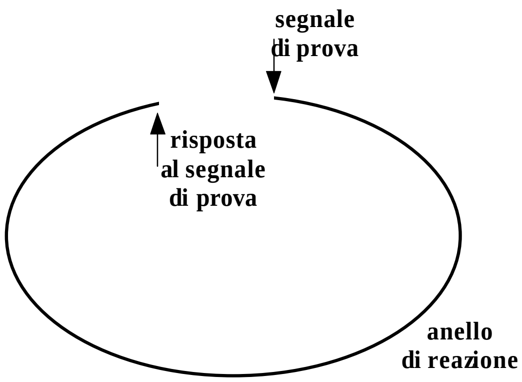
Appunti di Elettronica
Capitolo 13 – parte IV
La reazione

Guadagno d'anello e rapporto di ritorno

Valutazione diretta del guadagno d'anello

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto che la conoscenza del guadagno d'anello **T=a·f** consente di valutare le proprietà dell'amplificatore ad anello chiuso: in particolare, esso consente di valutare l'entità della desensibilizzazione (quantificata dal coefficiente **D=1+T**) e l'eventuale tendenza del sistema all'instabilità. Diventa allora importante poter calcolare T direttamente sul circuito in esame, senza dover ricorrere al *metodo dei doppi bipoli* precedentemente introdotto.

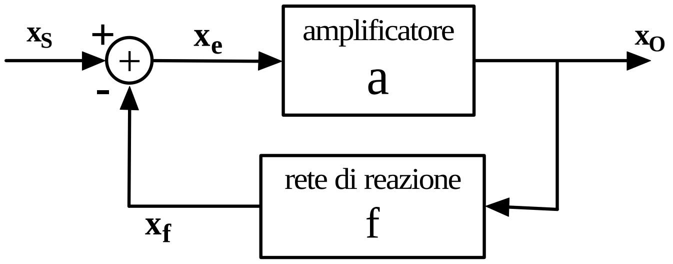
Il **metodo diretto** per il calcolo del guadagno di anello può essere compreso con riferimento alla figura seguente:



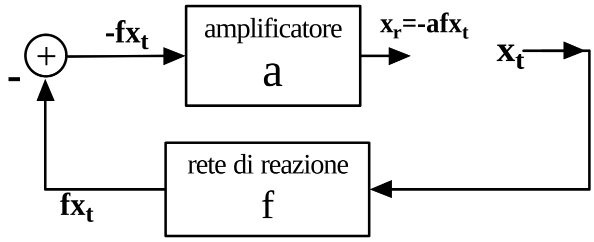
Una volta soppresso il generatore forzante di ingresso e una volta individuato l'anello di reazione, si sceglie, in modo opportuno, un punto in cui interrompere tale anello; a valle di questo punto, si inietta un **segnale di prova** x_t, il quale percorre l'anello e genera un **segnale di ritorno** x_r a monte del taglio: i due segnali risultano legati dalla relazione

$$T = a \cdot f = -\frac{x_r}{x_t}$$

Dobbiamo capire perché vale quest'ultima uguaglianza e possiamo farlo con riferimento allo schema a blocchi generale della reazione negativa:



Per prima cosa, stacchiamo il generatore forzante x_S, il quale non influisce minimamente sul valore del guadagno d'anello. Dobbiamo poi scegliere un punto in cui interrompere l'anello di reazione e possiamo ad esempio scegliere il nodo a valle dell'amplificatore di andata:



A valle del taglio, applichiamo un segnale di prova x_t: questo segnale va in ingresso alla rete di reazione, la cui uscita, per definizione, risulta essere $f \cdot x_t$.

Questo segnale va in ingresso al nodo comparatore, il quale dovrebbe sottrarlo all'ingresso forzante x_S; essendo questo nullo, l'uscita del nodo comparatore è semplicemente il segnale $-f \cdot x_t$, il quale va ingresso all'amplificatore di andata, dando una uscita pari a $-a \cdot f \cdot x_t$.

Questo è esattamente il segnale che ritroviamo a monte del punto in cui abbiamo interrotto l'anello, ossia il segnale di ritorno, che possiamo confrontare con quello di prova per ottenere proprio $-a \cdot f$ ([1]).

In definitiva, *il segnale di ritorno x_r è il segnale che l'anello di reazione produce in risposta al segnale di test che è stato iniettato nell'anello stesso.*

Una importante considerazione da fare è la seguente: nel momento in cui si va ad effettuare il taglio dell'anello di reazione, è necessario ripristinare, a monte del taglio, l'impedenza che si vedeva a valle del taglio prima che questo fosse effettuato. Questa operazione, che sarà più chiara negli esempi che seguiranno, è superflua tutte le volte che si opera il taglio dell'anello a valle di un generatore ideale di corrente (o di tensione) e si usa come segnale di prova un segnale di corrente (o di tensione).

A questo punto, bisogna tener conto che il rapporto $-x_r/x_t$ non rappresenta, in realtà, il valore esatto del guadagno di anello e questo per via del fatto che lo schema dal quale abbiamo ricavato la relazione $T=-x_r/x_t$ è uno schema solo ideale, in base al quale la rete di azione e la rete di reazione sono entrambe unilaterali e la rete di reazione non esercita alcun effetto di carico sulla rete di azione. Tuttavia, nei casi pratici, il rapporto $-x_r/x_t$ risulta essere, come si vedrà, una buona approssimazione del guadagno d'anello: per questo motivo, lo si indica con la lettera **θ** e lo si chiama **rapporto di ritorno** (**return ratio**).

La relazione da considerare è dunque

$$\boxed{\theta = -\frac{x_r}{x_t}}$$

Per quanto riguarda il segnale di prova, la scelta di un segnale di tensione o di un segnale di corrente va fatta a seconda di come risulta più agevole il calcolo.

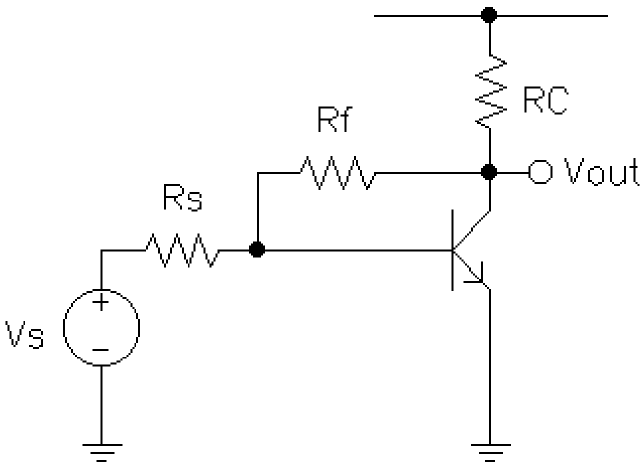
E' anche importante scegliere in modo opportuno il punto in cui operare il taglio:

[1] E' importante osservare che il segno negativo del rapporto $-x_r/x_t$ tiene conto del fatto che, nella schematizzazione a blocchi con nodo comparatore in ingresso, percorrendo l'anello di reazione si ottiene una stima della quantità $-a \cdot f$. Se, invece, ci fosse una reazione positiva, cioè se il nodo in ingresso fosse un nodo sommatore, allora si avrebbe una stima di $+a \cdot f$.

- nei circuiti contenenti transistori BJT o FET, è spesso opportuno tagliare l’anello a valle del collettore o del dain, ossia a valle del generatore di corrente pilotato in tensione;
- invece, nei circuiti impieganti amplificatori operazionali, dato che possono essere modellati tramite generatori di tensione (comandati in tensione) praticamente ideali (ossia con bassissima resistenza di uscita), l’anello può essere tagliato immediatamente a valle di tale di tale generatore).

Esempio: stadio invertitore con reazione base-collettore

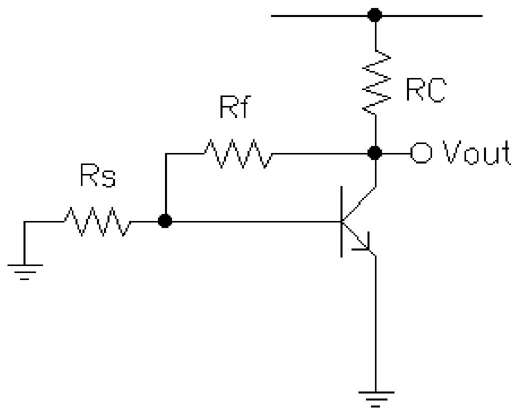
Consideriamo ancora una volta uno stadio ad emettitore comune avente una resistenza di reazione situata tra la base ed il collettore:



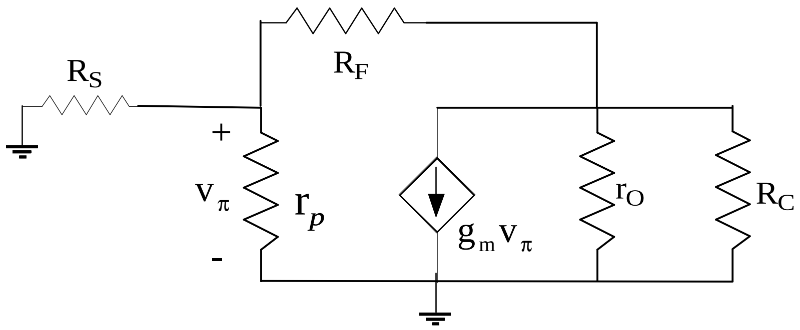
Abbiamo ampiamente studiato questo circuito, osservando che è reazionato (negativamente) mediante una connessione *parallelo in uscita* (misura della tensione di uscita) e *parallelo in ingresso* (confronto di correnti): l’espressione del guadagno d’anello, trovata mediante il metodo dei doppi bipoli, è

$$T = \frac{\left(g_m - \frac{1}{R_F}\right)\left(\frac{1}{R_F}\right)}{\left(\frac{1}{R_S} + \frac{1}{r_\pi} + \frac{1}{R_F}\right)\left(\frac{1}{r_O} + \frac{1}{R_F} + \frac{1}{R_C}\right)} \cong \frac{g_m (r_\pi // R_S) R_C}{R_F}$$

Per avere una stima di questo guadagno d’anello mediante il metodo diretto esposto prima, dobbiamo per prima cosa eliminare il generatore forzante (il che comporta che l’estremo sinistro di R_S venga posto a massa), per cui il circuito diventa il seguente:

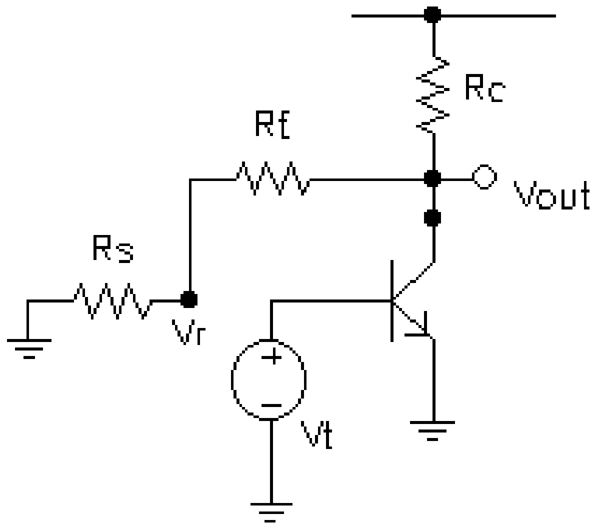


Il modello equivalente per piccoli segnali è il seguente:



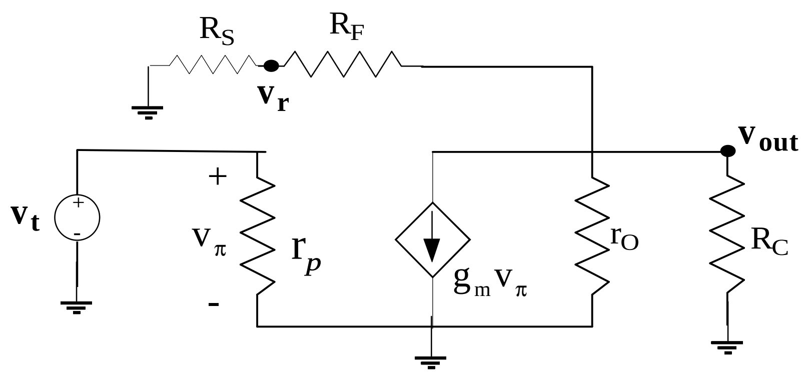
L'individuazione dell'anello di reazione, sia nel circuito di partenza sia in quello per piccolo segnale, è abbastanza immediata.

Dobbiamo allora scegliere dove interrompere l'anello. Possiamo per esempio procedere come indicato nella figura seguente:



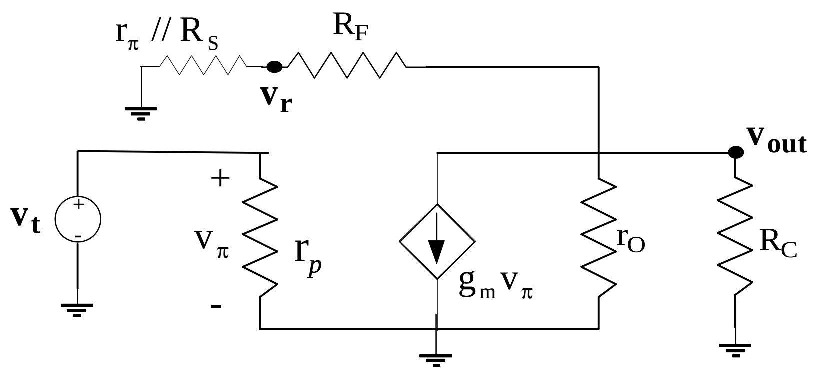
Abbiamo considerato, come segnale di prova, una tensione $\mathbf{v_t}$ applicata alla base del transistor e siamo interessati a valutare il segnale di risposta in termini di tensione $\mathbf{v_r}$ ai capi di R_S.

Possiamo allora procedere determinando prima la tensione v_{out} in funzione di v_t e successivamente la v_r in funzione di v_{out}. Utilizziamo il circuito equivalente per piccoli segnali:



Tuttavia, prima di effettuare i calcoli, dobbiamo ripristinare, a monte del taglio, l'impedenza vista a valle del taglio prima di effettuarlo: a valle del taglio si vede la r_π del transistor, per cui dobbiamo porla a monte del taglio, ossia in parallelo alla R_S.

Sulla base di questa considerazione, il circuito su cui fare i calcoli diventa il seguente:



Se, per semplicità, trascuriamo la resistenza di uscita r_O (supponendola sufficientemente più grande di R_C da soccombere nel parallelo), osserviamo immediatamente che

$$v_{out} = -g_m v_\pi \left[R_C // \left(R_F + \left(r_\pi // R_S\right)\right)\right] = -g_m v_t \left[R_C // \left(R_F + \left(r_\pi // R_S\right)\right)\right]$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che la tensione di prova coincide con la tensione v_π.

Nota la tensione di uscita, ossia la tensione ai capi della serie $R_F+(r_\pi//R_S)$, dobbiamo semplicemente eseguire la partizione di tale tensione su $(r_\pi//R_S)$:

$$v_r = \frac{\left(r_\pi // R_S\right)}{R_F + \left(r_\pi // R_S\right)} v_{out} = \frac{\left(r_\pi // R_S\right)}{R_F + \left(r_\pi // R_S\right)} \left(-g_m \left[R_C // \left(R_F + \left(r_\pi // R_S\right)\right)\right] v_t\right)$$

Da qui concludiamo che il rapporto di ritorno vale

$$\theta = -\frac{v_r}{v_t} = \frac{g_m\left(r_\pi // R_S\right)\left[R_C //\left(R_F + \left(r_\pi // R_S\right)\right)\right]}{R_F + \left(r_\pi // R_S\right)}$$

Questa espressione fornisce dunque il valore del rapporto di ritorno, ossia una stima del guadagno d'anello.

