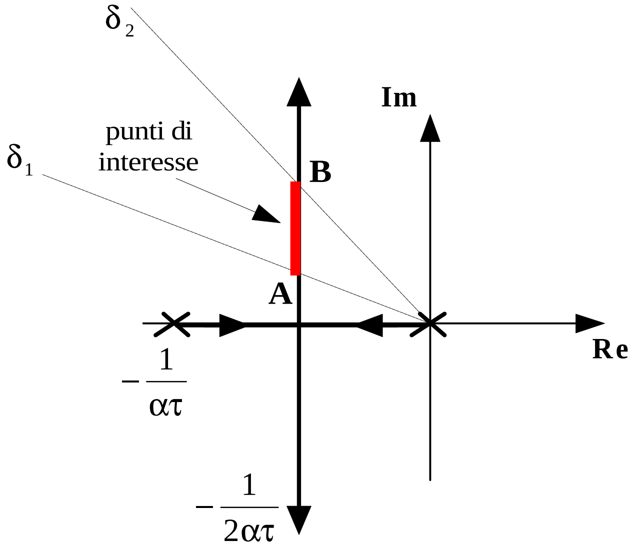
$$p_1 = \omega_n\left(-\delta + j\sqrt{1-\delta^2}\right) \qquad\qquad p_2 = \omega_n\left(-\delta - j\sqrt{1-\delta^2}\right)$$

Ci ricordiamo, allora, che, da un punto di vista grafico, il significato di δ è rappresentato nella figura seguente:

[1] Questo modo di procedere (cioè di modificare la posizione di un polo del sistema in anello aperto mediante uno zero ed un polo nella funzione di trasferimento del controllore) prende il nome di **metodo di cancellazione polo-zero**. Non sempre questo metodo può essere applicato



Quindi, ciascun valore di δ individua, insieme a ciascun valore di ω_n, un preciso punto nel piano complesso. Siamo allora in grado di individuare tutti i punti del luogo di G(s) che soddisfano tale specifica. In corrispondenza di δ=0.6 si ottiene un angolo $\varphi_2 = 53°$, mentre in corrispondenza di δ=0.8 si ottiene un angolo $\varphi_1 = 37°$:



Abbiamo dunque individuato il segmento AB del luogo contenente tutti e soli i poli che soddisfano la seconda specifica: ci basta quindi individuare, mediante una semplice operazione di **taratura** del luogo, i valori di k corrispondente a tali poli. In particolare, ci basta trovare i valori di k corrispondenti agli estremi del suddetto di segmento, in modo da conoscere direttamente l'intervallo entro cui k può variare:

- in corrispondenza di $\varphi_1 = 37°$ otteniamo l'estremo inferiore del segmento: l'ascissa è evidentemente $-\frac{1}{2\alpha\tau}$, mentre l'ordinata è $-\frac{1}{2\alpha\tau}\text{tg}\varphi_1$;
- in corrispondenza di $\varphi_2 = 53°$ otteniamo invece l'estremo superiore del segmento, la cui ascissa è sempre $-\frac{1}{2\alpha\tau}$ e la cui ordinata è $-\frac{1}{2\alpha\tau}\text{tg}\varphi_2$;

Abbiamo dunque i due punti $A\left(-\frac{1}{2\alpha\tau}, -\frac{1}{2\alpha\tau}\text{tg}\varphi_1\right)$ e $B\left(-\frac{1}{2\alpha\tau}, -\frac{1}{2\alpha\tau}\text{tg}\varphi_2\right)$: dobbiamo trovare i valori di k corrispondenti a questi due punti. A tal fine, ci sono vari modi di procedere: il più semplice è quello di imporre che le coordinate di A e di B soddisfino l'equazione caratteristica $s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ del sistema e di determinare così i corrispondenti valori di k_A e k_B.

