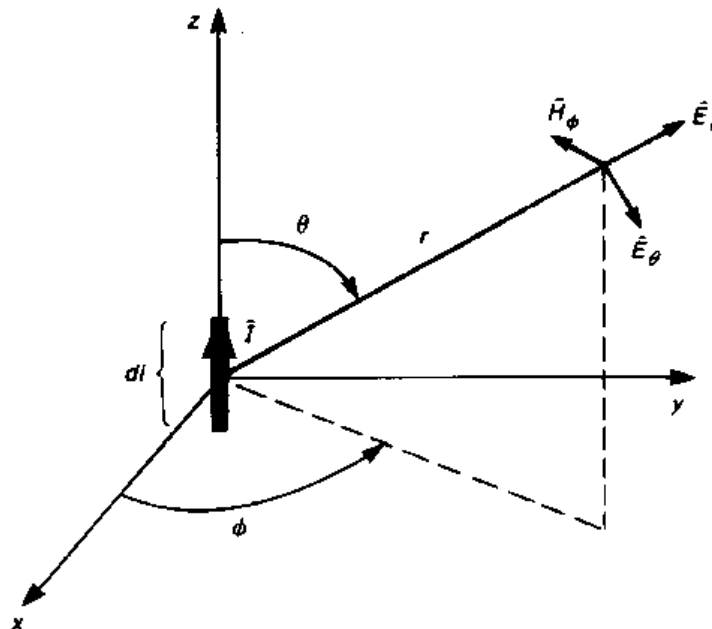


Appunti di Compatibilità Elettromagnetica

DIPOLO ELETTRICO (DIPOLO HERTZIANO)

Si definisce **dipolo elettrico** un elemento infinitesimo di lunghezza dl a cui è associato un fasore di corrente I costante (in modulo e fase) per tutti i punti dell'elemento stesso. La figura seguente mostra la schematizzazione della situazione:



Abbiamo qui usato un sistema di riferimento cartesiano, al centro del quale è posto l'elemento di corrente Idl (misurato in $A \cdot m$): si tratta cioè di una *corrente filamentare* I che fluisce lungo una certa lunghezza elementare dl . Con questo elemento di corrente (evidentemente ideale) si usa modellare il caso reale in cui una corrente I fluisce in una lunghezza dl molto corta (ovviamente rispetto a λ) di un filo sottile, nell'ipotesi che la lunghezza dl considerata sia così corta da potervi considerare costante la corrente I .

Ogni circuito fisico o "antenna" che porta corrente può considerarsi come costituito da un grande numero di questi elementi collegati in cascata: se il campo elettromagnetico prodotto dall'elemento Idl è noto, allora il campo elettromagnetico di ogni antenna reale, avente una assegnata distribuzione di corrente, può essere facilmente calcolato per integrazione.

Nel caso in cui la corrente che fluisce nell'elementino vari sinusoidalmente (per cui si parla a rigore di **elemento di corrente alternata** ed è la situazione da noi considerata), scriviamo che la sorgente è $Idle^{j\omega t}$.

Di solito, per lo studio delle antenne è comodo introdurre un sistema di coordinate sferiche (r, θ, ϕ) , come è mostrato nella figura precedente. Risolvendo allora le *equazioni di Maxwell* in tale riferimento, si trova che il campo elettromagnetico in un punto generico $\mathbf{P}(x, y, z)$ (detto **punto di**

osservazione o anche *punto potenziato*), individuato dalla generica terna (r, θ, φ) di coordinate sferiche, è

$$\begin{cases} H_r = 0 \\ H_\theta = 0 \\ H_\varphi = \frac{Id\ell \sin\theta}{4\pi} \left(j\frac{\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-j\beta r} \end{cases} \quad \begin{cases} E_r = \frac{Id\ell}{2\pi\omega\epsilon} \cos\theta \left(\frac{\beta}{r^2} - \frac{j}{r^3} \right) e^{-j\beta r} \\ E_\theta = \frac{Id\ell \sin\theta}{4\omega\epsilon\pi} \left(j\frac{\beta^2}{r} + \frac{\beta}{r^2} - \frac{j}{r^3} \right) e^{-j\beta r} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

(ricordiamo che, essendo I un fasore, anche le componenti qui riportate sono dei fasori).