Del resto, se facciamo qualche approssimazione, ci accorgiamo che, in questo caso, si tratta di un ottima stima di T: infatti, tenendo conto che la resistenza R_F è generalmente molto grande (anche 100kΩ), per cui prevale nella serie con ($r_\pi // R_S$), mentre, a numeratore, "soccombe" nel parallelo con R_C: risulta perciò

$$-\frac{v_r}{v_t} \cong \frac{g_m\left(r_\pi // R_S\right)R_C}{R_F}$$

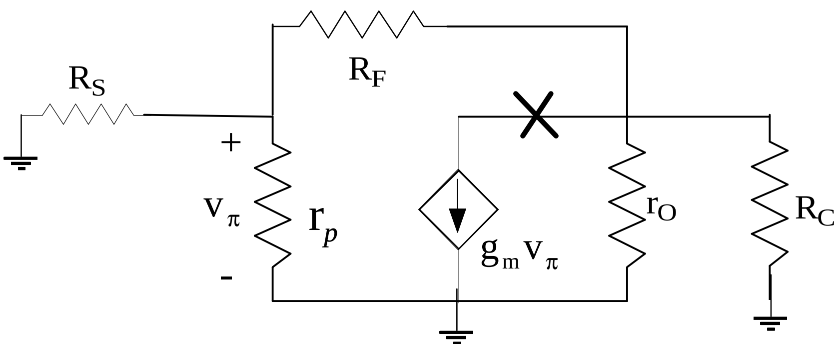
e questa è la stessa espressione trovata in precedenza con il metodo dei doppi bipoli.

In effetti, comunque, le semplificazioni fatte non sono sempre lecite, però si ha una idea di quanto θ si avvicini a T.

In generale, possiamo comunque affermare che *l'uguaglianza $T=a\cdot f=q$ si ha quando il circuito è costituito da un amplificatore diretto unilaterale e da una rete di reazione unilaterale*. Sono, tuttavia, pochi i circuiti che possono essere costruiti con reti unilaterali.

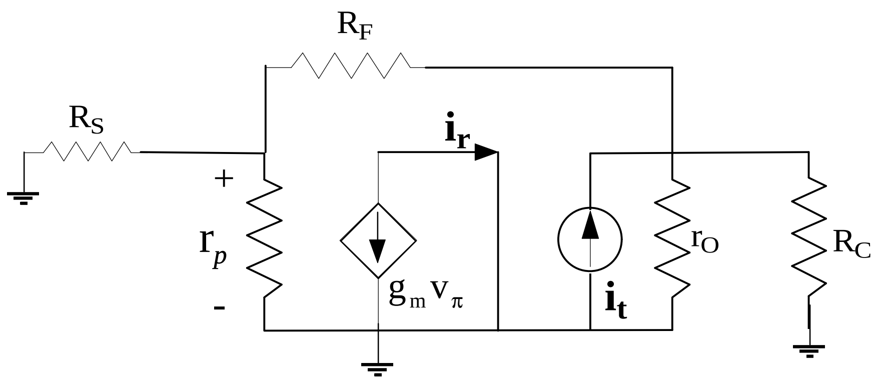
A questo punto, osserviamo che il procedimento appena seguito, per quanto corretto, ha comportato alcuni passaggi aggiuntivi che possono essere invece eliminati scegliendo in modo più opportuno il punto in cui interrompere l'anello e scegliendo anche un altro tipo di segnale di prova, cioè un segnale di corrente.

Consideriamo, infatti, nuovamente, il circuito per piccoli segnali dello stadio (con il generatore forzante già passivato):



Come detto in principio, conviene, in un caso come questo, interrompere l'anello a valle del generatore di corrente pilotato in tensione, ossia tra la r_O ed il suddetto generatore pilotato.

Scelto questo punto per il taglio, dobbiamo applicare il segnale di prova e ci conviene sicuramente usare un segnale in corrente, come nella figura seguente:



Con questa scelta, siamo adesso interessati a calcolare il $-i_r/i_t$ (rapporto di ritorno lungo l'anello riferito al generatore pilotato $g_m v_\pi$).

Trascurando ancora una volta la r_O nel parallelo con R_C, possiamo procedere in modo simile a prima: in primo luogo, scriviamo facilmente che

$$i_r = -g_m v_\pi$$

per cui dobbiamo calcolare la v_π. Questa è la tensione ai capi della resistenza $(r_\pi // R_S)$, la quale è in serie ad R_F: la serie $R_F+(r_\pi // R_S)$ è in parallelo a sua volta ad R_C, per cui dobbiamo calcolare prima la tensione v_{out} ai capi di tale parallelo:

$$v_{out} = i_t \left\{ \left[R_F + \left(R_S // r_\pi \right) \right] // R_C \right\}$$

Questa è la tensione ai capi di $R_F+(r_\pi // R_S)$, per cui la partizione ai capi di $(r_\pi // R_S)$, ossia quindi di r_π, è la seguente:

$$v_\pi = \frac{\left(R_S // r_\pi \right)}{R_F + \left(R_S // r_\pi \right)} v_{out} = \frac{\left(R_S // r_\pi \right)}{R_F + \left(R_S // r_\pi \right)} \left\{ \left[R_F + \left(R_S // r_\pi \right) \right] // R_C \right\} i_t$$

Tornando allora nell'espressione di i_r, abbiamo che

$$i_r = -g_m v_\pi = -g_m \frac{\left(R_S // r_\pi \right)}{R_F + \left(R_S // r_\pi \right)} \left\{ \left[R_F + \left(R_S // r_\pi \right) \right] // R_C \right\} i_t$$

da cui concludiamo che il rapporto di ritorno vale

$$\theta = -\frac{i_r}{i_t} = g_m \frac{\left(R_S // r_\pi \right)}{R_F + \left(R_S // r_\pi \right)} \left\{ \left[R_F + \left(R_S // r_\pi \right) \right] // R_C \right\}$$

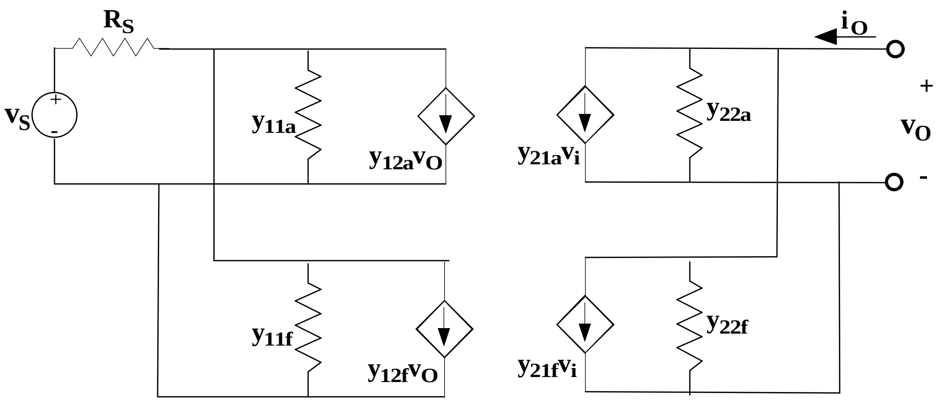
ossia la stessa espressione trovata prima calcolando il rapporto $-v_r / v_t$.

Differenze tra guadagno d'anello e rapporto di ritorno

Nell'esempio precedente abbiamo visto come è possibile calcolare, per un circuito reale, il rapporto di ritorno. Abbiamo anche sottolineato che esso rappresenta solo una stima del guadagno d'anello dell'amplificatore reazionato e che tale stima è tanto migliore quanto più le reti di azione e reazione possono essere considerate unilaterali.

Possiamo allora accorgerci che il valore di T ed il valore di θ sono, in generale, diversi se li calcoliamo entrambi sul circuito ottenuto modellando la rete di azione e quella di reazione mediante l'approccio dei doppi bipoli.

Consideriamo, per esempio, un amplificatore in transresistenza, ossia un amplificatore reazionato mediante una *connessione parallelo sia in uscita sia in ingresso* (come nell'esempio precedente). Sappiamo ormai bene che è possibile modellare l'amplificatore nel modo seguente:

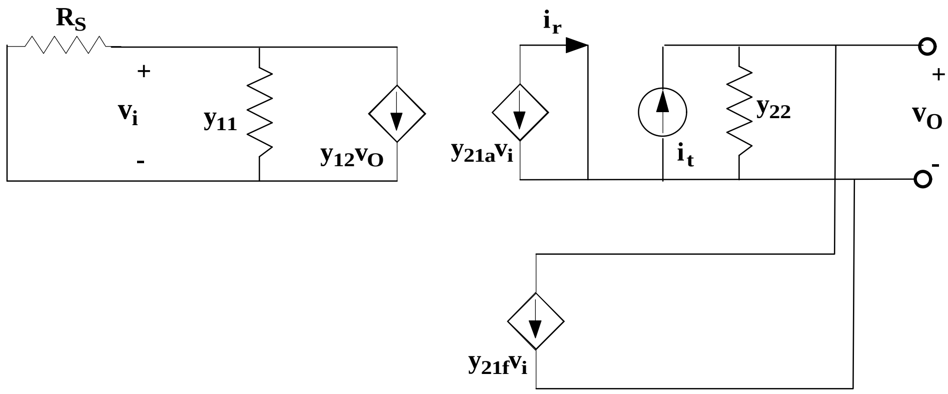


Calcolando il guadagno d'anello su questo circuito, sappiamo che si ottiene la formula

$$T = af = -\frac{y_{21}y_{12}}{(G_S + y_{11})y_{22}}$$

(dove si suppone che il carico sia semplicemente costituito da R_C).

Per calcolare, invece, θ, dobbiamo eliminare il generatore forzante v_S, aprire l'anello in un punto opportuno, inserire il generatore di prova i_t e valutare successivamente la corrente di ritorno i_r. Interrompiamo allora l'anello a valle del generatore pilotato $y_{12a}v_i$ che modella il trasferimento diretto della rete di azione e quello inverso della rete di reazione:



Calcoliamo il rapporto $-i_r/i_t$. Possiamo intanto scrivere che

$$i_r = -y_{21a} v_i$$

per cui dobbiamo calcolare la tensione di ingresso v_i dell'amplificatore. Questa è la tensione ai capi della conduttanza $y_{11}+G_S$; questa conduttanza è alimentata dalla corrente $y_{12}v_O$, per cui abbiamo che

$$v_i = \frac{y_{12} v_O}{y_{11} + G_S}$$

La tensione di uscita è la tensione ai capi della conduttanza y_{22}, la quale è alimentata dalla corrente $i_t - y_{21f} v_i$: abbiamo quindi che

$$v_i = \frac{y_{12}\left(\dfrac{i_t - y_{21f} v_i}{y_{22}}\right)}{y_{11} + G_S} \longrightarrow v_i = \frac{y_{12} i_t}{(y_{11} + G_S) y_{22} + y_{12} y_{21f}}$$

Sostituendo quindi nell'espressione di i_r, otteniamo che

$$i_r = -y_{21a} \frac{y_{12} i_t}{(y_{11} + G_S) y_{22} + y_{12} y_{21f}} \longrightarrow \boxed{\theta = -\frac{i_r}{i_t} = \frac{y_{12} y_{21a}}{(y_{11} + G_S) y_{22} + y_{12} y_{21f}}}$$

Questa è dunque l'espressione generale del rapporto di ritorno per un amplificatore reazionato parallelo-parallelo (ossia un amplificatore in transresistenza).

Confrontando questa espressione con quella generale del guadagno di anello, si nota che sono diverse, per cui, in generale, risulta $\theta \neq T$. In particolare, si osserva che la diversità deriva dall'aver considerato il trasferimento diretto della rete di reazione, ossia il parametro y_{21f}, il che fa' si che $y_{21a} \neq y_{21}$. Se, invece, facessimo l'ipotesi di unilateralità della rete di reazione, risulterebbe

$$\theta = -\frac{i_r}{i_t} \cong \frac{y_{12} y_{21}}{(y_{11} + G_S) y_{22}} = T$$

ossia la perfetta coincidenza tra rapporto di ritorno e guadagno d'anello.

E' chiaro che passaggi del tutto analoghi si possono fare per le altre tre configurazioni degli amplificatori reazionati: per esempio, per una configurazione serie-parallelo (amplificatore di tensione), si trova che

$$\theta = -\frac{i_r}{i_t} = \frac{h_{12} h_{21a}}{(h_{11} + R_S) h_{22} + h_{12} h_{21f}}$$

e cioè una espressione del tutto analoga a quella trovata per la configurazione parallelo-parallelo, per cui valgono evidentemente le stesse considerazioni.

In generale, la semplificazione di assumere il trasferimento diretto della rete di reazione trascurabile rispetto a quello della rete di azione non è sempre accettabile.

Inoltre, trascurare la trasmissione diretta attraverso la rete di reazione può portare ad errori nella valutazione degli effetti di carico che essa esercita sulla rete di azione.
Possiamo dunque riassumere queste considerazioni mediante un teorema:

Teorema - In un amplificatore reazionato riconducibile ad una rappresentazione a singolo anello di reazione, il rapporto di ritorno θ relativo al generatore controllato della rete di azione è una buona approssimazione del guadagno d'anello $T=a\cdot f$ se sono verificate due condizioni:

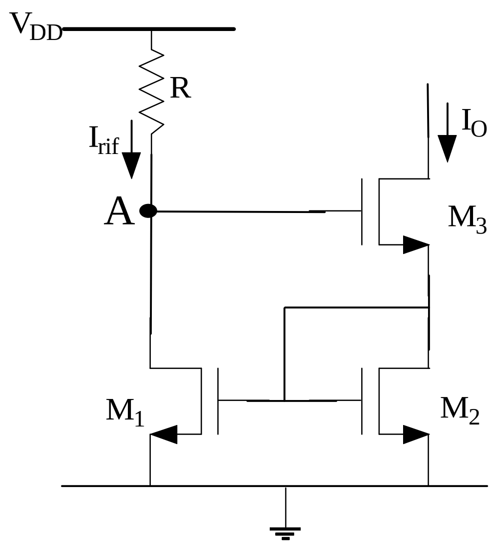
- il trasferimento diretto della rete di azione deve essere di gran lunga prevalente rispetto a quello della rete di reazione (ossia $|h_{21a}| >> |h_{21f}|$ per un amplificatore di tensione o l'analoga espressione per gli altri 3 tipi di amplificatori);
- deve risultare $|Z_I Y_O| >> |h_{12} h_{21f}|$ per un amplificatore di tensione oppure l'analoga espressione per gli altri 3 tipi di amplificatori.