Osservazione: metodo di cancellazione polo-zero

Nell'esempio appena studiato, abbiamo utilizzato la funzione di trasferimento $G_C(s)$ del controllore al fine di modificare, nel modo che più ci conveniva, la posizione di un polo della funzione di trasferimento $G_P(s)$ del sistema controllato:

$$G(s) = G_C(s)G_P(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\frac{k}{s(1+\tau s)} = \frac{k}{s(1+\alpha\tau s)}$$

Volendo spostare il polo $p=-1/\tau$ nella posizione $p'=-1/\alpha\tau$, abbiamo preso una $G_C(s)$ avente uno zero proprio in $-1/\tau$ ed un polo in $-1/\alpha\tau$. Questo modo di procedere prende il nome di **metodo di cancellazione polo-zero**. E' bene precisare che non sempre, nella pratica, è opportuno utilizzare una tecnica di questo tipo: il motivo è che, nella pratica, la posizione del polo da cancellare non si conosce con esattezza e inoltre, ammesso anche di conoscere con precisione tale polo, non è detto che si possa progettare un controllore con uno zero esattamente nella stessa posizione. In entrambi i casi, quindi, *non è detto che la cancellazione del polo tramite lo zero sia perfetta*: se la cancellazione, come sempre avviene, non è perfetta, si introducono dei modi nella risposta temporale del sistema, i quali possono compromettere il comportamento dinamico del sistema stesso.

Per capirci meglio, facciamo un esempio concreto: supponiamo di avere un sistema controllato (**plant**) avente funzione di trasferimento

$$G_P(s) = \frac{k(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_3)}$$

Supponiamo di voler cancellare il polo p_1 e di voler introdurre un nuovo polo p_2: per farlo, possiamo seguire lo stesso procedimento adottato nell'esempio di prima, considerando un controllore (da porre in cascata al plant) avente funzione di trasferimento $G_C(s) = \frac{s+p_1}{s+p_2}$.

Il problema, come detto prima, è che non sempre si può, nella pratica, ottenere una cancellazione perfetta: supponiamo, per esempio, di riuscire a realizzare un controllore con funzione di trasferimento $G_C(s) = \frac{s+z_1}{s+p_2}$, dove z_1 è comunque molto vicino a p_1. Sotto queste ipotesi, la funzione di trasferimento ad anello aperto diventa

$$G(s) = G_C(s)G_P(s) = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$$

Determiniamo l'espansione in fratti semplici di questa funzione:

$$G(s) = \frac{A}{(s+p_1)} + \frac{B}{(s+p_2)} + \frac{C}{(s+p_3)}$$

Il calcolo dei residui è immediato:

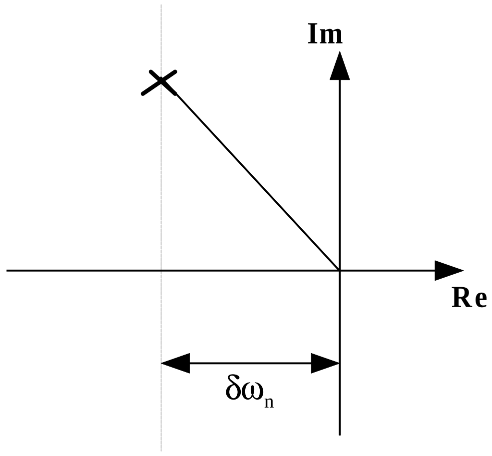
$$A = \mathrm{Res}(p_1) = \left[G(s)(s+p_1)\right]_{s=-p_1} = \frac{k(z_1-p_1)(z_2-p_1)}{(p_2-p_1)(p_3-p_1)}$$
$$B = \mathrm{Res}(p_2) = \left[G(s)(s+p_2)\right]_{s=-p_2} = \frac{k(z_1-p_2)(z_2-p_2)}{(p_1-p_2)(p_3-p_2)}$$
$$C = \mathrm{Res}(p_3) = \left[G(s)(s+p_3)\right]_{s=-p_3} = \frac{k(z_1-p_3)(z_2-p_3)}{(p_1-p_3)(p_2-p_3)}$$

Ci interessa, in particolare, il termine $\frac{A}{(s+p_1)}$: infatti, questo termine darà luogo, nella risposta forzata del sistema, ad un termine esponenziale $Ae^{-p_1 t}$ di ampiezza A e con coefficiente di smorzamento pari alla parte reale di p_1. Allora, indagando sul comportamento asintotico ($t\to\infty$) di questo termine, è evidente che esso va a 0 se il polo è stabile (ossia ha parte reale negativa), mentre va all'infinito se il polo è instabile (ossia ha parte reale positiva).