Notiamo dunque che *il campo magnetico ha solo componente nella direzione \mathbf{j} (e tale componente dipende solo da \mathbf{q} e da r , mentre non dipende da \mathbf{j})*, mentre invece *il campo elettrico presenta una componente nella direzione radiale r ed una componente nella direzione \mathbf{q} .*

Ricordiamo, inoltre che, in generale, la **costante di propagazione** nel mezzo considerato è $\boxed{\gamma = \alpha + j\beta}$, ossia comprende sia una parte reale (attenuazione) sia una parte immaginaria (sfasamento). La parte reale α scompare solamente se si ritengono nulle le perdite nel mezzo considerato: ci mettiamo proprio in questa l'ipotesi. Inoltre, per semplicità supponiamo che il mezzo di propagazione sia il vuoto, per cui poniamo $\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ e quindi $\gamma = j\beta = j\beta_0 = j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$:

$$\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{Id\ell \sin\theta}{4\pi} \left(j\frac{\beta_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-j\beta_0 r} \\ E_r &= \frac{Id\ell}{2\pi\omega\epsilon_0} \cos\theta \left(\frac{\beta_0}{r^2} - \frac{j}{r^3} \right) e^{-j\beta_0 r} \\ E_\theta &= \frac{Id\ell \sin\theta}{4\omega\epsilon_0\pi} \left(j\frac{\beta_0^2}{r} + \frac{\beta_0}{r^2} - \frac{j}{r^3} \right) e^{-j\beta_0 r} \end{aligned}$$

E' possibile inoltre esprimere queste tre componenti in funzione dell'**impedenza caratteristica dello spazio vuoto**, notoriamente definita come

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi = 377\Omega$$

Abbiamo allora che

$$\boxed{\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{Id\ell \sin\theta}{4\pi} \beta_0^2 \left(j\frac{1}{\beta_0 r} + \frac{1}{(\beta_0 r)^2} \right) e^{-j\beta_0 r} \\ E_r &= \frac{Id\ell \cos\theta}{2\pi} \eta_0 \beta_0^2 \left(\frac{1}{(\beta_0 r)^2} - \frac{j}{(\beta_0 r)^3} \right) e^{-j\beta_0 r} \\ E_\theta &= \frac{Id\ell \sin\theta}{4\pi} \eta_0 \beta_0^2 \left(j\frac{1}{\beta_0 r} + \frac{1}{(\beta_0 r)^2} - \frac{j}{(\beta_0 r)^3} \right) e^{-j\beta_0 r} \end{aligned}}$$

dove abbiamo tenuto conto che $\omega\epsilon_0\eta_0 = \beta_0$.

Queste espressioni evidenziano, tra le altre cose, che i campi possono essere considerati funzioni della **distanza elettrica** dall'antenna: infatti, possiamo scrivere che

$$\beta_0 = \omega\epsilon_0\eta_0 = 2\pi f \cdot \epsilon_0 \cdot 120\pi \cong 2\pi \cdot \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \cdot 120\pi = 2\pi \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{\lambda} \cdot \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \cdot 120\pi = \frac{2\pi}{\lambda}$$

da cui scaturisce che

$$\beta_0 r = \frac{2\pi r}{\lambda}$$

dove naturalmente λ è la lunghezza d'onda del segnale di corrente che attraversa l'antenna in questione.

Le espressioni complete dei campi prima riportate risultano evidentemente abbastanza complicate. L'espressione della componente θ del campo elettrico è emblematica della situazione:

$$E_\theta = \frac{Id\ell \sin\theta}{4\pi} \eta_0 \beta_0^2 \left(j \frac{1}{\beta_0 r} + \frac{1}{(\beta_0 r)^2} - \frac{j}{(\beta_0 r)^3} \right) e^{-j\beta_0 r}$$