Ci sono due casi in cui si può verificare facilmente l'uguaglianza di θ e di T: quando la variabile di uscita è la tensione ai capi di un generatore di tensione controllato o quando si tratta della corrente attraverso un generatore di corrente controllato.
Osserviamo, inoltre, che, nel calcolo pratico di θ, non si fa riferimento ad una schematizzazione per mezzo di doppi bipoli, ma, come visto nell'esempio precedente, si effettua il calcolo direttamente sul circuito o al massimo sul suo equivalente per piccoli segnali. Inoltre, se la rete di reazione è resistiva (come nei casi da noi considerati), si assume come generatore controllato quello (o uno di quelli) della rete di azione.
Nel caso si consideri un amplificatore con più stadi in cascata, i rapporti di ritorno per tutti i dispositivi attivi sono gli stessi, purché ci sia un unico anello di reazione. Questo non è più vero, ovviamente, quando sono presenti anche delle reazioni locali.
In definitiva, il guadagno d'anello T può essere visto come il rapporto di ritorno θ calcolato per il generatore controllato globale diretto h_{21} (o inverso h_{12}). Il fatto che, in genere, in un circuito non si consideri, nel calcolo di θ, il trasferimento globale, ma solo quello parziale della rete di azione o della rete di reazione, dà origine alla differenza di θ rispetto al guadagno d'anello T, come visto in precedenza.
Ci sono poi altre differenze che riguardano il comportamento dinamico dell'amplificatore: in particolare, dato che le espressioni analitiche di θ e di T, sono, come detto, diverse, può accadere che la funzione di trasferimento T(s) abbia degli zeri che non compaiono nella funzione di trasferimento θ(s). D'altra parte, è stato dimostrato in modo rigoroso (da Bode) che *il q(s) ha il grande pregio di poter essere impiegato per verificare la stabilità di un amplificatore a singolo anello di reazione;* al contrario, si è verificato che, per predire la stabilità ad anello chiuso per mezzo di T(s), è necessario che l'amplificatore di andata sia stabile: una eventuale instabilità dell'amplificatore ad anello chiuso è, in questo caso, il risultato della presenza nel semipiano destro di zeri della funzione 1+a(s)f(s) (rivelati per mezzo del criterio di Nyquist).
Nonostante queste differenze tra T e θ, il calcolo di θ si rivela utile in molti casi pratici in cui non è possibile o non facile o non indispensabile identificare il blocco di azione e quello di reazione.

Un aspetto molto importante, come abbiamo già detto, è che, quando si interrompe l'anello, occorre caricare l'estremo a monte del taglio con l'impedenza di carico che esso vede prima del taglio (a meno che tale impedenza non sia infinita). A volte, ciò è impossibile da farsi in modo rigoroso, poiché gli effetti di carico della rete di azione e della rete di reazione sono reciproci.

Esempio: rapporto di ritorno in uno specchio di Wilson (a MOS)

Consideriamo lo specchio di corrente di Wilson, ad esempio nella versione MOS:



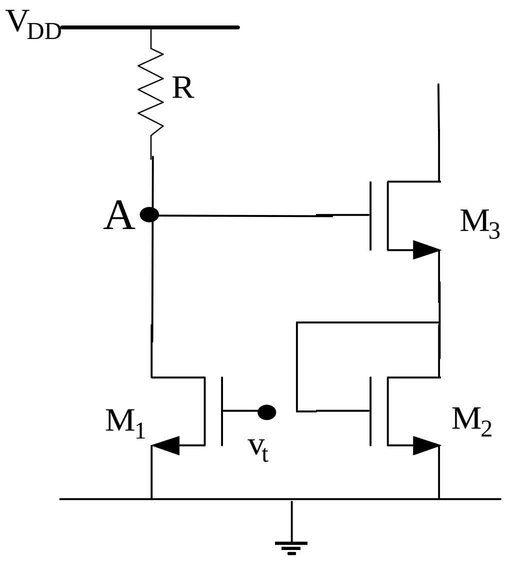
Questo circuito è un circuito reazionato: l'anello di reazione può essere visto a partire dal nodo A, passando per la giunzione gate-source di M3, per il ramo che mette in cortocircuito il gate ed il drain di M2 e per la giunzione gate-drain di M1.

Per prima cosa, vogliamo capire se si tratta o meno di una reazione negativa: per farlo, ci basta interrompere l'anello di reazione in un qualsiasi punto, applicare un segnale di prova in tale punto e stabilire se esso viene riportato, a monte dell'interruzione, in opposizione di fase oppure no.

Possiamo allora scegliere, come punto di interruzione, il terminale di gate di M1: muovendoci in senso orario, osserviamo una prima inversione di segno tra il gate ed il drain di M1; successivamente, nel passaggio dal gate al source di M3 e quindi a monte dell'interruzione, non abbiamo alcuna inversione, per cui deduciamo che la reazione è negativa.

Accertato questo, vogliamo una stima θ del guadagno d'anello ottenuta con il metodo diretto esposto nei paragrafi precedenti.

Andiamo allora ad interrompere nuovamente l'anello di reazione in corrispondenza del gate di M1 e ad applicare, a valle dell'interruzione, un segnale di test v_t (non abbiamo da ripristinare alcuna impedenza in quanto i MOSFET hanno impedenza di ingresso infinita):



Dato che M3 non assorbe corrente di gate, il ramo facente capo ad M1 è un semplice stadio a source comune, per cui il suo guadagno vale $A_{V1}=-g_{m1}R$: allora, essendo v_t la tensione di ingresso e v_A quella di uscita, possiamo scrivere che $v_A=-g_{m1}Rv_t$.

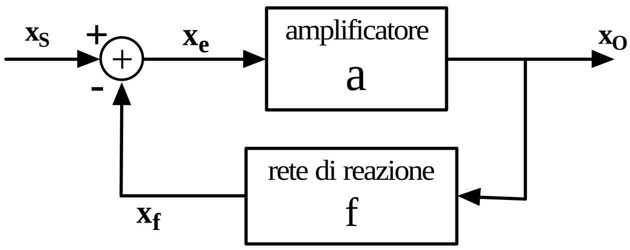
Questa tensione è applicata sul gate di M3, il quale si comporta da inseguitore di tensione con carico pari alla resistenza vista guardando dal source verso massa: tale resistenza è quella presentata da M2 connesso a diodo, cioè vale $1/g_{m2}$. Possiamo allora scrivere che $v_r=\frac{v_A}{2}=\frac{-g_m R v_t}{2}$, da cui ricaviamo infine che il rapporto di ritorno vale

$$\boxed{\theta=-\frac{v_r}{v_t}=\frac{g_m R}{2}}$$

Principio di sovrapposizione degli effetti

Introduzione

Abbiamo visto che l’analisi classica dei circuiti reazionati mediante il metodo dei doppi bipoli mette in relazione le proprietà del sistema ad anello chiuso con quelle ad anello aperto e con il guadagno d’anello. I vantaggi di questa metodologia consistono essenzialmente nel fatto che, così facendo, il circuito può essere visto come una implementazione dello schema generale a blocchi indicato nella figura seguente e abbondantemente descritto:



In particolare, *il guadagno, le prestazioni dinamiche e le impedenze di ingresso e di uscita ad anello chiuso sono espressi, secondo l’approccio dei doppi bipoli, in termini delle corrispondenti quantità ad anello aperto (tramite il fattore D=1+af), il che consente quindi di evidenziare l’effetto esercitato dall’anello di reazione su tali quantità*.

Tuttavia, a questi vantaggi corrisponde, come si è visto negli esempi, una maggiore complessità di analisi, soprattutto nella definizione del modello a biporta con trasferimento unidirezionale o, in alcuni casi, il ricorso a pericolose approssimazioni.

Inoltre, la reazione, così come modellata dalla funzione di trasferimento della rete di reazione, si assume applicata solo globalmente, ossia dall’uscita all’ingresso. Da un punto di vista circuitale, ciò costituisce un vincolo che, oltre ad essere non realistico, è anche non necessario.

Il metodo che ci accingiamo ad esporre, invece, consente di sviluppare una metodologia generale che si applica a reti lineari attive. Tra i vari pregi di questo metodo, c’è senz’altro quello di *non richiedere l’individuazione del blocco di azione e del blocco di reazione (e quindi nemmeno l’individuazione del tipo di connessione in ingresso ed in uscita)*. Tale metodo, basato sull’applicazione del **principio di sovrapposizione degli effetti**, ha inoltre il grande pregio di utilizzare il concetto di *rapporto di ritorno* (return ratio): si tratta di un pregio in quanto, come detto in precedenza, il rapporto di ritorno θ consente di definire rigorosamente le condizioni di stabilità del circuito (come è stato dimostrato da Bode), prescindendo dalla condizione di stabilità ad anello aperto (che invece è richiesta qualora si voglia usare il metodo dei biporta, ossia il concetto di guadagno d’anello).

Inoltre, *il metodo in questione consente di individuare una espressione rigorosa, non approssimata, del guadagno di feedback in funzione di q:* questo è importante in quanto, anche se potremmo scrivere che $A_f = \frac{a}{1+T} \cong \frac{a}{1+\theta}$, abbiamo osservato che non sempre la stima di T tramite θ è accurata e, inoltre, non abbiamo modo di stabilire tale grado di accuratezza.

Ancora, questo metodo è particolarmente utile, specialmente in fase di progetto, quando, per esempio, si vuole mettere in evidenza l'influenza di uno specifico parametro circuitale su una funzione di trasferimento: può trattarsi del guadagno di un amplificatore, dell'impedenza di un bipolo, di una transimpedenza o di una transammettenza definita tra due coppie di nodi della rete in esame, della funzione di trasferimento di un elemento attivo e così via.

Introduzione al modello

Cominciamo con il considerare un generico amplificatore lineare reazionato a singolo anello di reazione. In questo amplificatore, *si fa l'ipotesi che agiscano due distinti generatori (di tensione o di corrente):* uno è il generatore di segnale esterno, che indichiamo in generale con $\mathbf{x_S}$, mentre l'altro è un generatore pilotato (non necessariamente appartenente al modello incrementale di un dispositivo attivo), che indichiamo con $\mathbf{x_g = k x_i}$, dove ovviamente x_i è la variabile pilota (una tensione o una corrente).

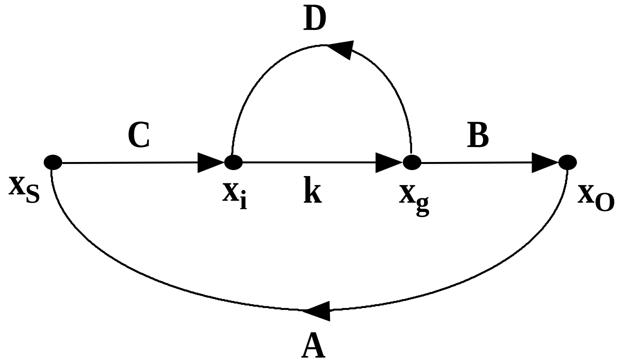
Inizialmente, si assume che il generatore controllato sia in realtà indipendente, ad esempio ignorando (temporaneamente) la dipendenza di x_g dalla variabile pilota x_i oppure, più di frequente, distinguendo una variabile pilota $\hat{x}_i$ indipendente da x_i. Successivamente, questa variabile sarà legata alle altre variabili del circuito mediante un'equazione di vincolo del tipo $x_g = kx_i$ oppure $\hat{x}_i = x_i$.

Trattandosi di una rete lineare, si può allora far uso del *principio di sovrapposizione degli effetti*: in tal modo, qualunque tensione o corrente di segnale può essere espressa come somma di due contributi indipendenti: uno dovuto al generatore esterno x_S con il secondo generatore soppresso e l'altro dovuto al generatore x_g con il primo generatore soppresso.

In termini analitici, quanto detto significa che possiamo esprimere, in funzione di x_S ed x_g, sia la variabile di uscita x_O sia la variabile di controllo x_i: le equazioni saranno del tipo

$$\boxed{\begin{cases} x_O = Ax_S + Bx_g \\ x_i = Cx_S + Dx_g \end{cases}}$$

Queste relazioni, insieme alla terza relazione $x_g = kx_i$, sono eventualmente rappresentabili, per comodità, tramite un grafo di flusso del tipo indicato nella figura seguente:



I nodi del grafo corrispondono alle variabili di lato (correnti e tensioni riferite a massa), mentre i rami corrispondono a quantità che possono essere transimpedenze, transammettenze, guadagni di tensione e guadagni di corrente (a seconda della natura delle varie grandezze).

Possiamo dunque definire i 4 parametri A,B,C e D nel modo seguente:

- $A = \left.\frac{x_O}{x_S}\right|_{x_g=0}$: questo coefficiente prende il nome di **guadagno della rete morta**, in quanto rappresenta il valore dell'uscita dovuto all'azione del solo ingresso forzante, ossia con il generatore pilotato x_g spento; esso rappresenta quindi il trasferimento diretto, dal generatore forzante all'uscita, quando il generatore interno è spento.
- $B = \left.\frac{x_O}{x_g}\right|_{x_S=0}$
- $C = \left.\frac{x_i}{x_S}\right|_{x_g=0}$
- $D = \left.\frac{x_i}{x_g}\right|_{x_S=0}$

<u>Il nostro obbiettivo è quello di calcolare il *guadagno di feedback* $A_f=x_O/x_S$</u>: per farlo, possiamo sia procedere a livello analitico, sulla base delle due equazioni prima citate, sia, più comodamente, possiamo applicare le note **regole di riduzione dei grafi orientati**.

Seguendo questa seconda strada, si ottiene facilmente la seguente espressione:

$$\boxed{A_f = \frac{x_O}{x_S} = A + \frac{CkB}{1-kD}}$$

Questa forma del guadagno di feedback (cioè della funzione di trasferimento ad anello chiuso) mette in evidenza che il guadagno totale è composto da due termini: il primo termine non dipende dal parametro k, mentre il secondo si annulla con k, evidenziando proprio il modo con cui A_f è influenzato da k. Questa è proprio l'essenza del principio di sovrapposizione degli effetti.

Si osserva, dunque, immediatamente che l'applicazione di questo metodo porta ad una espressione del guadagno di feedback che mette in evidenza proprietà del tutto diverse da quelle evidenziate dalla formula $A = \frac{a}{1+af}$: mentre quest'ultima formula evidenzia sostanzialmente come la reazione modifica il guadagno ad anello aperto dell'amplificatore, l'espressione $A_f = A + \frac{CkB}{1-kD}$ evidenzia sostanzialmente come il guadagno ad anello chiuso risenta dell'azione del generatore pilotato scelto come *riferimento*.

A partire da quella espressione, il nostro compito diventa semplicemente quello di determinare le espressioni dei 4 parametri A,B,C e D (in base alle definizioni riportate prima) sul circuito in esame.

L'ultima cosa che ci resta da vedere, circa la definizione generale del metodo, è il modo in cui questo metodo tiene conto del *rapporto di ritorno* θ. Ci basta allora fare qualche semplice passaggio analitico per evidenziare come il guadagno A_f dipenda da θ.