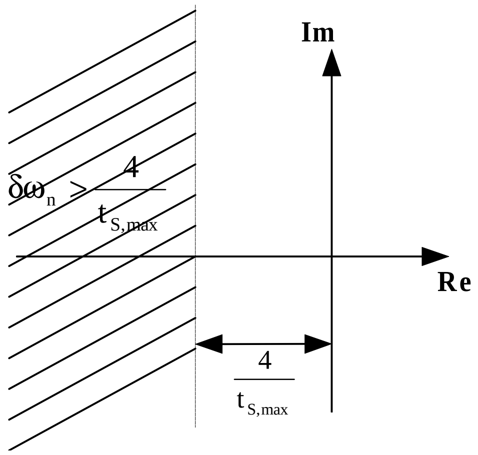
Deduciamo, quindi, che *il metodo di cancellazione polo-zero può essere usato solo per poli stabili, in quanto solo per tali poli l'effetto (nel tempo) di una eventuale cancellazione non perfetta tende a scomparire per t ® ¥;* al contrario, non conviene cancellare dei poli instabili, in quanto, se la cancellazione non è perfetta, il sistema produce una uscita divergente.

Osservazione sul tempo di assestamento

Sempre con riferimento all'esempio svolto poco fa, abbiamo osservato che la specifica sul tempo di assestamento equivale, in pratica, ad una specifica sulla posizione dei poli del sistema. E' conveniente vedere la cosa da un punto di vista grafico e possiamo farlo con riferimento alla figura seguente:



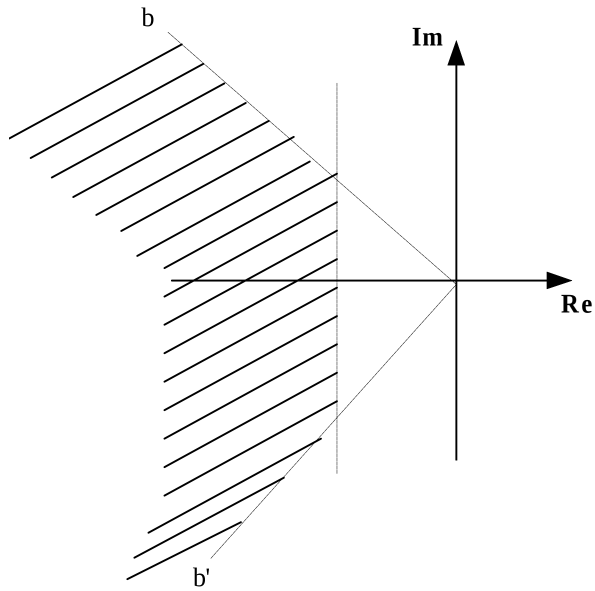
Dato uno qualsiasi dei due poli (complessi coniugati del sistema), abbiamo visto che la sua distanza dall'asse immaginario (cioè il modulo della sua parte reale) vale $\delta\omega_n$; abbiamo inoltre visto che il tempo di assestamento ha espressione $t_S = 4/\delta\omega_n$ e quindi che è legato alla distanza dei due poli complessi dall'asse immaginario. Allora, richiedere, per esempio, che t_S non superi un certo valore limite $t_{S,max}$ significa richiedere che risulti $\frac{4}{\delta\omega_n} < t_{S,max}$, ossia quindi che $\boxed{\delta\omega_n > \frac{4}{t_{S,max}}}$: graficamente, ciò significa che, tracciando la retta verticale passante per $4/t_{S,max}$, i poli del sistema devono trovarsi a sinistra di tale retta:



La specifica sul valore massimo del tempo di assestamento contribuisce cioè a limitare la regione del piano di Gauss nella quale possiamo collocare i poli del sistema. Un'altra possibile specifica che potrebbe concorrere a limitare tale regione è un valore limite della **massima sovraelongazione percentuale**, che è definita analiticamente dalla relazione

$$S(\%) = e^{-\delta \frac{\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \cdot 100$$

ed è quindi legata anch'essa al valore di δ. In base a quella relazione, imporre un valore limite di S(%) equivale a richiedere che i due poli del sistema devono essere compresi nel settore delimitato, nella figura seguente, dalle rette b e b':



Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1