Si osserva infatti la presenza di 3 termini, proporzionali rispettivamente ad $1/r$, $1/r^2$ e $1/r^3$. I termini proporzionali a $1/r^2$ e $1/r^3$ predominano sicuramente a piccole distanze dall'antenna, dove perciò parliamo di **campo vicino** (*nera field*):

$$E_{\theta, \text{NF}} \cong \frac{Id\ell \sin\theta}{4\pi} \eta_0 \beta_0^2 \left(\frac{1}{(\beta_0 r)^2} - \frac{j}{(\beta_0 r)^3} \right) e^{-j\beta_0 r}$$

Invece, man mano che ci si allontana dall'antenna, è il termine $1/r$ a prevalere sempre di più, dando origine al cosiddetto **campo lontano** (*far field*):

$$E_{\theta, \text{FF}} \cong \frac{Id\ell \sin\theta}{4\pi} \eta_0 \beta_0^2 \left(j \frac{1}{\beta_0 r} \right) e^{-j\beta_0 r}$$

*Il punto in cui i termini $1/r^2$ e $1/r^3$ diventano trascurabili rispetto al termine $1/r$ è dunque quello che delimita il **confine tra campo vicino e campo lontano**. In particolare, per ricavare analiticamente la distanza alla quale si trova tale confine, si considera generalmente quella distanza alla quale risulta*

$$\left| j \frac{1}{\beta_0 r} \right| = \left| \frac{1}{(\beta_0 r)^2} \right|$$

Si prendono cioè i due termini in $1/r$ ed $1/r^2$ li si eguaglia in modulo: risolvendo quell'equazione (in cui β_0 è ovviamente reale), si ottiene

$$r = \frac{1}{\beta_0} = \frac{\lambda}{2\pi} \cong \frac{\lambda}{6}$$

E' bene comunque sottolineare che il limite tra i campi vicini ed i campi lontani, per antenne diverse da quella che stiamo analizzando adesso, non è semplicemente $\lambda/6$, ma va calcolato di caso in caso. Una scelta realistica generale per individuare il suddetto limite¹ è quello di scegliere il massimo tra le quantità 3λ e $2D^2/\lambda$, dove D rappresenta la massima dimensione dell'antenna in questione: in genere, si utilizza la prima scelta ogni volta che ci si trova di fronte ad antenne di **tipo filare**, mentre invece si adotta la seconda per **antenne a superficie**, come le **antenne paraboliche** o le cosiddette **antenne a tromba**.

Nel caso in cui le antenne siano usate per le telecomunicazioni, non si pone il problema di dover stabilire se l'antenna ricevente sia nel campo vicino o in quello lontano dell'antenna trasmittente, in quanto queste antenne vengono sempre usate per collegamenti su grandi distanze. Del tutto diversa, invece, è la situazione nei problemi di compatibilità elettromagnetica, dove il ricevitore (che può essere proprio una antenna usata per verifiche di soddisfacimento delle norme) è generalmente posto nel campo vicino dell'antenna trasmittente (che può essere il dispositivo di cui si sta verificando il soddisfacimento delle norme). Tanto per fare un esempio concreto, ricordiamo che la normativa americana **FCC** prevede che, per la misura delle *emissioni radiate* di un apparecchio di *classe B*, l'antenna di misura sia posta a 3 metri dall'apparecchio stesso e che le frequenze di misura siano da 30 MHz a 40 GHz; in corrispondenza di tali frequenze di lavoro, il limite tra campo vicino e campo lontano per l'antenna trasmittente si trova decisamente oltre i 3 metri, per cui le misure vengono fatte in campo vicino e bisogna quindi tenerne conto.

Torniamo adesso alle espressioni dei campi. In particolare, sfruttando l'espressione del campo magnetico (che presenta solo la componente lungo ϕ), introduciamo altre due denominazioni, riferite sempre a campo vicino e campo lontano:

- quando siamo a piccola distanza dal punto di irradiazione, ossia quando r è sufficientemente piccolo, il termine predominante è quello dipendente da $1/r^2$ e ad esso si dà il nome di **campo di induzione**:

$$H_{\phi, \text{induzione}} = H_{\phi, \text{NF}} \cong \frac{Id\ell \sin\theta}{4\pi} \beta_0^2 \left(\frac{1}{(\beta_0 r)^2} \right) e^{-j\beta_0 r} = \frac{Id\ell \sin\theta}{4\pi r^2} e^{-j\beta_0 r}$$