In primo luogo, se sopprimiamo l'ingresso x_S e poniamo $x_g = k\hat{x}_i$, possiamo usare la seconda equazione per scrivere che

$$x_i = Cx_S + Dx_g = Dx_g = Dk\hat{x}_i$$

Se, allora, calcoliamo il rapporto $-x_i/\hat{x}_i$, è evidente che si tratta del rapporto di ritorno, rispetto al generatore controllato x_g, quando l'ingresso x_S è nullo:

$$\boxed{\theta_i = \left.\frac{x_i}{\hat{x}_i}\right|_{x_S=0} = -Dk}$$

Possiamo dunque riscrivere il guadagno di feedback nella forma

$$A_f = A + \frac{CkB}{1+\theta_i}$$

Possiamo adesso mettere in evidenza, a secondo membro, il termine $\frac{A}{1+\theta_i}$:

$$A_f = \frac{A}{1+\theta_i}\left[(1+\theta_i) + \frac{CkB}{A}\right] = \frac{A}{1+\theta_i}\left[1 - kD + \frac{CkB}{A}\right]$$

Adesso, consideriamo l'espressione $x_O = Ax_S + Bx_g$ della grandezza di uscita: se supponiamo $x_O=0$, abbiamo da questa equazione che

$$x_S = -\frac{B}{A}x_g$$

Sostituendo questa nell'espressione $x_i = Cx_S + Dx_g$ dell'ingresso, otteniamo

$$x_i = \left(-\frac{BC}{A} + D\right)x_g = \left(-\frac{BC}{A} + D\right)k\hat{x}_i$$

Se, allora, calcoliamo nuovamente il rapporto $-x_i/\hat{x}_i$, otteniamo questa volta il rapporto di ritorno, rispetto sempre al generatore controllato x_g, quando l'uscita x_O è nulla:

$$\boxed{\theta_O = -\left.\frac{x_i}{\hat{x}_i}\right|_{x_O=0} = \frac{BkC}{A} - kD}$$

Sostituendo nella relazione $A_f = \frac{A}{1+\theta_i}\left[1 - kD + \frac{CkB}{A}\right]$, possiamo concludere che l'espressione del guadagno di feedback è la seguente:

$$\boxed{A_f = A\frac{1+\theta_O}{1+\theta_i}}$$

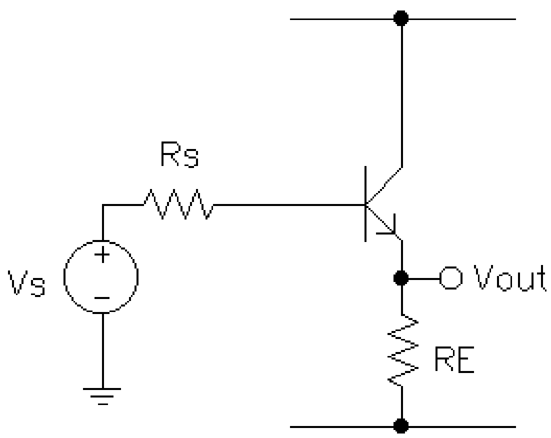
Abbiamo dunque trovato che *il guadagno di feedback (ma, più in generale, qualunque funzione di trasferimento della rete) è espresso in funzione del guadagno A della rete morta (cioè il guadagno diretto ottenuto ponendo a zero il valore del parametro di riferimento k) e del rapporto di ritorno q, calcolato una volta per ingresso nullo e una volta per uscita nulla.*

Quella equazione offre dunque la possibilità di calcolare il guadagno di feedback senza passare attraverso i parametri B,C e D, ma calcolando θ_i e θ_O direttamente sul circuito.

Ci sono casi in cui il rapporto di ritorno θ è diverso da zero anche con uscita nulla (cioè $\theta_O \neq 0$): questo fatto sta a rappresentare l'esistenza di una reazione interna che non si annulla quando è nulla la grandezza in uscita. Vedremo più avanti che il *rapporto di ritorno con uscita nulla* gioca un ruolo particolarmente significativo nel calcolo dell'impedenza alla porta di un amplificatore dove sia realizzata una connessione serie tra rete di azione e rete di reazione.

Esempio: Stadio inseguitore di tensione a BJT

Consideriamo uno stadio a collettore comune:



Sappiamo bene che questo circuito rappresenta un amplificatore di tensione reazionato mediante una connessione *parallelo in uscita* e *serie in ingresso*: la resistenza R_E, che costituisce la rete di reazione, preleva la tensione di uscita v_O e la riporta così com'è in ingresso (cioè f=1), in modo tale che la tensione pilota del transistor, a meno della R_S, sia $v_\pi = v_S - v_O$.

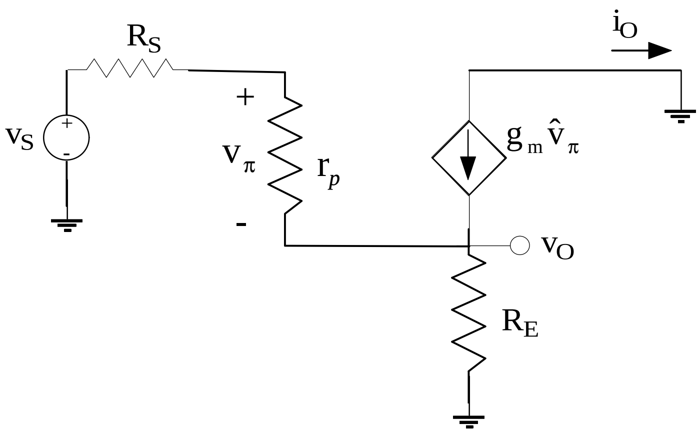
Abbiamo inoltre calcolato il guadagno di feedback sia mediante l'applicazione delle leggi di Kirchoff sia mediante l'approccio dei doppi bipoli:

$$A_f = \frac{v_O}{v_S} = \frac{(\beta+1)R_E}{R_S + r_\pi + (\beta+1)R_E}$$

dove il guadagno della rete di azione è $a = \frac{(\beta+1)R_E}{R_S + r_\pi}$, mentre quello della rete di reazione è unitario, per cui il guadagno di anello è $T = af = \frac{(\beta+1)R_E}{R_S + r_\pi}$.

Vogliamo allora arrivare a queste stesse conclusioni applicando il metodo della sovrapposizione degli effetti.

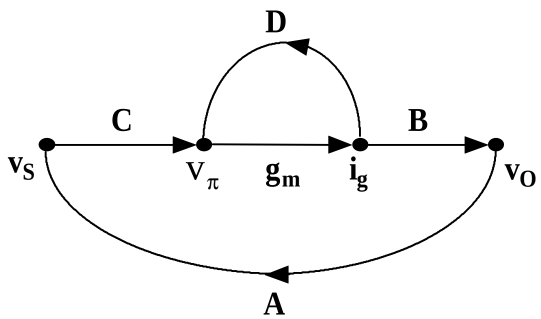
A tal fine, cominciamo a considerare il circuito equivalente incrementale dell'amplificatore:



Possiamo immediatamente fare le seguenti posizioni:

$$\begin{cases} x_S = v_S \\ x_O = v_O \\ x_i = v_\pi \\ x_g = g_m \hat{v}_\pi \longrightarrow k = g_m \end{cases}$$

Stiamo perciò facendo riferimento al seguente grafo orientato:



$$\begin{cases} v_O = Av_S + Bi_g \\ v_\pi = Cv_S + Di_g \end{cases}$$

Come primo procedimento, andiamo a calcolare il guadagno di feedback (che in questo caso è un guadagno di tensione) con la formula

$$A_f = \frac{v_O}{v_S} = A + \frac{CkB}{1-kD}$$

Mentre abbiamo già determinato il parametro k (=g_m), restano da definire gli altri 4 parametri:

- $A = \left.\frac{v_O}{v_S}\right|_{g_m\hat{v}_\pi=0}$: se il generatore pilotato è spento, la tensione di uscita non è altro che la partizione della tensione v_S sulla resistenza R_E, che è in serie ad R_S ed r_π, per cui $A = \frac{R_E}{R_S + r_\pi + R_E}$;
- $B = \left.\frac{v_O}{g_m\hat{v}_\pi}\right|_{v_S=0}$: se l'ingresso v_S è nullo, abbiamo la resistenza R_S+r_π in parallelo alla R_E, per cui $v_O = [(R_S + r_\pi)//R_E]g_m\hat{v}_\pi$ e quindi $B = (R_S + r_\pi)//R_E$;
- $C = \left.\frac{v_\pi}{v_S}\right|_{g_m\hat{v}_\pi=0}$: se il generatore pilotato è spento, la v_π è la partizione di v_S sulla resistenza r_π, che è in serie ad R_S ed R_E, per cui $C = \frac{r_\pi}{R_S + r_\pi + R_E}$;
- $D = \left.\frac{v_\pi}{g_m\hat{v}_\pi}\right|_{v_S=0}$: se l'ingresso v_S è nullo, la resistenza R_S+r_π è in parallelo alla R_E ed il tutto è alimentato dalla corrente erogata dal generatore pilotato, per cui, applicando il partitore di corrente, si ottiene che $i_\pi = \frac{R_E}{R_S + r_\pi + R_E} g_m\hat{v}_\pi$, da cui $v_\pi = r_\pi i_\pi = \frac{r_\pi R_E}{R_S + r_\pi + R_E} g_m\hat{v}_\pi$ e quindi che $D = -\frac{r_\pi R_E}{R_S + r_\pi + R_E}$.

Noti, dunque, i 4 parametri, possiamo calcolare il guadagno di feedback:

$$A_f = \frac{v_O}{v_S} = \frac{R_E}{R_S + r_\pi + R_E} + \frac{\left(\frac{r_\pi}{R_S + r_\pi + R_E}\right) g_m\left((R_S + r_\pi)//R_E\right)}{1 + g_m\left(\frac{r_\pi R_E}{R_S + r_\pi + R_E}\right)}$$

Facendo qualche semplice manipolazione algebrica (senza alcuna approssimazione), si giunge ancora una volta alla seguente espressione (corretta, non approssimata):

$$A_f = \frac{(1+\beta)R_E}{R_S + r_\pi + (1+\beta)R_E}$$

Possiamo ora fare due importanti osservazioni:

- la prima è che, come avevamo previsto in linea del tutto generale, il guadagno A della rete morta non dipende in alcun modo da g_m (cioè dal parametro del generatore controllato), mentre il termine $\frac{CkB}{1-kD}$ dipende strettamente da g_m (e si annulla con esso);
- la seconda osservazione è che *la scelta del generatore pilotato da considerare indipendente non è univoca:* per esempio, se avessimo voluto valutare la dipendenza di A_f non da g_m, ma da R_E, avremmo potuto modellare questa resistenza come un generatore di tensione $R_E i_{RE}$ pilotato dalla corrente i_{RE}: in tal modo, avremmo ottenuto (ovviamente) la stessa espressione conclusiva di A_f, ma diverse espressioni dei singoli parametri k,A,B,C,D; così facendo, avremmo ad esempio potuto evidenziare il contributo ad A_f in assenza della R_E. Ovviamente, con un procedimento di questo tipo, il parametro A non avrebbe più assunto il significato di *guadagno della rete morta*, in quanto questa terminologia si riferisce esplicitamente al guadagno ottenuto con il generatore pilotato spento, cioè con la rete diventata passiva. Per specificare questa distinzione tra il parametro A riferito al generatore pilotato ed il parametro A riferito ad un qualsiasi elemento (come ad esempio la R_E) del circuito, useremo, per il primo (ossia per il **guadagno della rete morta**), il simbolo $\mathbf{A_D}$.

A questo punto, ripetiamo il procedimento del calcolo di A_f usando però la formula $A_f = A_D \frac{1+\theta_O}{1+\theta_i}$.

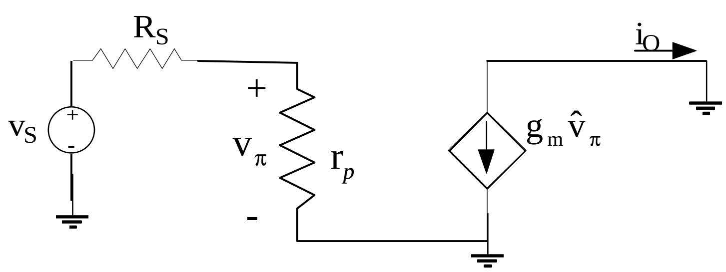
Mentre il parametro A_D (che in questo caso è propriamente il guadagno della rete morta, visto che ci stiamo riferendo al generatore pilotato $x_g = g_m \hat{v}_\pi$) ha la stessa espressione trovata prima, dobbiamo calcolare i due rapporti di ritorno.

Cominciamo dal rapporto di ritorno con uscita nulla, definito analiticamente nel modo seguente:

$$\theta_O = -\left.\frac{x_i}{\hat{x}_i}\right|_{x_O=0} = -\left.\frac{v_\pi}{\hat{v}_\pi}\right|_{v_O=0}$$

E' bene osservare che la condizione di uscita nulla non si ottiene perché fisicamente si va a cortocircuitare la resistenza R_E, ma corrisponde ad una situazione di **cortocircuito virtuale** di tale resistenza: si suppone cioè di lavorare con un valore dell'ingresso tale che la tensione ai capi di R_E risulti nulla.

Ovviamente, ai fini pratici del calcolo, non è importante considerare tale differenza, in quanto basta comunque porre una **massa virtuale** sull'emettitore del transistor:



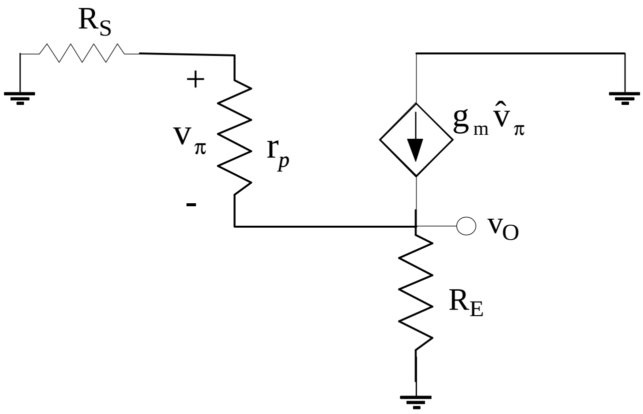
Abbiamo allora che

$$\theta_O = -\left.\frac{v_\pi}{\hat{v}_\pi}\right|_{v_O=0} = -\frac{1}{\hat{v}_\pi}\left[r_\pi\left(-g_m\hat{v}_\pi\right)\right] = \beta$$

Passiamo adesso al rapporto di ritorno con ingresso nullo, definito nel modo seguente:

$$\theta_i = -\left.\frac{x_i}{\hat{x}_i}\right|_{x_S=0} = -\left.\frac{v_\pi}{\hat{v}_\pi}\right|_{v_S=0}$$

In questo caso, dobbiamo fisicamente cortocircuitare l'ingresso:



Abbiamo in questo caso che

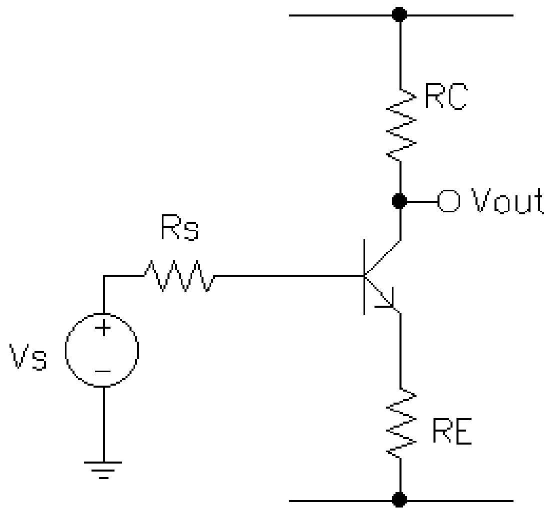
$$\theta_i = -\left.\frac{v_\pi}{\hat{v}_\pi}\right|_{v_S=0} = -\frac{1}{\hat{v}_\pi}r_\pi i_\pi = -\frac{1}{\hat{v}_\pi}r_\pi\left[\frac{R_E}{R_S+r_\pi+R_E}\left(-g_m\hat{v}_\pi\right)\right] = \frac{\beta R_E}{R_S+r_\pi+R_E}$$

Possiamo infine valutare A_f:

$$A_f = \frac{R_E}{R_S+r_\pi+R_E}\frac{1+\beta}{1+\dfrac{\beta R_E}{R_S+r_\pi+R_E}} = \frac{(\beta+1)R_E}{R_S+r_\pi+(\beta+1)R_E}$$

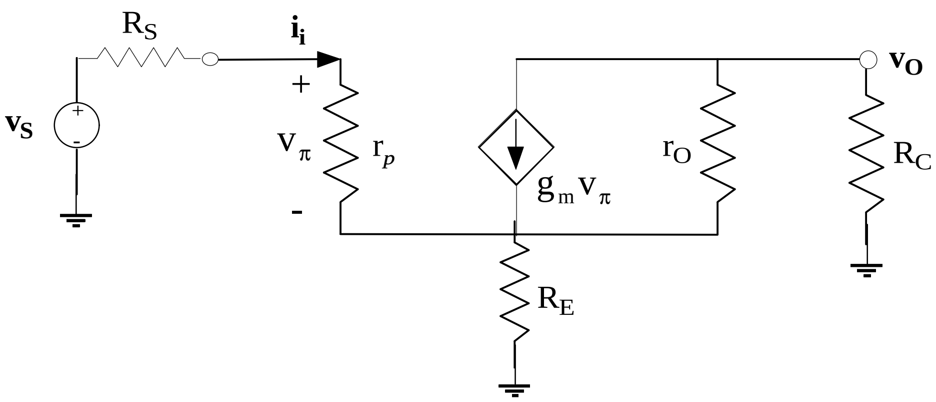
Esempio: stadio invertitore con degenerazione di emettitore

Consideriamo lo stadio invertitore a BJT con resistenza R_E di degenerazione tra emettitore e massa:



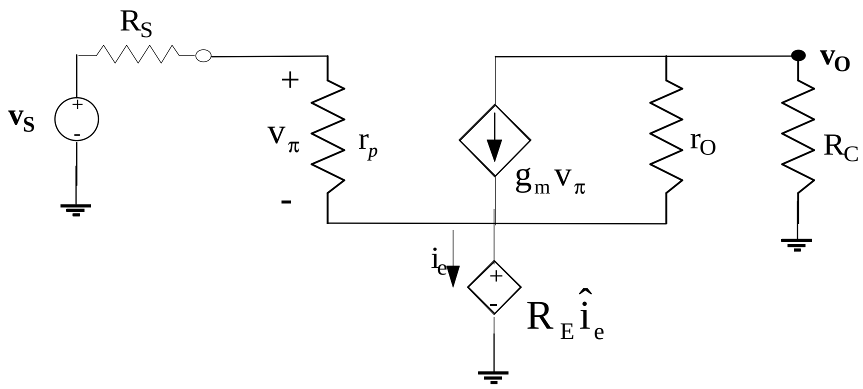
Vogliamo calcolare il guadagno di feedback di questo stadio mediante l'applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti.

Riportiamo allora il circuito incrementale di tale stadio:



Potremmo procedere come nell'esempio precedente scegliendo il parametro g_m come *parametro critico*. D'altra parte, possiamo anche scegliere come parametro critico la resistenza R_E, al fine di comprendere come essa influenzi il valore del guadagno di feedback.

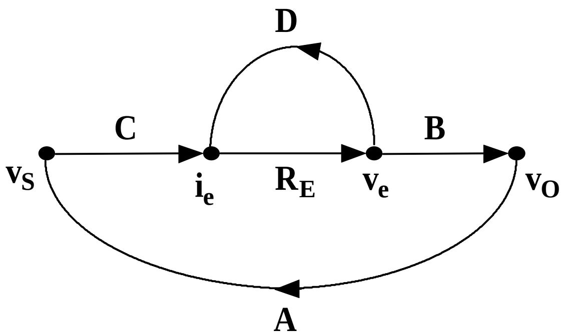
Per ottenere questo risultato, sostituiamo la R_E con un generatore di tensione controllato in corrente; la sua forma d'onda è evidentemente $v_e = R_E i_e$, per cui il circuito da analizzare diventa il seguente:



Con questa scelta, stiamo in pratica facendo le seguenti posizioni:

$$\begin{cases} x_S = v_S \\ x_O = v_O \\ x_i = i_e \\ x_g = v_e = R_E \hat{i}_e \longrightarrow k = R_E \end{cases}$$

e quindi stiamo facendo riferimento al seguente grafo orientato:



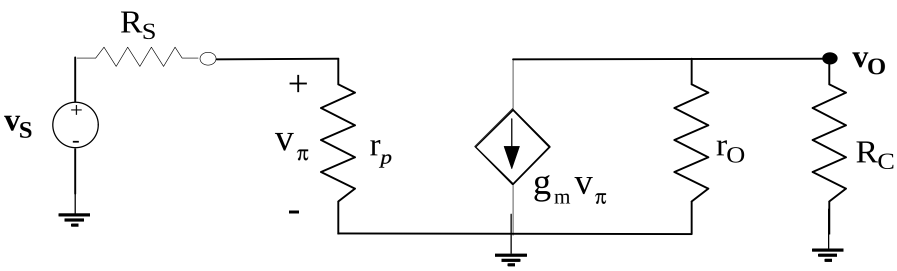
$$\begin{cases} v_O = Av_S + Bv_e \\ i_e = Cv_S + Dv_e \end{cases}$$

Evidentemente, quindi, i parametri A e B sono adesso dei guadagni di tensione, mentre C e D sono delle transammettenze: il guadagno di feedback espresso in termini di questi parametri è

$$A_f = \frac{v_O}{v_S} = A + \frac{CkB}{1 - kD}$$

Andiamo allora a calcolare questi parametri, applicando semplicemente le rispettive definizioni.

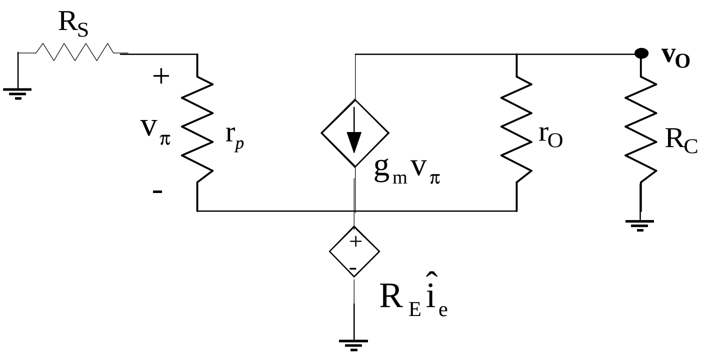
Cominciamo dal parametro $A = \left.\frac{v_O}{v_S}\right|_{R_E=0}$ (che non è più un guadagno della rete morta in quanto non ci stiamo riferendo al generatore pilotato interno ad un dispositivo attivo):



Se il generatore $R_E\hat{i}_e$ è spento, abbiamo un classico stadio ad emettitore comune per il quale A rappresenta il guadagno di tensione, per cui

$$A = \frac{-g_m\left(R_C // r_O\right)}{R_S + r_\pi}$$

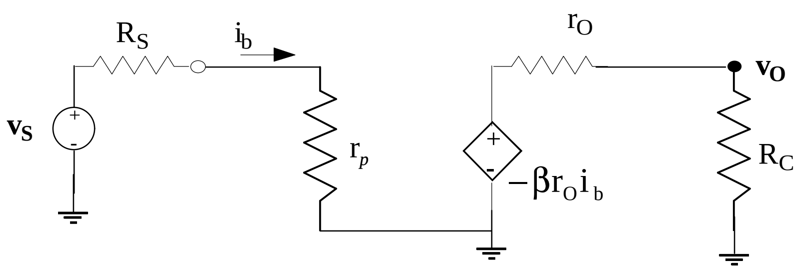
Passiamo al parametro $B = \left.\frac{v_O}{v_e}\right|_{v_S=0}$, da calcolarsi con ingresso v_S nullo, ossia sul seguente circuito:



Si trova facilmente che

$$B = \frac{\beta + 1}{R_S + r_\pi} + 1 + \frac{r_O}{R_E}$$

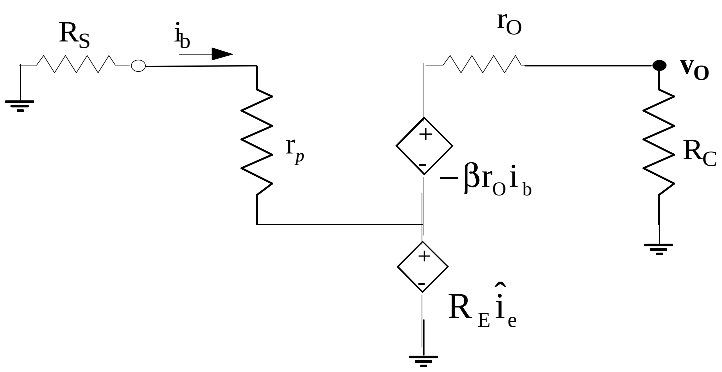
Passiamo adesso al parametro $C = \left.\frac{i_e}{v_S}\right|_{R_E=0}$, da calcolarsi sullo stesso circuito usato per il calcolo di A. Conviene, tuttavia, utilizzare l'equivalente di Thevenin del parallelo tra il generatore pilotato di corrente e la r_O:



Abbiamo che

$$C=\frac{i_e}{v_S}=\frac{i_b+\dfrac{\beta r_O i_b}{r_O+R_C}}{v_S}=\frac{\left(1+\dfrac{\beta r_O}{r_O+R_C}\right)\dfrac{v_S}{R_S+r_\pi}}{v_S}=\left(1+\frac{\beta r_O}{r_O+R_C}\right)\frac{1}{R_S+r_\pi}$$

Infine, calcoliamo $D=\left.\dfrac{i_e}{v_e}\right|_{v_S=0}$ sullo stesso circuito usato per il calcolo di B, usando però ancora una volta l'equivalente di Thevenin del parallelo tra il generatore di corrente e la r_O:



Abbiamo che

$$D=\frac{i_e}{v_e}=\frac{i_b+\dfrac{\beta r_O i_b-v_e}{r_O+R_C}}{v_e}=\frac{\left(1+\dfrac{\beta r_O}{r_O+R_C}\right)i_b+\dfrac{v_e}{r_O+R_C}}{v_e}=\frac{\left(1+\dfrac{\beta r_O}{r_O+R_C}\right)\dfrac{v_e}{r_\pi+R_S}+\dfrac{v_e}{r_O+R_C}}{v_e}=$$

$$=\left(1+\frac{\beta r_O}{r_O+R_C}\right)\frac{1}{r_\pi+R_S}+\frac{1}{r_O+R_C}=\frac{(\beta+1)r_O+R_C+r_\pi+R_S}{(r_O+R_C)(r_\pi+R_S)}$$

Ripetiamo adesso il procedimento applicando l'altra formula $A_f=A\dfrac{1+\theta_O}{1+\theta_i}$.

Avendo già calcolato A, dobbiamo calcolare i due rapporti di ritorno.

Cominciamo dal rapporto di ritorno con ingresso nullo, definito analiticamente come

$$\theta_i=-\left.\frac{x_i}{\hat{x}_i}\right|_{x_S=0}=-\left.\frac{i_e}{\hat{i}_e}\right|_{v_S=0}$$

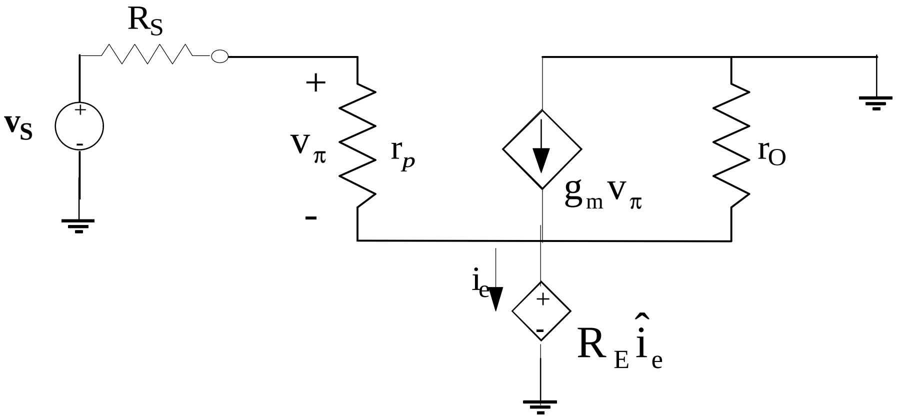
Il circuito su cui ragionare è lo stesso usato per il calcolo di D: si trova che

$$\theta_i=\frac{(\beta+1)R_E r_O+R_E(R_C+r_\pi+R_S)}{(r_O+R_C)(r_\pi+R_S)}=\frac{(\beta+1)R_E}{r_\pi+R_S}\,\frac{r_O+\dfrac{R_C+r_\pi+R_S}{\beta+1}}{r_O+R_C}$$

Passiamo adesso al calcolo del rapporto di ritorno con uscita nulla:

$$\theta_O = -\left.\frac{x_i}{\hat{x}_i}\right|_{x_O=0} = -\left.\frac{i_e}{\hat{i}_e}\right|_{v_O=0}$$

Se l'uscita è nulla, possiamo escludere la R_C, la quale non è attraversata da corrente in quanto è in cortocircuito virtuale, per cui il circuito su cui ragionare è il seguente:



Abbiamo in questo caso che

$$\theta_O = -\frac{i_e}{\hat{i}_e} = ... = -\frac{R_E}{\beta r_O}$$

In definitiva, abbiamo visto come la funzione di trasferimento A_f possa essere considerata in relazione al particolare parametro (R_E) su cui si fissa l'attenzione:

$$A_f = \frac{-g_m(R_C // r_O)}{R_S + r_\pi} \frac{1 - \frac{R_E}{\beta r_O}}{1 + \frac{(\beta+1)R_E}{r_\pi + R_S} \frac{r_O + \frac{R_C + r_\pi + R_S}{\beta+1}}{r_O + R_C}}$$

Guadagno di feedback in funzione del guadagno asintotico

Nei paragrafi precedenti abbiamo dunque individuato due possibili formulazioni del guadagno di feedback ottenibili con il principio della sovrapposizione degli effetti:

$$A_f = A + \frac{CkB}{1-kD} = A\frac{1+\theta_O}{1+\theta_i}$$

La prima relazione è utile per mettere in evidenza in maniera esplicita l'influenza di un parametro prescelto come critico (cioè il k), mentre la seconda evidenzia la presenza di una eventuale reazione interna (rappresentata da θ_O).

Esiste una ulteriore possibilità, ovviamente equivalente alle precedenti, che fa uso di un nuovo parametro, detto **guadagno asintotico** e indicato con $\mathbf{A}_\infty$, che rappresenta il valore del guadagno che si ottiene facendo tendere ad infinito il parametro di riferimento k e quindi anche il relativo rapporto di ritorno ([2]).