- al contrario, per distanze sufficientemente elevate dal punto di irradiazione, il termine predominante è quello dipendente da $1/r$ e ad esso si dà il nome di **campo di radiazione**:

$$H_{\phi, \text{FF}} = H_{\phi, \text{radiazione}} \cong \frac{Id\ell \sin\theta}{4\pi} \beta_0^2 \left(j \frac{1}{\beta_0 r} \right) e^{-j\beta_0 r} = j \frac{Id\ell \sin\theta}{4\pi r} \beta_0 e^{-j\beta_0 r}$$

Analoghe considerazioni valgono ovviamente per il campo elettrico:

$$\text{campo elettrico vicino} \begin{cases} E_{r, \text{NF}} = \frac{Id\ell \cos\theta}{2\pi} \eta_0 \beta_0^2 \left(\frac{1}{(\beta_0 r)^2} - \frac{j}{(\beta_0 r)^3} \right) e^{-j\beta_0 r} \\ E_{\theta, \text{NF}} \cong \frac{Id\ell \sin\theta}{4\pi} \beta_0^2 \left(\frac{1}{(\beta_0 r)^2} - \frac{j}{(\beta_0 r)^3} \right) e^{-j\beta_0 r} \end{cases}$$

¹ Naturalmente, questo limite non va pensato come una precisa linea di demarcazione tra due regioni di spazio, ma indica solo una generica regione in cui si realizza sostanzialmente il passaggio da una struttura complicata di campo ad una più semplice.

$$\text{campo elettrico lontano} \begin{cases} E_{r,FF} \cong 0 \\ E_{\theta,FF} \cong \frac{Id\ell \sin\theta}{4\pi} \beta_0^2 \left(j \frac{1}{\beta_0 r} \right) e^{-j\beta_0 r} = j \frac{Id\ell \sin\theta}{4\pi r} \beta_0 e^{-j\beta_0 r} \end{cases}$$

Per quanto riguarda la componente radiale E_r , si osserva ancora la presenza di un termine di induzione E_{ind} proporzionale a $1/r^2$, mentre non è presente alcun termine di radiazione (proporzionale a $1/r$), il che ci dice che il campo elettrico lontano non possiede la componente radiale (oltre a non possedere la componente lungo ϕ). Si osserva invece la presenza di un termine proporzionale a $1/r^3$: questo termine è molto simile al campo prodotto da un bipolo elettrostatico ed è per questo che prende il nome di **campo elettrostatico**. Per quanto riguarda, invece, la componente E_θ , sono presente sia il termine di induzione, sia quello di irradiazione sia anche quello statico.

Un'altra osservazione interessante è la seguente: considerato il campo magnetico (o anche elettrico) di induzione, la sua espressione nel dominio del tempo è evidentemente

$$h_{\phi, \text{induzione}}(r, \theta, t) = \text{Re} \left[H_{\phi, \text{induzione}} e^{j\omega t} \right] = \frac{Id\ell \sin\theta}{4\pi r^2} \cos(\omega t - \beta_0 r)$$

Con riferimento all'argomento del Coseno, possiamo anche scrivere che

$$\omega t - \beta_0 r = \omega \left(t - \frac{\beta_0}{\omega} r \right) = \omega \left(t - \frac{r}{v_p} \right) = \omega t'$$

(dove v_p è la velocità di fase dell'onda, pari in questo caso alla velocità della luce nel vuoto), per cui l'espressione del campo diventa

$$h_{\phi, \text{induzione}}(r, \theta, t) = \frac{Id\ell \sin\theta}{4\pi r^2} \cos(\omega t')$$

Questa espressione è la stessa che si otterrebbe, con i metodi tradizionali di Fisica II, applicando direttamente la legge di Biot-Savart alla corrente che scorre nell'elementino $d\ell$, a patto, però, che il tempo t venga sostituito dal **tempo ritardato t'** appena calcolato: il fatto che il campo effettivo è una funzione di t' anziché di t è dovuto, chiaramente, al tempo finito di propagazione del campo dal *punto sorgente* (in cui si trova l'antenna) al *punto di osservazione*. Ovviamente, nei punti particolarmente vicini all'elemento di corrente, cioè i punti in cui predomina il campo di induzione, la quantità r/v_p è molto piccola ed è perciò possibile approssimare $t' \cong t$.

Per quanto riguarda, invece, il campo di radiazione, è importante anticipare una cosa che dimostreremo rigorosamente più avanti: è *proprio il termine di radiazione che contribuisce al flusso di energia dalla sorgente all'utilizzatore (energia attiva), mentre invece il termine di induzione dà luogo solo ad una energia (reattiva) che viene immagazzinata e rilasciata dal campo ogni quarto di periodo.*

Campo lontano

Dopo tutte le considerazioni generali appena fatte, concentriamoci su ciò che abbiamo definito **campo lontano**: abbiamo infatti visto che, in punti sufficientemente lontani dal dipolo (cioè dalla sorgente), il campo elettromagnetico presenta solo due componenti (dette perciò **componenti di campo lontano**), che sono

$$\vec{H}_{FF} = H_{\varphi,FF} \cdot \vec{a}_{\varphi} \cong j \frac{Id \sin \theta}{4\pi r} \beta_0 e^{-j\beta_0 r} \vec{a}_{\varphi}$$

$$\vec{E}_{FF} = E_{\theta,FF} \cdot \vec{a}_{\theta} \cong j \frac{Id \sin \theta}{4\pi r} \eta_0 \beta_0 e^{-j\beta_0 r} \vec{a}_{\theta}$$

Il campo elettromagnetico individuato da queste due componenti soddisfa molte delle proprietà tipiche delle **onde piane uniformi**. Infatti, "localmente" i campi assomigliano a onde piane uniformi, anche se sono più correttamente classificati come **onde sferiche**. Le proprietà sono le seguenti:

- i campi sono proporzionali ai termini $1/r$, I (fasore), dl e $\sin\theta$;
- il rapporto tra il modulo del campo elettrico ed il modulo del campo magnetico è pari all'impedenza caratteristica del vuoto:

$$\frac{|\vec{E}_{FF}|}{|\vec{H}_{FF}|} = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

- i due campi sono localmente ortogonali;
- il prodotto vettoriale tra i due campi dà origine ad un vettore diretto come il versore della direzione radiale:

$$\vec{H}_{FF} \times \vec{E}_{FF} \propto \vec{a}_r$$

- al termine di fase $e^{-j\beta_0 r}$ corrisponde un ritardo, nel dominio del tempo, pari a $\sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$

Queste proprietà consentono di applicare la cosiddetta **stima dei campi per traslazione**, utilizzando la **regola dell'inverso della distanza**: tale regola dice sostanzialmente che i campi elettrici e magnetici calcolati alle distanze d_1 e d_2 sono legati dalla relazione

$$|\vec{E}_{FF}(d_2)| = \frac{d_1}{d_2} |\vec{E}_{FF}(d_1)|$$

$$|\vec{H}_{FF}(d_2)| = \frac{d_1}{d_2} |\vec{H}_{FF}(d_1)|$$

In altre parole, l'intensità dei campi decresce con l'inverso della distanza dalla sorgente.

E' però importante sottolineare che *questa regola dell'inverso della distanza vale solo se d_1 e d_2 sono nella regione di campo lontano rispetto alla sorgente*; in caso contrario, ossia se almeno uno dei due punti di osservazione si trova nella regione del campo vicino, allora la regola dell'inverso della distanza non può più essere

applicata, in quanto questo significherebbe ignorare i contributi di campo proporzionali a $1/r_2$ e $1/r_3$, cioè appunto i termini di campo vicino.

Flusso di potenza attiva

Vogliamo adesso analizzare la situazione da un punto di vista energetico. In particolare, vogliamo dare una giustificazione analitica del fatto (già accennato in precedenza) che *il termine di radiazione del campo elettromagnetico è quello che contribuisce al flusso di energia dalla sorgente all'utilizzatore (energia attiva), mentre invece il termine di induzione dà luogo solo ad una energia (reattiva) che viene immagazzinata e rilasciata dal campo ogni quarto di periodo.*