Troviamo dunque la nuova espressione del guadagno di feedback: intanto, possiamo scrivere che

$$A_f = A\frac{1+\theta_O}{1+\theta_i} = A\frac{1}{1+\theta_i} + A\frac{\theta_O}{1+\theta_i}$$

Ricordando inoltre che $\theta_O = \frac{BkC}{A} - kD = \frac{BkC}{A} + \theta_i$, abbiamo che

$$A\theta_O = BkC + \theta_i A = \frac{CB}{-D}\theta_i + \theta_i A = \theta_i\left(A - \frac{CB}{D}\right)$$

D'altra parte, ricordando anche che $A_f = A + \frac{CkB}{1-kD} = A + \frac{CB}{\frac{1}{k} - D}$, osserviamo che, calcolando A_f per $k \to \infty$, si ottiene che

$$A_\infty = \lim_{k\to\infty} A_f = \lim_{k\to\infty}\left(A + \frac{BC}{\frac{1}{k} - D}\right) = A - \frac{BC}{D}$$

Da qui deduciamo che possiamo scrivere che $A\theta_O = \theta_i A_\infty$, in modo da concludere che

$$\boxed{A_f = \frac{A}{1+\theta_i} + \frac{A_\infty \theta_i}{1+\theta_i}}$$

Questo è dunque il terzo modo di esprimere il guadagno di feedback ottenuto mediante l'applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti: in pratica, si tratta di esprimere A_f in funzione del trasferimento diretto ottenuto per k=0 (ossia $\theta_i \to 0$) e del guadagno asintotico ottenuto per $k \to \infty$ (ossia $\theta_i \to \infty$).

Quella relazione dice in pratica che il valore di A_f si trova "a metà strada" tra il guadagno A della rete morta (che si ottiene quando $\theta_i=0$) ed il guadagno asintotico (che si ottiene quando $\theta_i \to \infty$): quanto più grande è il rapporto di ritorno con ingresso nullo, tanto più A_f tende al valore asintotico A_∞.

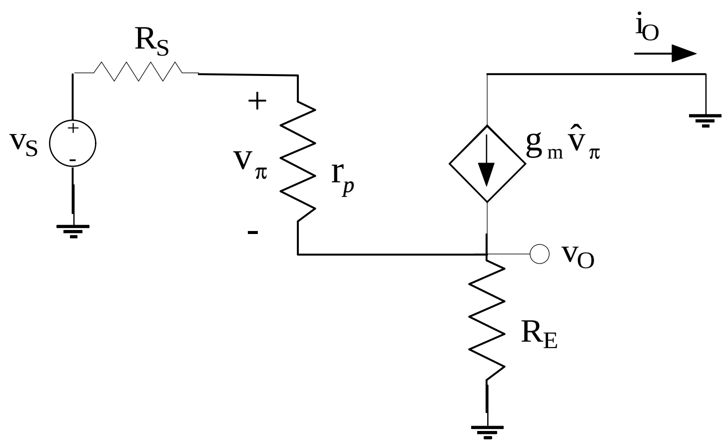
Inoltre, è facile rendersi conto che, *quando* q_i®¥, *alla condizione* A_f®$A_¥$ *corrisponde, per valori finiti dell'ingresso* x_S, *la condizione* x_i®*0:* infatti, ricordando che $x_i = Cx_S + Dx_g = Cx_S + Dkx_i$, otteniamo che $x_i = \frac{C}{1-kD}x_S$, per cui, se $k \to \infty$, con x_S finito deve necessariamente risultare $x_i=0$, ossia una condizione di **cortocircuito virtuale** della tensione pilota dell'amplificatore.

[2] E' importante sottolineare ancora una volta che tutte le quantità di interesse (A, A_∞, θ_O e θ_i) sono calcolate rispetto allo stesso generatore controllato, che non è detto debba essere necessariamente quello appartenente ad uno dei dispositivi attivi presenti nell'anello di reazione.

Questa può dunque essere assunta come <u>definizione del guadagno asintotico</u>: il *guadagno asintotico è il guadagno dell'amplificatore in condizioni di cortocircuito virtuale della tensione pilota dell'amplificatore stesso.*

Esempio: stadio inseguitore di tensione a BJT

Come esempio di applicazione della formula trovata per Af nel paragrafo precedente, possiamo considerare ancora una volta l'inseguitore di tensione a BJT, il cui circuito equivalente è fatto nel modo seguente:



Volendo applicare la relazione $A_f = \frac{A}{1+\theta_i} + \frac{A_\infty \theta_i}{1+\theta_i}$, dobbiamo calcolare A, A_∞ e θ_i. Nei paragrafi precedenti abbiamo già calcolato il guadagno della rete morta A e il rapporto di ritorno con ingresso nullo θ_i, per cui resta da calcolare A_∞.

Per fare questo calcolo, in base alla definizione vista nel paragrafo precedente, dobbiamo porci in condizioni di cortocircuito virtuale per la tensione pilota dell'amplificatore. Nel nostro caso, dobbiamo dunque ritenere in cortocircuito (virtuale) la r_π: se $v_\pi=0$, non c'è corrente in r_π, per cui non c'è corrente nemmeno in R_S e quindi la tensione di uscita risulta essere pari alla v_S, il che corrisponde a dire che

$$\boxed{A_\infty = \left.\frac{v_O}{v_S}\right|_{v_\pi=0} = 1}$$

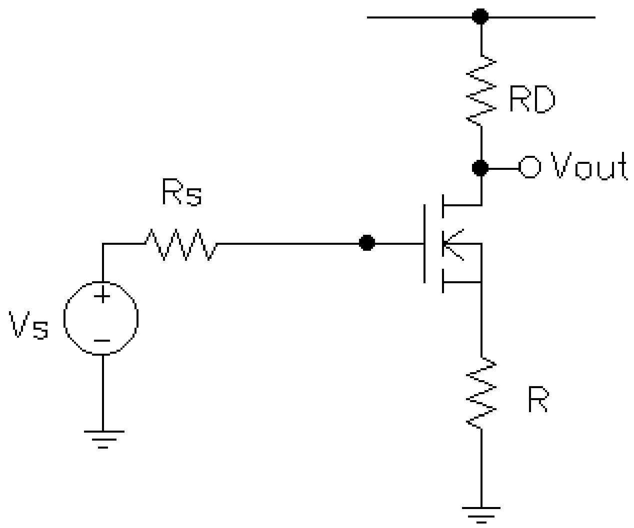
D'altra parte, era ovvio che fosse così, in quanto sappiamo che, in condizioni di cortocircuito virtuale della r_π, l'inseguitore diventa perfetto, ossia appunto $A_\infty=1$: abbiamo cioè una <u>desensibilizzazione totale del circuito rispetto al dispositivo attivo</u>, per cui A_∞ approssima il valore 1/f della rappresentazione a biporta (consentendo tra l'altro un confronto con tale modello) nel caso in cui il rapporto di ritorno θ_1 sia una buona stima del guadagno d'anello T.

In definitiva, *le diverse formulazioni della funzione di trasferimento ad anello chiuso, pur essendo equivalenti, pongono in evidenza aspetti diversi e trovano perciò la loro più idonea applicazione in relazione alle particolari caratteristiche del circuito che si desidera evidenziare:* in particolare, la formula $A_f = A\frac{1+\theta_O}{1+\theta_i}$ viene usata generalmente per il calcolo delle impedenze, mentre l'espressione $A_f = \frac{A}{1+\theta_i} + \frac{A_\infty \theta_i}{1+\theta_i}$ è più idonea alla valutazione della sensibilità alle variazioni di un parametro ritenuto critico ([3]).

E' importante sottolineare, infine, come, *con questo modello, a differenza di quello a biporta, non sia necessario specificare a priori nemmeno l'esistenza o meno di una reazione nel circuito, ma sono i parametri stessi del modello a fornire questa indicazione.*

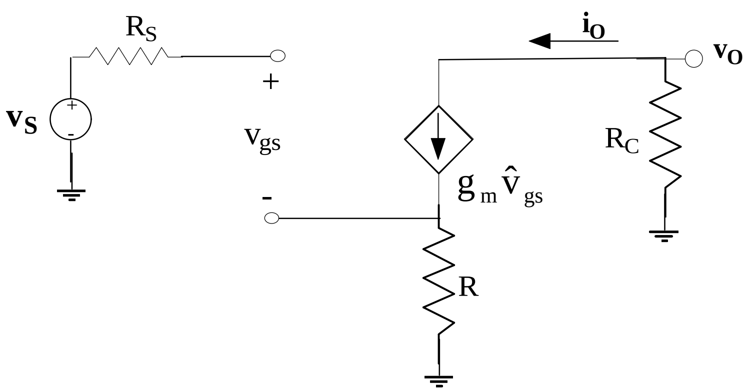
Esempio: stadio invertitore con degenerazione di source

Consideriamo il seguente stadio invertitore con degenerazione realizzato mediante un MOSFET a canale n:



Vogliamo calcolare il guadagno di feedback di questo amplificatore mediante la formula $A_f = \frac{v_O}{v_S} = \frac{A_D}{1+\theta_i} + \frac{A_\infty \theta_i}{1+\theta_i}$.

Consideriamo allora il circuito equivalente per piccoli segnali di questo stadio:



[3] Ad esempio, può essere importante determinare l'intervallo di variazione del guadagno di un amplificatore corrispondente ai due valori estremi del parametro, ossia 0 ed ∞.

Prendiamo, come parametro critico, la transconduttanza g_m, il che equivale a scegliere il generatore pilotato come riferimento per il calcolo del guadagno asintotico e del rapporto di ritorno.

Cominciamo dal calcolo del guadagno della rete morta:

$$A_D = \left.\frac{x_O}{x_S}\right|_{x_g=0} = \left.\frac{v_O}{v_S}\right|_{g_m\hat{v}_{gs}=0}$$

Si osserva immediatamente che, se $g_m\hat{v}_{gs}=0$, risulta anche $v_O=0$ e quindi $A_D=0$.

L'espressione del guadagno di feedback si semplifica dunque nel modo seguente:

$$A_f = \frac{A_\infty \theta_i}{1+\theta_i}$$

Passiamo al guadagno asintotico:

$$A_\infty = \left.\frac{x_O}{x_S}\right|_{x_i=0} = \left.\frac{v_O}{v_S}\right|_{v_{gs}=0}$$

Quando $v_{gs}=0$, è evidente che la tensione di source del MOSFET (cioè la tensione ai capi di R) coincide con la tensione forzante v_S, per cui

$$A_\infty = \frac{v_O}{v_S} = \frac{-R_D\dfrac{v_S}{R}}{v_S} = -\frac{R_D}{R}$$

Infine, dobbiamo calcolare il rapporto di ritorno con ingresso nullo, ossia

$$\theta_i = -\left.\frac{x_i}{\hat{x}_i}\right|_{x_S=0} = -\left.\frac{v_{gs}}{\hat{v}_{gs}}\right|_{v_S=0}$$

Se l'ingresso è nullo, la tensione di gate è anch'essa nulla, per cui la tensione v_{gs} corrisponde alla tensione di source, ossia alla tensione ai capi di R, per cui

$$\theta_i = -\frac{v_{gs}}{\hat{v}_{gs}} = -\frac{-v_S}{\hat{v}_{gs}} = \frac{Rg_m\hat{v}_{gs}}{\hat{v}_{gs}} = Rg_m$$

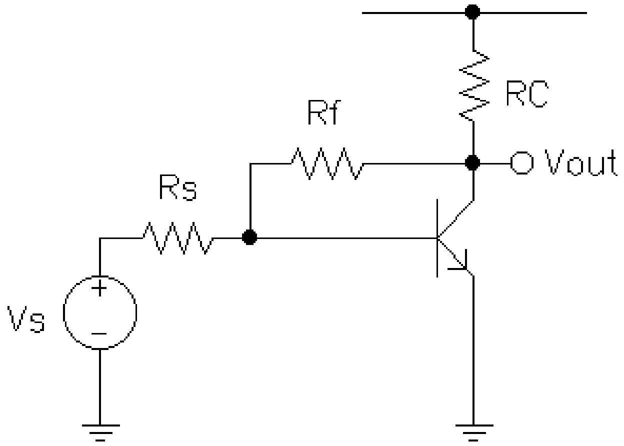
Possiamo allora concludere che il guadagno di feedback ha la seguente espressione:

$$A_f = \frac{A_\infty \theta_i}{1+\theta_i} = \frac{\left(-\dfrac{R_D}{R}\right)Rg_m}{1+Rg_m} = -\frac{R_D g_m}{1+Rg_m}$$

Questa è l'espressione (esatta) del guadagno dell'amplificatore.

Esempio: stadio invertitore a BJT con reazione base-collettore

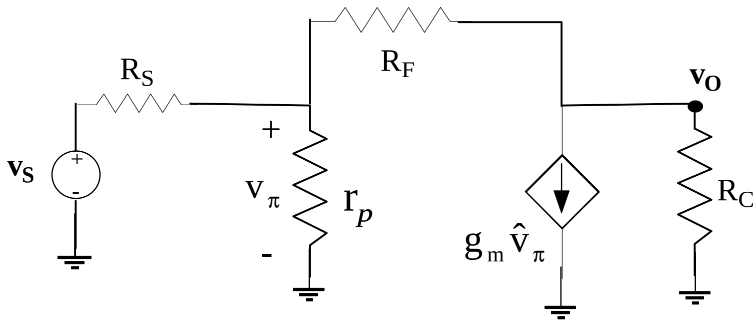
Consideriamo ancora una volta uno stadio ad emettitore avente una resistenza di reazione situata tra la base ed il collettore:



Vogliamo anche qui ricavare il guadagno di feedback mediante la relazione

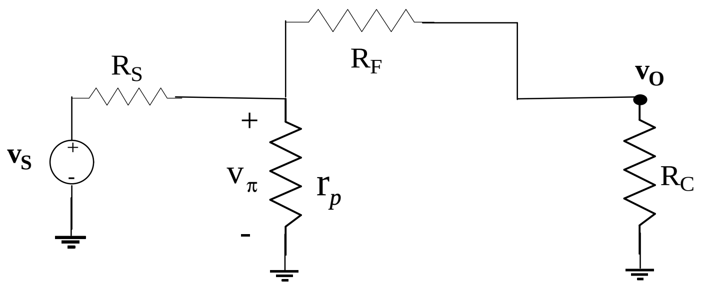
$$A_f = \frac{v_O}{v_S} = \frac{A}{1+\theta_i} + \frac{A_\infty \theta_i}{1+\theta_i}$$

Consideriamo perciò il circuito equivalente incrementale dell'amplificatore (trascurando per semplicità la resistenza di uscita r_O del transistor):



Prendiamo ancora una volta come parametro critico la transconduttanza g_m, il che equivale a scegliere il generatore pilotato come riferimento per il calcolo del guadagno asintotico e del rapporto di ritorno.

Cominciamo dal guadagno della rete morta $A_D = \left.\frac{x_O}{x_S}\right|_{x_g=0} = \left.\frac{v_O}{v_S}\right|_{g_m\hat{v}_\pi=0}$, da effettuarsi sul circuito seguente:



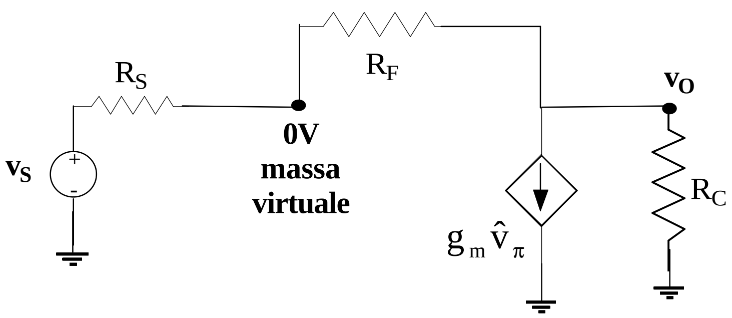
Se il generatore pilotato è spento, la R_C va in serie alla R_F e la resistenza R_C+R_F va in parallelo alla r_π, di modo che la resistenza $(R_C+R_F)//r_\pi$ vada a sua volta in serie ad R_S. Applicando allora due volte il partitore di tensione, abbiamo che

$$v_\pi = \frac{(R_C+R_F)//r_\pi}{R_S+(R_C+R_F)//r_\pi} v_S \longrightarrow v_O = \frac{R_C}{R_C+R_F} v_\pi = \frac{R_C}{R_C+R_F}\frac{(R_C+R_F)//r_\pi}{R_S+(R_C+R_F)//r_\pi} v_S$$

da cui ricaviamo che

$$A = \frac{R_C}{R_C+R_F}\frac{(R_C+R_F)//r_\pi}{R_S+(R_C+R_F)//r_\pi}$$

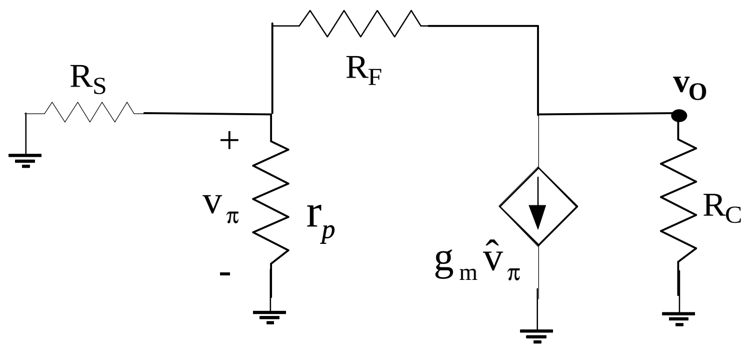
Passiamo al guadagno asintotico $A_\infty = \left.\frac{x_O}{x_S}\right|_{x_i=0} = \left.\frac{v_O}{v_S}\right|_{v_\pi=0}$:



Se $v_\pi=0$ (cortocircuito virtuale della r_π), non c'è corrente in r_π, per cui il terminale di base si trova a massa virtuale: allora, la tensione ai capi di R_F è v_O, per cui la corrente (diretta verso sinistra) è $i_{RF} = \frac{v_O}{R_F}$; questa stessa corrente, dato che non c'è corrente in r_π, scorre anche in R_S, per cui la tensione ai capi di tale resistenza è $v_{RS} = R_S \frac{v_O}{R_F}$; d'altra parte, questa stessa tensione è anche pari a $-v_S$, per cui

$$-v_S = R_S \frac{v_O}{R_F} \longrightarrow A = \frac{v_O}{v_S} = -\frac{R_F}{R_S}$$

Infine, dobbiamo calcolare il rapporto di ritorno con ingresso nullo, ossia $\theta_i = -\left.\frac{x_i}{\hat{x}_i}\right|_{x_S=0} = -\left.\frac{v_\pi}{\hat{v}_\pi}\right|_{v_S=0}$:



Se l'ingresso è nullo, R_S ed r_π sono in parallelo, la resistenza R_S+r_π è in serie ad R_F e quindi la resistenza $(R_S // r_\pi)+R_F$ è a sua volta in parallelo alla R_C, per cui

$$\theta_i = -\frac{v_\pi}{\hat{v}_\pi} = -\frac{1}{\hat{v}_\pi}\left[\frac{R_C(R_S // r_\pi)}{R_C + R_F + (R_S // r_\pi)}(-g_m \hat{v}_\pi)\right] = \frac{g_m R_C (R_S // r_\pi)}{R_C + R_F + (R_S // r_\pi)}$$

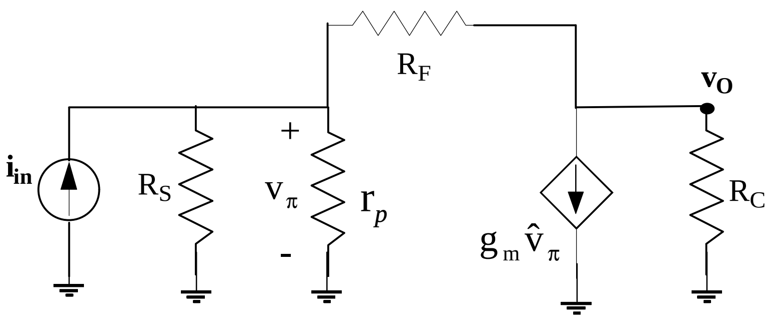
Possiamo allora concludere che il guadagno di feedback ha la seguente espressione:

$$A_f = \frac{A_\infty \theta_i}{1+\theta_i} = \frac{\left(-\frac{R_F}{R_S}\right)\frac{g_m R_C (R_S // r_\pi)}{R_C + R_F + (R_S // r_\pi)}}{1 + \frac{g_m R_C (R_S // r_\pi)}{R_C + R_F + (R_S // r_\pi)}} = \frac{-g_m R_C R_F \frac{r_\pi}{R_S + r_\pi}}{R_C + R_F + (1 + g_m R_C)(R_S // r_\pi)}$$

Note sulla resistenza interna del generatore forzante

Consideriamo ancora l'esempio appena analizzato dello stadio invertitore a BJT con reazione base-collettore. In particolare, facciamo l'ipotesi che l'ingresso forzante dello stadio sia un generatore di corrente i_{in} con resistenza di Norton R_S.

Il circuito equivalente per piccoli segnali è il seguente:



Supponiamo adesso che $R_S \rightarrow \infty$: ci chiediamo come cambiano i valori di θ_i e di A_∞.

Per quanto riguarda il rapporto di ritorno con ingresso nullo, ci basta riprendere l'espressione trovata nel paragrafo precedente e vedere come cambia per $R_S \to \infty$:

$$\theta_i = \frac{g_m R_C (R_S // r_\pi)}{R_C + R_F + (R_S // r_\pi)} \xrightarrow{R_S \to \infty} \frac{g_m R_C r_\pi}{R_C + R_F + r_\pi} = \frac{\beta R_C}{R_C + R_F + r_\pi}$$

Passiamo al guadagno asintotico A_∞ , che si ottiene per $\theta_i \to \infty$, ossia per $v_\pi \to 0$ e $i_b \to 0$: se $v_\pi = 0$ (cortocircuito virtuale della r_π), non c'è corrente in r_π, per cui la corrente di ingresso i_{in} fluisce interamente in R_F, ai capi della quale è localizzata la tensione di uscita v_O: risulta perciò $\frac{v_O}{R_F} = -i_{in}$, da cui segue che $A_\infty = \frac{v_O}{i_{in}} = -R_F$. Il risultato è dunque un guadagno in transresistenza, mentre non è più possibile definire un guadagno asintotico di tensione come invece avevamo fatto prima supponendo R_S finita.

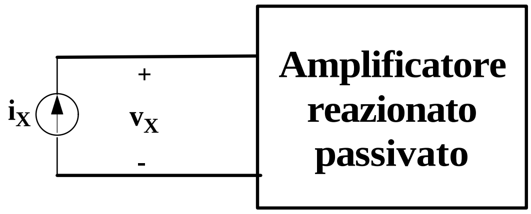
Formula bi Blackman

Introduzione

Il calcolo del guadagno di feedback mediante l'applicazione del *principio di sovrapposizione degli effetti* ha portato alle seguenti tre distinte formule:

$$A_f = \frac{v_O}{v_S} = A + \frac{CkB}{1-kD} = A\frac{1+\theta_O}{1+\theta_i} = \frac{A}{1+\theta_i} + \frac{A_\infty \theta_i}{1+\theta_i}$$

Questo stesso metodo consente anche di calcolare le impedenze (di ingresso e di uscita) di un amplificatore in anello chiuso. Consideriamo, infatti, l'amplificatore reazionato come schematizzato nella figura seguente:



L'impedenza vista da una qualsiasi porta dell'amplificatore reazionato non è altro che il rapporto tra la tensione v_X e la corrente i_X alla stessa porta. Quindi, eccitando in corrente tale porta, il nostro scopo diventa quello di determinare la funzione di trasferimento $R_f=v_X/i_X$ e questa determinazione può essere fatta tramite delle formule del tutto analoghe a quelle usate per il calcolo del guadagno di feedback, che è a sua volta una funzione di trasferimento del sistema:

$$Z_{if} = \left(\frac{v_S}{i_S}\right)_{IN} = Z_{iD}\frac{1+\theta_O}{1+\theta_i}$$

$$Z_{of} = \left(\frac{v_S}{i_S}\right)_{OUT} = Z_{oD}\frac{1+\theta_O}{1+\theta_i}$$

Naturalmente, dobbiamo intenderci sul significato dei *rapporti di ritorno* che compaiono in queste formule: infatti, essendo, in entrambi i casi, la funzione di trasferimento in esame un rapporto di tensione e di corrente agli stessi terminali, θ_i e θ_O vanno valutati, con riferimento alla porta considerata, imponendo, rispettivamente, una condizione di corrente nulla e una condizione di tensione nulla (cioè un cortocircuito virtuale) e sono perciò denotati, rispettivamente, con $\boldsymbol{\theta_{oc}}$ (rapporto di ritorno dove "oc" sta per *open circuit*) e con $\boldsymbol{\theta_{sc}}$ (dove "sc" sta per *short circuit*):

$$\boxed{\begin{array}{l} Z_{if} = Z_{iD} \dfrac{1+\theta_{sc}}{1+\theta_{oc}} \\ Z_{of} = Z_{oD} \dfrac{1+\theta_{sc}}{1+\theta_{oc}} \end{array}}$$

E' interessante notare che, nella valutazione di θ_{OC}, l'unico modo per ottenere v_X nulla è quello di imporre che anche i_X sia nulla, per cui non occorre calcolare alcun particolare valore da assegnare ad i_X.

Sempre in analogia a quanto fatto per il calcolo del guadagno di feedback, possiamo esprimere le impedenze di ingresso e di uscita anche in altro modo:

$$Z_f = \frac{v_S}{i_S} = Z_D + \frac{CkB}{1-kD}$$

dove non abbiamo usato i pedici "i" ed "o" per evidenziare che <u>questa formula (come del resto le precedenti) vale indifferentemente per l'ingresso e per l'uscita</u>.

Se, come di solito accade, il parametro k è quello di un generatore pilotato appartenente al modello incrementale di un dispositivo attivo, si ottiene la cosiddetta **formula di Blackman**; tale formula esprime l'impedenza ad anello chiuso in funzione di due contributi: il primo è la Z_D (**impedenza di ingresso della rete morta**) e si ottiene per k=0, ossia quando si suppone spento il generatore pilotato rispetto al quale si è scelto di applicare il principio di sovrapposizione degli effetti; il secondo contributo è invece legato proprio al suddetto generatore pilotato tramite il parametro k.

Inoltre, è anche possibile utilizzare, per il calcolo dell'impedenza, una formula analoga alla terza formula vista per il calcolo del guadagno di feedback:

$$\boxed{Z_f = \frac{Z_D}{1+\theta_{oc}} + \frac{Z_\infty \theta_{oc}}{1+\theta_{oc}}}$$

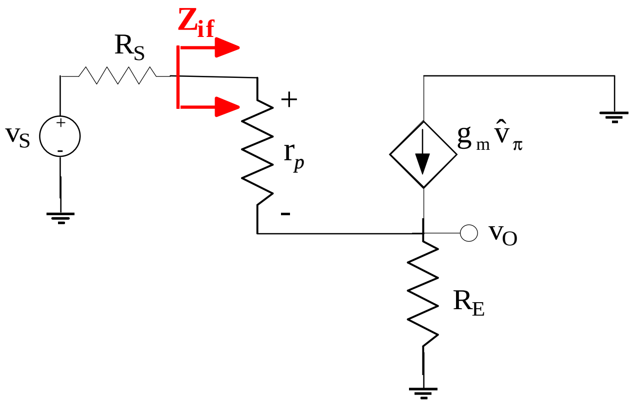
In questa formula, il termine $\mathbf{Z_\infty}$ ha il significato di **impedenza asintotica** (di ingresso o di uscita), ossia dell'impedenza che si ottiene quando $\theta_{OC} \to \infty$.

Quest'ultima formula, oltre ad avere un significato fisico più evidente (in quanto fornisce il valore di Z_f in funzione dei due valori limite Z_D e Z_∞ ottenuti per $\theta_{OC} \to 0$ e $\theta_{OC} \to \infty$), ha il vantaggio di consentire, nel caso delle connessioni di tipo parallelo, una agile valutazione delle impedenze.

Il metodo per ottenere la Z_∞ è quello di imporre un cortocircuito virtuale ai capi dell'elemento circuitale sede delle grandezza elettrica (tensione o corrente) di controllo del generatore pilotato rispetto al quale si calcola θ_{OC}. Questo chiarisce anche che la condizione da imporre in uscita, nel caso di connessione parallelo, per il calcolo di θ_{SC} è un cortocircuito virtuale.

Esempio: inseguitore di tensione a BJT

Consideriamo ancora una volta uno stadio a collettore comune. Partiamo direttamente dal suo circuito equivalente per piccoli segnali:



Vogliamo calcolare la resistenza di ingresso vista dalla resistenza R_S: possiamo allora applicare la formula

$$R_{if} = R_{iD}\frac{1+\theta_{sc}}{1+\theta_{oc}}$$

Cominciamo dal calcolo della resistenza di ingresso della rete morta, definita come

$$\boxed{R_{iD} = R_{if}\Big|_{x_g=0} = R_{if}\Big|_{g_m\hat{v}_\pi=0} = \frac{v_X}{i_X}\Big|_{g_m\hat{v}_\pi=0}}$$

In base alla definizione, dobbiamo calcolare la resistenza vista dal terminale di base del transistor quando il generatore pilotato è spento: se tale generatore pilotato non eroga corrente, è evidente che r_π ed R_E sono in serie, per cui $R_{iD} = r_\pi + R_E$.

Adesso dobbiamo calcolare il rapporto di ritorno con ingresso in cortocircuito:

$$\boxed{\theta_{sc} = -\frac{v_\pi}{\hat{v}_\pi}\Big|_{v_{base}=0}}$$

Se la base si trova a massa virtuale, le resistenze r_π ed R_E sono questa volta in parallelo, sottoposte alla tensione $-v_\pi$ e alimentate dalla corrente $g_m\hat{v}_\pi$: quindi

$$\theta_{sc} = -\frac{1}{\hat{v}_\pi}\left[-g_m\hat{v}_\pi(R_E // r_\pi)\right] = g_m(R_E // r_\pi)$$

Infine dobbiamo calcolare il rapporto di ritorno con ingresso in condizioni di circuito aperto:

$$\boxed{\theta_{oc} = -\left.\frac{v_\pi}{\hat{v}_\pi}\right|_{i_{base}=0}}$$

Se non c'è corrente di base, la resistenza r_π non è attraversata da corrente, per cui la tensione ai suoi capi è $v_\pi=0$ e quindi risulta $\theta_{oc}=0$.