Per dimostrare questo, cominciamo a calcolare il flusso di potenza, per unità di superficie, in un punto P individuato dalle coordinate sferiche (r, θ, ϕ) . Per fare questo calcolo, non dobbiamo far altro che calcolare il **vettore di Poynting** nel punto considerato: con riferimento alla definizione di tale vettore nel dominio della frequenza, abbiamo che

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^* = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \bar{a}_r & \bar{a}_\theta & \bar{a}_\phi \\ E_r & E_\theta & E_\phi \\ H_r^* & H_\theta^* & H_\phi^* \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \bar{a}_r & \bar{a}_\theta & \bar{a}_\phi \\ E_r & E_\theta & 0 \\ 0 & 0 & H_\phi^* \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E_\theta H_\phi^* \\ -E_r H_\phi^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

La prima cosa che si osserva è che non c'è flusso di potenza lungo la direzione ϕ , ma solo lungo le direzioni r e θ . Per capire che tipo di flusso di potenza c'è lungo tali direzioni, dobbiamo sostituire le espressioni delle componenti del campo elettromagnetico.

Cominciamo dalla direzione azimutale θ : sostituendo e facendo i conti, si trova che

$$P_\theta = -\frac{1}{2} E_r H_\phi^* = \left(\frac{Id\ell}{4\pi} \right)^2 \frac{\sin\theta \cos\theta}{\omega \epsilon r^5} j(\beta^2 r^2 + 1)$$

L'espressione di P_θ risulta dunque puramente immaginaria (cioè una potenza di tipo reattivo): ciò significa che questa componente rappresenta un "*palleggiamento*" di potenza nella direzione θ , senza un flusso netto di potenza: la potenza viene alternativamente assorbita a ceduta dal mezzo in cui l'onda si propaga.

Vediamo invece cosa accade per quanto riguarda la direzione radiale: sostituendo e facendo anche qui gli opportuni passaggi, si trova che

$$P_r = \frac{1}{2} E_\theta H_\phi^* = \frac{1}{2} \left(\frac{Id\ell \sin\theta}{4\pi} \right)^2 \eta_0 \beta_0^4 \left(\frac{1}{(\beta_0 r)^2} - \frac{j}{(\beta_0 r)^5} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{Id\ell \sin\theta}{4\pi} \right)^2 \eta_0 \beta_0^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{j}{\beta_0^3 r^5} \right)$$

Questa volta abbiamo ottenuto una parte reale ed una immaginaria: la parte immaginaria corrisponde ancora una volta ad un palleggiamento di energia, mentre invece la parte reale indica che, lungo la direzione radiale, c'è un flusso netto di potenza attiva:

$$P_{r,attiva} = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} E_\theta H_\phi^* \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{|I|d\ell \sin\theta}{4\pi} \right)^2 \eta_0 \frac{\beta_0^2}{r^2} = \frac{1}{8} \left(\frac{|I|d\ell \sin\theta}{\lambda} \right)^2 \frac{\eta_0}{r^2} = 15\pi \left(\frac{|I|d\ell \sin\theta}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^2}$$

dove $|I|$ è il modulo del fasore della corrente nell'antenna.

Il versore di questa potenza è evidentemente quello della direzione radiale, per cui possiamo riassumere quanto fatto in questi passaggi scrivendo che

$$\vec{P}_{attiva} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \right\} = 15\pi \left(\frac{|I|d\ell \sin\theta}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^2} \vec{a}_r \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

Questa espressione (che coinvolge una **densità di potenza**, misurata perciò in **W/m²**) mette dunque in evidenza che la potenza si diffonde nello spazio allontanandosi dalla sorgente, il che spiega il fenomeno di **irradiazione**.

A proposito, invece, di quanto detto all'inizio di questo paragrafo, ci basta osservare che a questa stessa espressione della potenza potevamo arrivare considerando, anziché le espressioni generali del campo, solo quelle relative al campo lontano e cioè usando solo le componenti E_θ ed H_ϕ e considerando, per queste, solo i termini proporzionali ad $1/r$. Questo dimostra perciò che solo i contributi di radiazione danno origine ad un trasferimento netto di potenza dalla sorgente all'utilizzatore.

E' però necessario sottolineare una cosa a tal proposito: abbiamo detto che i termini di radiazione, essendo dipendenti da $1/r$, sono sicuramente quelli prevalenti a grande distanza, visto che i termini statici e quelli di induzione dipendono, rispettivamente, da $1/r^3$ e $1/r^2$; tuttavia, non bisogna dimenticare che *anche in prossimità dell'elemento di corrente, dove in effetti predominano il campo statico e quello di induzione, sono comunque i termini proporzionali a $1/r$, per quanto piccoli, a contribuire al flusso netto di potenza dalla sorgente verso l'utilizzatore*.

Resistenza di radiazione

A questo punto, per concludere il discorso sul dipolo elettrico oscillante, mentre prima abbiamo calcolato la densità di potenza attiva, possiamo adesso calcolare la **potenza complessiva irradiata** dall'elemento di corrente: ci basta infatti integrare la densità di potenza su una superficie sferica, di raggio r , centrata nell'elemento stesso.

Ricordando allora la formula per l'integrazione, su una superficie sferica in coordinate sferiche, abbiamo che

$$\begin{aligned} P_{rad} &= \oint_{SUP} \vec{P}_{attiva} \cdot d\vec{S} = \oint_{SUP} P_{attiva} dS = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi P_{attiva} r^2 \sin\theta d\theta = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi 15\pi \left(\frac{|I|d\ell \sin\theta}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta = \\ &= (2\pi) \cdot \int_0^\pi 15\pi \left(\frac{|I|d\ell \sin\theta}{\lambda} \right)^2 \sin\theta d\theta = (2\pi) \cdot 15\pi \left(\frac{|I|d\ell}{\lambda} \right)^2 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = (2\pi) \cdot 15\pi \left(\frac{|I|d\ell}{\lambda} \right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3} \right) = \\ &= 40 \left(\frac{\pi \cdot |I|d\ell}{\lambda} \right)^2 \end{aligned}$$

Generalmente, il risultato appena ottenuto si scrive nella forma seguente

$$P_{\text{rad}} = 80\pi^2 \left(\frac{d\ell}{\lambda} \right)^2 \frac{|I|^2}{2}$$

Questa espressione è utile ai fini delle seguenti considerazioni: se pensiamo P_{rad} come la potenza dissipata da una certa resistenza R_{rad} (per il momento incognita) attraversata da una corrente di valore efficace $I_{\text{eff}} = I/\sqrt{2}$, possiamo scrivere che $P_{\text{rad}} = R \frac{|I|^2}{2}$, dove evidentemente $\frac{|I|^2}{2}$ è il quadrato del valore efficace della suddetta corrente; uguagliando dunque con l'espressione di P_{rad} trovata poco fa, abbiamo che

$$R_{\text{rad}} = 80\pi^2 \left(\frac{d\ell}{\lambda} \right)^2 \quad [\Omega]$$

Questa resistenza prende il nome di **resistenza di radiazione** dell'elemento di corrente considerato. E' evidentemente una *resistenza fittizia* che dissipa tanta potenza quanta ne viene irradiata dal dipolo elettrico, a parità di valore efficace della corrente.

Tutte queste considerazioni ci consentono adesso di mostrare che *il dipolo elettrico costituisce una sorgente di radiazioni elettromagnetiche a bassissima efficienza*. Ad esempio consideriamo una lunghezza **$d\ell=1\text{cm}$** ed una frequenza di lavoro di **300 MHz** (cui corrisponde $\lambda=3\text{m}$). Con questi valori, si ottiene una resistenza di radiazione di $79\text{m}\Omega$. Ciò significa che, per irradiare una potenza di 1W, è necessario alimentare il dipolo con una corrente di 3.6A, che è un valore decisamente elevato. Se poi scendiamo in frequenza, ad esempio a 3 MHz (cui corrisponde $\lambda=100\text{m}$), la resistenza di radiazione scende a $7.9\mu\Omega$, per cui la corrente necessaria ad irradiare 1 W di potenza è data addirittura da 356 A.

Nonostante questa scarsissima **efficienza di radiazione**, il dipolo elettrico è comunque un valido strumento di studio, in quanto i campi lontani da esso prodotti sono sostanzialmente identici ai campi lontani di molte altre antenne di uso comune.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**

e-mail: sandry@iol.it

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>

succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>