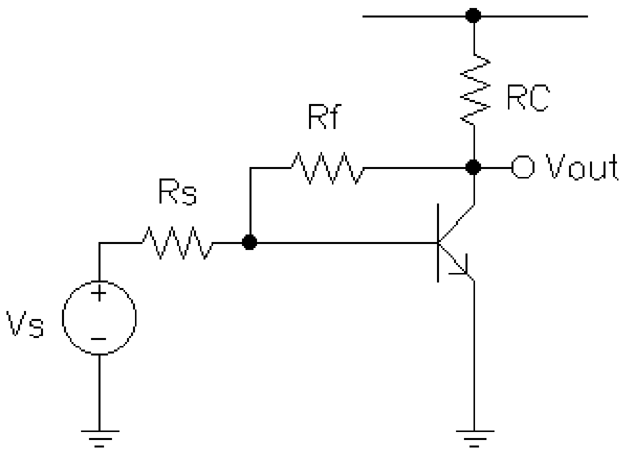
In conclusione, possiamo scrivere che

$$R_{if} = R_{iD}(1+\theta_{sc}) = (r_\pi + R_E)[1+g_m(R_E // r_\pi)] = ... = r_\pi + (\beta+1)R_E$$

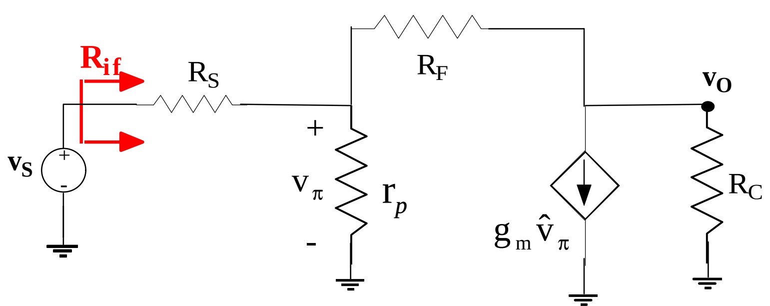
Come si osserva, il calcolo di questa impedenza è stato estremamente semplice ed è opportuno sottolineare come questa semplicità si conservi anche nel caso di circuiti più complessi.

Esempio: stadio invertitore con reazione base-collettore

Consideriamo ancora una volta uno stadio ad emettitore comune con reazione tra la base ed il collettore:



Il circuito equivalente per piccolo segnale è il seguente:



Vogliamo qui calcolare la resistenza di ingresso vista dalla generatore v_S: proviamo ancora una volta ad applicare la formula

$$R_{if} = R_{iD}\frac{1+\theta_{sc}}{1+\theta_{oc}}$$

Cominciamo dalla resistenza di ingresso della rete morta $R_{iD} = \left.\frac{v_S}{i_S}\right|_{g_m\hat{v}_\pi = 0}$, ossia la resistenza vista dal generatore forzante quando il generatore pilotato è spento: se tale generatore non eroga corrente, è evidente che R_C ed R_F sono in serie, che la resistenza R_C+R_F è in parallelo alla r_π e che il tutto è a sua volta in serie alla R_S, per cui

$$R_{iD} = \left[(R_C + R_F) // r_\pi\right] + R_S$$

Adesso dobbiamo calcolare il rapporto di ritorno con ingresso in cortocircuito $\theta_{sc} = -\left.\frac{v_\pi}{\hat{v}_\pi}\right|_{v_S=0}$: è evidente che, se il generatore forzante è cortocircuitato, la R_S è in parallelo alla r_π (sottoposte entrambe alla v_π), per cui

$$\theta_{sc} = -\frac{1}{\hat{v}_\pi}\left[-g_m\hat{v}_\pi \frac{R_C(R_S // r_\pi)}{R_C + R_F + (R_S // r_\pi)}\right] = g_m \frac{R_C(R_S // r_\pi)}{R_C + R_F + (R_S // r_\pi)}$$

Infine dobbiamo calcolare il rapporto di ritorno con ingresso in condizioni di circuito aperto $\theta_{oc} = -\left.\frac{v_\pi}{\hat{v}_\pi}\right|_{i_S=0}$: se la corrente in R_S è nulla, il generatore pilotato alimenta il parallelo tra la R_C e la serie tra R_F ed r_π, per cui

$$\theta_{oc} = -\frac{1}{\hat{v}_\pi}\left[-g_m\hat{v}_\pi \frac{R_C r_\pi}{R_C + r_\pi + R_F}\right] = g_m \frac{R_C r_\pi}{R_C + r_\pi + R_F} = \frac{\beta R_C}{R_C + r_\pi + R_F}$$

In conclusione, possiamo scrivere che

$$R_{if} = R_{iD}\frac{1+\theta_{sc}}{1+\theta_{oc}} = \left[((R_C + R_F) // r_\pi) + R_S\right]\frac{1 + g_m \dfrac{R_C(R_S // r_\pi)}{R_C + R_F + (R_S // r_\pi)}}{1 + \dfrac{\beta R_C}{R_C + r_\pi + R_F}}$$

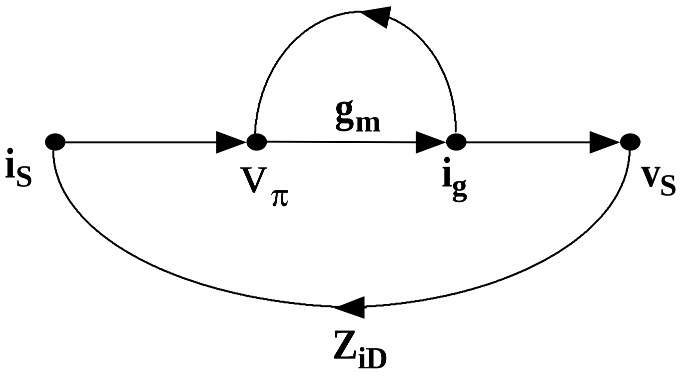
Possiamo adesso fare alcune interessanti osservazioni:

- la prima è che i passaggi appena effettuati hanno portato ad una espressione abbastanza complicata (che comunque può essere riarrangiata e semplificata) per via del fatto di aver scelto la sezione a monte della R_S; avremmo invece trovato risultati più semplici se avessimo considerato la sezione a valle della R_S (come nell'esempio precedente): in particolare, avremmo trovato $\theta_{sc}=0$, in quanto, ponendo la base a massa virtuale, avremmo avuto $v_\pi=0$;

- la seconda osservazione è che avremmo potuto anche utilizzare la formula $R_{if} = \frac{R_{iD}}{1+\theta_{oc}} + \frac{R_{i\infty}\theta_{oc}}{1+\theta_{oc}}$; avendo già calcolato R_{iD} e θ_{oc}, sarebbe rimasto da calcolare $R_{i\infty}$, ossia la resistenza vista a monte di R_S quando la variabile pilota del generatore controllato va a zero: evidentemente, se $v_\pi=0$ (cortocircuito virtuale della r_π), risulta $R_{i\infty}=R_S$, per cui

$$R_{if} = \frac{\left[(R_C + R_F)//r_\pi\right] + R_S + R_S\left(\frac{\beta R_C}{R_C + r_\pi + R_F}\right)}{1 + \frac{\beta R_C}{R_C + r_\pi + R_F}}$$

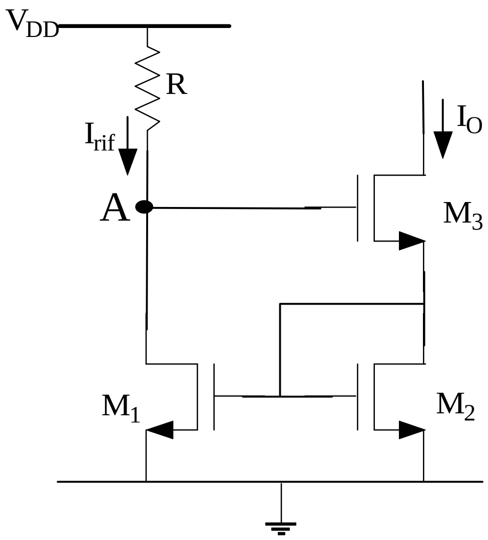
- infine, facciamo notare che il calcolo appena effettuato della impedenza di ingresso si basa su un grafo diverso da quello impiegato a suo tempo per il calcolo del guadagno di feedback e questo a causa del fatto che, in questo caso, stiamo facendo riferimento ad una funzione di trasferimento del tipo v_S/i_S. Il grafo che abbiamo implicitamente considerato in questo caso è il seguente:



Ricordiamo inoltre che, se avessimo calcolato (come già fatto in precedenza) la resistenza di ingresso (ad anello chiuso) mediante l'analisi classica tramite doppi bipoli, avremmo trovato una espressione di R_{if} in funzione della R_I, ossia della resistenza di ingresso ad anello aperto. Questo per dire che *la formula di Blackman fornisce una indicazione concettualmente diversa da quella ottenuta tramite l'approccio con i doppi bipoli, nonostante ovviamente il risultato finale sia sempre lo stesso.*

Esempio: resistenza di uscita dello specchio di Wilson

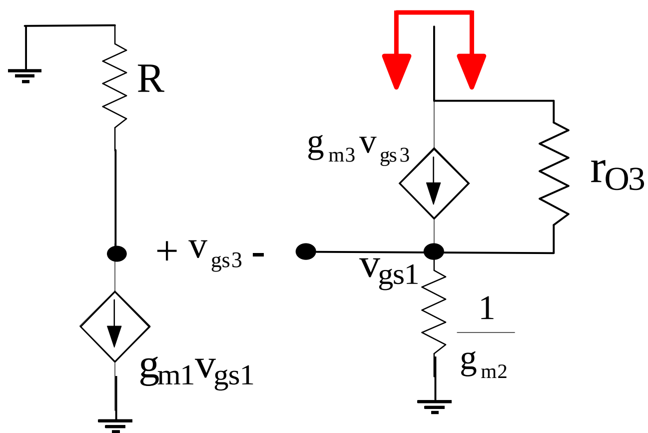
Consideriamo nuovamente lo specchio di Wilson, ad esempio nella versione MOS:



Vogliamo calcolare la resistenza di uscita di questo specchio usando la formula di Blackman:

$$R_{if} = R_{iD} \frac{1+\theta_{sc}}{1+\theta_{oc}}$$

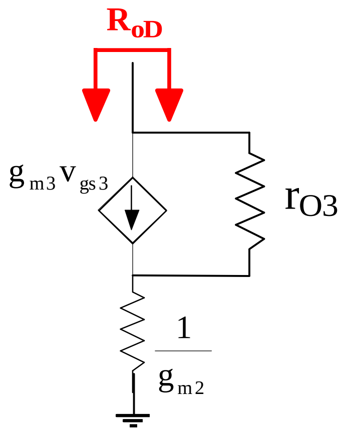
Consideriamo allora il circuito equivalente dello specchio: per quanto riguarda M1, possiamo trascurare la resistenza di uscita, per cui esso si riduce semplicemente al generatore pilotato $g_{m1}v_{gs1}$; per quanto riguarda M2, connesso a diodo, esso si riduce alla resistenza $1/g_{m2}$; infine, per quanto riguarda M3, dobbiamo considerare anche la resistenza di uscita r_{O3}, per cui deduciamo che il circuito è fatto nel modo seguente:



Per applicare la formula di Blackman, ossia per applicare il principio di sovrapposizione, dobbiamo per prima cosa scegliere il generatore controllato di riferimento per il calcolo dei rapporti di ritorno: abbiamo evidentemente due possibilità (M1 ed M3), ma conviene senz'altro scegliere quello appartenente ad M1, in quanto questo transistor non presenta reazione locale.

Fatta questa scelta (che comporta, formalmente, che la forma d'onda del generatore diventi $g_{m1}\hat{v}_{gs1}$ al posto di $g_{m1}v_{gs1}$), possiamo applicare la formula.

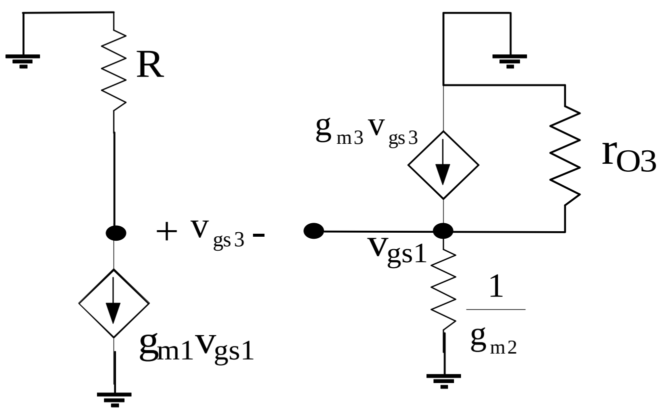
Cominciamo dalla resistenza di ingresso della rete morta $R_{oD} = \left.\frac{v_X}{i_X}\right|_{g_{m1}\hat{v}_{gs1}=0}$, ossia la resistenza vista dal morsetto di uscita quando $g_{m1}\hat{v}_{gs1} = 0$: se il generatore $g_{m1}\hat{v}_{gs1}$ non eroga corrente, è evidentemente nulla la tensione v_{g3} ai capi di R, per cui la resistenza dal calcolare è quella di uno specchio di Widlar.



Abbiamo dunque che

$$R_{oD} = r_{O3}\left(1+g_{m3}\left(\frac{1}{g_{m2}}\right)\right)+\frac{1}{g_{m2}} = 2r_{O3}+\frac{1}{g_{m2}}$$

Adesso dobbiamo calcolare il rapporto di ritorno con uscita in cortocircuito $\theta_{sc} = -\left.\frac{v_{gs1}}{\hat{v}_{gs1}}\right|_{v_{out}=0}$:



Si osserva allora che r_{O3} ed $1/g_{m2}$ sono in parallelo, alla tensione v_{gs1} e alimentate dalla corrente $g_{m3}v_{gs3}$, per cui

$$v_{gs1} = g_{m3}v_{gs3}\left(r_{O3} // \frac{1}{g_{m2}}\right) = g_{m3}\left(-g_{m1}R\hat{v}_{gs1} - v_{gs1}\right)\left(r_{O3} // \frac{1}{g_{m2}}\right)$$

Da qui ricaviamo che

$$v_{gs1}=\frac{-g_{m3}g_{m1}R\left(r_{O3}//\frac{1}{g_{m2}}\right)}{1+g_{m3}\left(r_{O3}//\frac{1}{g_{m2}}\right)}\hat{v}_{gs1}\longrightarrow\theta_{sc}=-\frac{v_{gs1}}{\hat{v}_{gs1}}=\frac{g_{m3}g_{m1}R\left(r_{O3}//\frac{1}{g_{m2}}\right)}{1+g_{m3}\left(r_{O3}//\frac{1}{g_{m2}}\right)}=\ldots=\frac{g_m R r_O}{\frac{1}{g_m}+2r_O}$$

Infine dobbiamo calcolare il rapporto di ritorno con uscita in condizioni di circuito aperto $\theta_{oc}=-\left.\frac{v_{gs1}}{\hat{v}_{gs1}}\right|_{i_{out}=0}$: se la corrente di uscita è nulla, non c'è corrente in $1/g_{m2}$, per cui è nulla la tensione v_{gs1} e quindi $\theta_{oc}=0$.

In conclusione, possiamo scrivere che

$$R_{of}=R_{oD}\frac{1+\theta_{sc}}{1+\theta_{oc}}=R_{oD}(1+\theta_{sc})=\left(2r_O+\frac{1}{g_m}\right)\left(1+\frac{g_m R r_O}{\frac{1}{g_m}+2r_O}\right)$$

Autore: **Sandro Petrizzelli**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry