

# Appunti di Elettronica

## Capitolo 16 – parte II

### Analisi in frequenza

<i>Richiami sulla funzione di trasferimento di un circuito</i> .....	1
<i>Stadio ad emettitore comune</i> .....	2
Effetto Miller sulla capacità $C_{\pi}$ .....	7
Esempio .....	10
<i>Stadio a source comune</i> .....	12
<i>Stadio inseguitore di tensione a BJT</i> .....	15
Impedenze di ingresso e di uscita .....	19
<i>Stadio inseguitore di corrente a BJT</i> .....	22
<i>Stadio cascode</i> .....	25
<i>Stadio differenziale</i> .....	26

### **Richiami sulla funzione di trasferimento di un circuito**

Per individuare la funzione di trasferimento di un circuito si dovrebbe procedere, in generale, con i seguenti passi:

- risolvere il circuito equivalente nel *dominio di Laplace*;
- determinare la funzione di trasferimento desiderata, ad esempio un guadagno di tensione nella forma  $A_v(s) = \frac{v_o(s)}{v_i(s)}$ ;
- utilizzare il *teorema di risposta armonica* per determinare l'andamento di  $A_v(s)$ , in condizioni di regime, al variare della frequenza.

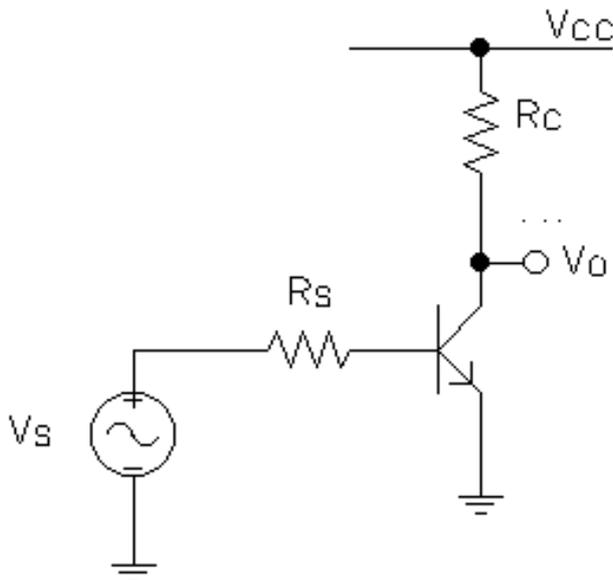
Questo procedimento, assolutamente rigoroso, fornisce risultati esatti, ma ha il grande svantaggio di richiedere una notevole quantità di calcoli, per cui si mostra quasi sempre inadatto allo studio dei circuiti senza l'ausilio del calcolatore.

In particolare, questo svantaggio emerge chiaramente quando l'unico scopo dell'analisi è quello di individuare la frequenza di taglio del circuito in esame: infatti, se è vero che, con il procedimento rigoroso, si trovano tutti gli zeri e tutti i poli del circuito, è anche vero che, per il progetto degli amplificatori, si è generalmente interessati solo ai primi due poli in alta frequenza, mentre tutti gli altri poli e zeri praticamente non interessano. Di conseguenza, è opportuno individuare un metodo che consenta di arrivare, in modo tutto sommato agevole, solo ai risultati di interesse pratico. Tale metodo sarà esposto nei prossimi paragrafi, per lo studio degli stadi elementari a singolo transistor.

## Stadio ad emettitore comune

Nei precedenti paragrafi abbiamo individuato le massime *prestazioni intrinseche* di un transistor bipolare, espresse sinteticamente dalla frequenza di transizione  $\omega_T$  e dalla frequenza di taglio superiore  $\omega_H$ . A questo punto, dobbiamo capire se, inserendo il transistor in un circuito più o meno complesso, tale circuito intervenga o meno ad apportare delle modifiche su tali prestazioni intrinseche.

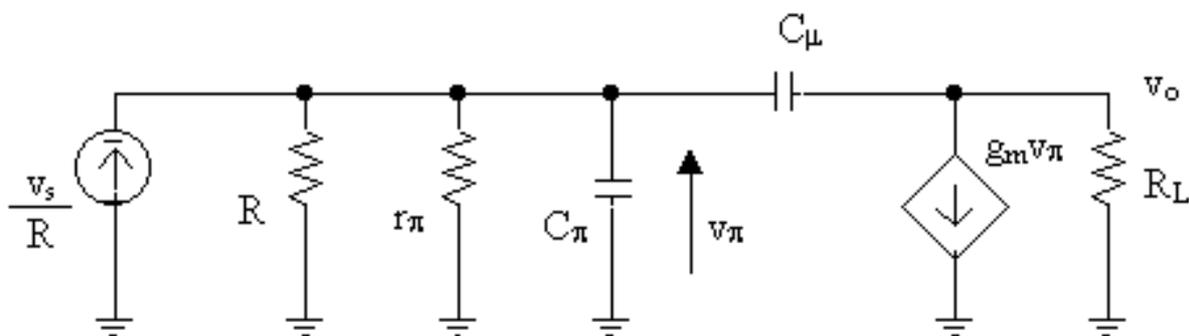
Consideriamo un classico stadio ad emettitore comune come quello della figura seguente:



Il nostro obiettivo è quello di determinare la **frequenza di taglio superiore** di questo circuito, intesa come la frequenza alla quale il guadagno di tensione

$A_v(j\omega) = \frac{v_o}{v_s}(j\omega)$  scende di 3dB rispetto al valore (sempre in dB) che assume in continua (ossia per  $\omega=0$ ).

Il primo passo consiste evidentemente nel determinare l'espressione della funzione  $A_v(j\omega)$ , per cui consideriamo il circuito equivalente per piccoli segnali dello stadio, nel quale dobbiamo includere, dato che stiamo supponendo di lavorare ad alta frequenza, le capacità intrinseche del transistor:



(abbiamo posto  $R_L=R_C//r_o$ )

Per comodità, è stato considerato l'equivalente di Norton del generatore forzante d'ingresso e, inoltre, nella resistenza R è stata inclusa la resistenza intrinseca di base  $r_b$ , che è in serie ad  $R_s$ :

$$R = (R_s + r_b) // r_\pi$$

$$i_s = \frac{v_s}{R_s + r_b}$$

Se scriviamo le relazioni di equilibrio delle correnti ai due nodi del circuito, otteniamo quanto segue (indichiamo le rispettive ammettenze dei resistori con la lettera G):

$$v_s \cdot G - v_\pi \cdot (G + g_\pi) - C_\pi \cdot \frac{dv_s}{dt} + C_\mu \cdot \frac{d(v_o - v_\pi)}{dt} = 0$$

$$-g_m \cdot v_\pi + C_\mu \cdot \frac{d(v_\pi - v_o)}{dt} - v_o \cdot G_L = 0$$

Trasformando le due equazioni con la trasformata di Laplace, si ottiene

$$v_s(s) \cdot G - v_\pi(s) \cdot (G + g_\pi) - sC_\pi v_\pi(s) + sC_\mu v_o(s) - sC_\mu v_\pi(s) = 0$$

$$-g_m \cdot v_\pi(s) + sC_\mu v_\pi(s) - sC_\mu \cdot v_o(s) - v_o(s) \cdot G_L = 0$$

Queste due equazioni possono a loro volta essere riarrangiate nel modo seguente:

$$v_s(s) \cdot G = v_\pi(s) \cdot [G + g_\pi + s \cdot (C_\pi + C_\mu)] - sC_\mu v_o(s)$$

$$0 = v_\pi(s) \cdot [g_m - sC_\mu] + v_o(s) \cdot (G_L + sC_\mu)$$

A questo punto, esprimiamo  $v_\pi$  in funzione di  $v_o$  mediante la seconda equazione e poi sostituiamo nella prima. Otteniamo la seguente equazione:

$$v_s(s) \cdot G = \left[ -v_o(s) \cdot \frac{G_L + sC_\mu}{[g_m - sC_\mu]} \right] \cdot [G + g_\pi + s \cdot (C_\pi + C_\mu)] - sC_\mu v_o(s)$$

Evidenziando a secondo membro la tensione di uscita  $v_o$ , siamo dunque in grado di ricavare il guadagno di tensione:

$$\frac{v_o(s)}{v_s(s)} = \frac{G}{\left[ -\frac{G_L + sC_\mu}{g_m - sC_\mu} \right] \cdot [G + g_\pi + s \cdot (C_\pi + C_\mu)] - sC_\mu}$$

Con qualche semplice manipolazione algebrica, possiamo dunque concludere che

$$A_v(s) = \frac{v_o(s)}{v_s(s)} = -\frac{G \cdot (g_m - sC_\mu) \cdot R_L}{G + g_\pi + s \cdot [C_\pi + C_\mu + C_\mu R_L \cdot (g_m + g_\pi + G)] + C_\mu C_\pi R_L s^2}$$

Abbiamo dunque ottenuto la funzione di trasferimento che ci interessava. Essa si presta a diverse importanti considerazioni.

In primo luogo, essa evidenzia la presenza di un **guadagno statico** (o *guadagno a bassa frequenza*): infatti, sostituendo  $s=0$  (che equivale a  $\omega=0$ ), si ottiene

$$A_{V0} = A_V(s)|_{s=0} = -\frac{g_m R_L R}{R_S + r_b} = -\frac{g_m R_L r_\pi}{R_S + r_b + r_\pi} = -\frac{\beta_0 R_L}{R_S + r_b + r_\pi}$$

Nel caso in cui  $r_\pi$  sia di gran lunga superiore al termine  $R_S + r_b$ , questo guadagno a bassa frequenza assume il classico valore  $-g_m R_L$  da noi sempre utilizzato nell'analisi a centro banda.

In secondo luogo, la funzione  $A_V(s)$  presenta uno zero reale positivo, di valore

$$z = \frac{g_m}{C_\mu}$$

Questo zero tiene conto della trasmissione del segnale direttamente all'uscita attraverso la capacità  $C_\mu$  tra base e collettore.

Si osserva, del resto, che il valore di questo zero è pari a quello, trovato in precedenza, dello zero della funzione  $\beta(s)$  caratteristica del solo BJT: si tratta, perciò, ancora una volta di uno **zero fuori banda**, per cui possiamo con buona approssimazione trascurarlo <sup>(1)</sup>.

Tornando ancora all'espressione di  $A_V(s)$ , si nota anche la presenza di due poli, in quanto il denominatore è una funzione del 2° ordine. Non solo, ma, in base ad una nota proprietà algebrica, osserviamo che, essendo positivi tutti i coefficienti al denominatore, entrambe le soluzioni sono a parte reale negativa: deduciamo, perciò, immediatamente che il sistema presenta due poli entrambi a parte reale negativa.

Ad ogni modo, vediamo di ricavare analiticamente l'espressione di tali poli. Essi corrispondono alle soluzioni della seguente equazione, ricavata uguagliando a zero il denominatore di  $A_V(s)$  (*equazione caratteristica*):

$$1 + s(C_\mu R_L + C_\mu R + C_\pi R + g_m R_L R C_\mu) + s^2 R_L R C_\mu C_\pi = 0$$

Possiamo procedere nel modo seguente: questa equazione può essere posta, indicando genericamente con  $p_1$  e  $p_2$  le sue soluzioni, nella forma

$$\left(1 - \frac{s}{p_1}\right) \left(1 - \frac{s}{p_2}\right) = 0$$

da cui si ricava anche che

$$1 - s \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) + \frac{s^2}{p_1 p_2} = 0$$

<sup>1</sup> Analiticamente, il termine  $C_\mu/g_m$  corrispondente a tale zero è dell'ordine di  $10^{-11}$ , per cui il suo contributo diventa significativo per frequenze più elevate della frequenza di transizione del dispositivo, ossia della frequenza massima alla quale il dispositivo è utile come amplificatore

Normalmente, i due poli  $p_1$  e  $p_2$  risultano molto separati in frequenza: se, allora, indichiamo con  $p_1$  il polo a frequenza più bassa (cioè il cosiddetto **polo dominante**) e con  $p_2$  quello a frequenza più alta, le rispettive frequenze sono  $\omega_{p1} = |p_1| \gg \omega_{p2} = |p_2|$ , per cui possiamo riscrivere quella relazione, con buona approssimazione, nella forma

$$1 - \frac{s}{p_1} + \frac{s^2}{p_1 p_2} = 0$$

Se adesso confrontiamo questa equazione con l'equazione caratteristica riportata prima, osserviamo che entrambe presentano il termine noto pari a +1, per cui possiamo eguagliare i rispettivi coefficienti della potenza di 1° grado e i rispettivi coefficienti della potenza di 2° grado:

$$-\frac{1}{p_1} = C_\mu R_L + C_\mu R + C_\pi R + g_m R_L R C_\mu$$

$$\frac{1}{p_1 p_2} = R_L R C_\mu C_\pi$$

Dalla prima equazione ricaviamo l'espressione del polo dominante e quindi, sostituendo nella seconda, ricaviamo anche l'espressione del secondo polo:

$$p_1 = -\frac{1}{C_\mu [R_L + R(1 + g_m R_L)] + R C_\pi}$$

$$p_2 = \frac{1}{R_L R C_\mu C_\pi} \frac{1}{p_1}$$

L'espressione di  $p_1$  può essere riscritta in modo più opportuno:

$$p_1 = -\frac{1}{R} \frac{1}{C_\mu \left[ \frac{R_L}{R} + (1 + g_m R_L) \right] + C_\pi}$$

$$p_2 = -\left( \frac{1}{R C_\pi} + \frac{1}{R_L C_\pi} + \frac{g_m}{C_\pi} + \frac{1}{R_L C_\mu} \right)$$

Sostituendo infine l'espressione di  $R = (R_s + r_b) // r_\pi$ , otteniamo le espressioni definitive:

$$p_1 = -\frac{1}{R} \frac{1}{C_\mu \left[ \frac{R_L}{(R_s + r_b) // r_\pi} + (1 + g_m R_L) \right] + C_\pi}$$

$$p_2 = -\left( \frac{1}{C_\pi [(R_s + r_b) // r_\pi]} + \frac{1}{R_L C_\pi} + \frac{g_m}{C_\pi} + \frac{1}{R_L C_\mu} \right)$$

A questo punto, partendo dalla funzione di trasferimento del sistema, possiamo ricavare l'espressione analitica della funzione di risposta armonica.

In primo luogo, in base alle considerazioni fatte, la funzione di trasferimento è strutturalmente esprimibile nella forma seguente:

$$A_v(s) = A_{v0} \frac{\left(1 - \frac{s}{z}\right)}{\left(1 - \frac{s}{p_1}\right) \left(1 - \frac{s}{p_2}\right)}$$

Dato che i due poli sono entrambi a parte reale negativa, sappiamo bene che il sistema si definisce asintoticamente stabile. Questa è la condizione necessaria e sufficiente per applicare il **teorema di risposta armonica**, in base al quale la funzione di risposta armonica si ottiene dalla funzione di trasferimento tramite la semplice sostituzione di  $s$  con  $j\omega$ :

$$A_v(j\omega) = A_{v0} \frac{\left(1 - \frac{j\omega}{z}\right)}{\left(1 - \frac{j\omega}{p_1}\right) \left(1 - \frac{j\omega}{p_2}\right)}$$

Il modulo della funzione di risposta armonica ci fornisce il guadagno in tensione del circuito al variare della frequenza.

Inoltre, esso ci consente di calcolare la frequenza di taglio superiore, la quale dovrebbe infatti essere determinata, a rigore, imponendo che  $|A_v(j\omega)|$  sia uguale a  $\frac{A_v(0)}{\sqrt{2}}$  e ricavando la corrispondente frequenza.

Questa operazione, però, anche in un caso semplice come questo, si rivela in realtà inutile: infatti, in genere, per i circuiti si può ritenere lecita la cosiddetta **ipotesi di sistema a polo dominante**, in base alla quale l'unico polo che influisce in maniera rilevante sull'andamento del guadagno è quello a frequenza più bassa ( $p_1$ ), per cui è proprio tale frequenza a poter essere considerata come frequenza di taglio:

$$\omega_h \cong |p_1|$$

dove appunto  $p_1$  è il polo a frequenza più piccola.

In questo caso, possiamo facilmente accorgerci che l'ipotesi di sistema a polo dominante è ampiamente verificata. Infatti, ricordiamo che la frequenza di transizione del transistor bipolare è stata valutata pari a

$$\omega_T = \frac{g_m}{C_\pi + C_\mu}$$

Di conseguenza, possiamo lecitamente trascurare ogni eventuale singolarità (polo o zero che sia) del circuito posta ad una frequenza maggiore di questa. In termini pratici, possiamo trascurare ogni eventuale singolarità posta ad una frequenza  $\omega$  che soddisfa la relazione

$$\omega \ll \omega_T \cong \frac{g_m}{C_\pi}$$

Da qui scaturisce che  $\omega C_\pi \ll g_m$ . Moltiplicando ambo i membri di questa disuguaglianza per  $\omega C_\mu R_L$  si ottiene

$$\omega^2 C_\mu C_\pi R_L \ll \omega C_\mu R_L g_m$$

Confrontando questa disuguaglianza con l'espressione della funzione di trasferimento, deduciamo che può essere trascurato il termine di 2° grado, per cui tale funzione è ben approssimabile con

$$A_v(s) \cong - \frac{G \cdot (g_m - sC_\mu) \cdot R_L}{G + g_\pi + s \cdot [C_\pi + C_\mu + C_\mu R_L \cdot (g_m + g_\pi + G)]}$$

Al denominatore, abbiamo dunque un polinomio del primo grado, la cui soluzione costituisce appunto il polo dominante del sistema, la cui frequenza coincide con la frequenza di taglio superiore.

L'approssimazione a polo dominante può essere in genere fatta, senza commettere un grosso errore, quando il 2° polo dista dal 1° di almeno una decade. In caso contrario si possono ottenere errori non tollerabili.

Del resto, avendo visto prima che è possibile trascurare anche lo zero a numeratore di  $A_v(s)$ , possiamo concludere dicendo che una espressione sicuramente accettabile del guadagno di tensione ad alta frequenza di uno stadio ad emettitore comune è la seguente:

$$A_v(s) \cong - \frac{g_m R_L R}{R_s + r_b} \frac{1}{1 + s(C_\mu R_L + C_\mu R + C_\pi R + g_m R_L R C_\mu)}$$

Questa espressione può in realtà essere scritta in forma più opportuna: sostituendo infatti, dove opportuno, l'espressione  $R = (R_s + r_b) // r_\pi$ , si trova che

$$A_v(s) \cong - \frac{g_m R_L}{R_s + r_b} \frac{1}{\frac{1}{R} + s \left[ C_\pi + C_\mu \left( \frac{R_L}{R} + (1 + g_m R_L) \right) \right]}$$

Ad ogni modo, a prescindere dall'espressione analitica rigorosa di  $A_v(s)$ , quello che è importante sottolineare è che il suo zero è fuori banda, mentre c'è un solo polo (dominante) che determina ovviamente il taglio in alta frequenza: la frequenza del polo coincide con la **frequenza di taglio superiore**.

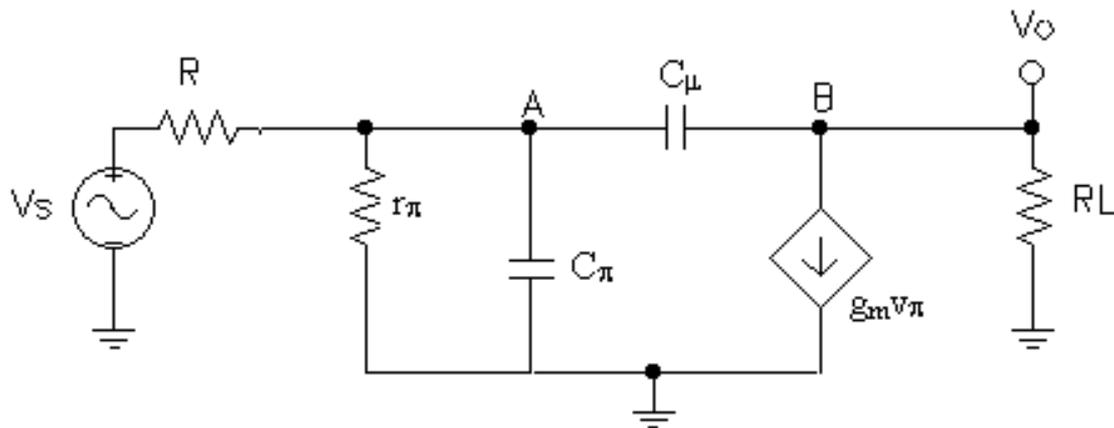
## Effetto Miller sulla capacità $C_\pi$

L'analisi dello stadio ad emettitore comune suggerisce una notevole applicazione del **teorema di Miller** precedentemente esposto. Riprendiamo infatti l'espressione del polo dominante e, in particolare, della frequenza ad esso corrispondente:

$$\omega_H = |p_1| = \frac{1}{R} \frac{1}{C_\mu \left[ \frac{R_L}{R} + (1 + g_m R_L) \right] + C_\pi}$$

E' evidente che questa frequenza è legata alle due capacità  $C_\mu$  e  $C_\pi$ . In particolare, si osserva che la capacità predominante, nella determinazione di  $\omega_H$ , è la  $C_\mu$ , in quanto risulta moltiplicata per un termine di valore abbastanza grande. Ci chiediamo allora perché questo accade fisicamente. La risposta è che *la  $C_\mu$  è sottoposta ad effetto Miller*. Vediamo qualche dettaglio in più.

Consideriamo il circuito equivalente per piccoli segnali dello stadio ad emettitore comune:



La capacità  $C_\mu$  si trova tra due nodi (indicati con A e B nel circuito) tra i quali esiste un guadagno di tensione; di conseguenza, essa è soggetta ad **effetto Miller**. Ciò significa che possiamo studiare il circuito facendo uso della cosiddetta **approssimazione dell'effetto Miller**.

Consideriamo perciò l'impedenza vista dal nodo A guardando verso destra: questa impedenza è pari al rapporto tra la tensione  $v_\pi$  e la corrente che scorre in  $C_\mu$ ; è facile trovare, trascurando in prima approssimazione uno zero in  $g_m/C_\mu$ , che questa impedenza ha espressione

$$Z_{eq}(s) = \frac{1}{(1 + g_m R_L) C_\mu s}$$

Si tratta perciò dell'impedenza associata ad una capacità, che indichiamo con  **$C_M$**  e che prende il nome di **capacità di Miller**:

$$C_M = C_\mu (1 + g_m R_L)$$

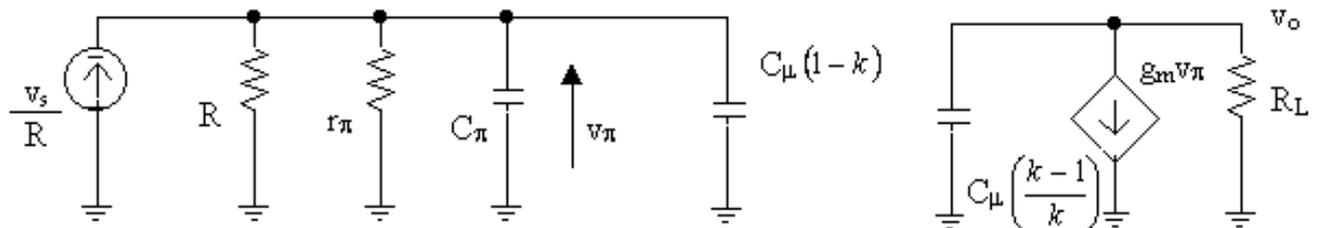
Il termine  $g_m R_L$ , in questa formula, è proprio il guadagno di tensione  $A_V$ , cambiato di segno, tra i nodi di collettore e di base cui la  $C_\mu$  è connessa:

$$C_M = C_\mu (1 - A_V)$$

Dato che questo guadagno è generalmente molto maggiore dell'unità (in modulo), deduciamo che la capacità di Miller è molto maggiore di  $C_\mu$ .

Da un punto di vista fisico, l'origine di questa capacità di Miller è legata proprio al guadagno di tensione del circuito: una piccola tensione  $v_\pi$  di ingresso produce una assai più grande tensione di uscita  $v_o = A_V v_\pi$ , avente però polarità opposta dato che  $A_V < 0$ . La tensione ai capi di  $C_\mu$  è dunque  $(1 + |A_V|)v_\pi$  e, quindi, nel condensatore  $C_\mu$  scorre una corrente molto più grande di quella che si avrebbe in assenza dell'effetto Miller.

A questo punto, facendo uso proprio dell'equivalente di Miller, possiamo disegnare un nuovo circuito adatto al calcolo della funzione di trasferimento e della impedenza di ingresso del circuito:



Per questioni di comodità, abbiamo utilizzato l'equivalente di Norton del generatore forzante ed abbiamo inoltre indicato con  $k$  il guadagno in tensione tra i due nodi a cui è collegata la capacità  $C_\mu$  nel circuito di partenza.

Consideriamo adesso il seguente teorema sulle reti elettriche:

“Dato un circuito costituito da  $N$  parti tra di loro sconnesse ( $N$  può anche essere uguale ad 1), se per ognuna di esse viene scelta una porta e a quella porta viene valutata l'ammettenza (passivando tutti i generatori indipendenti), allora tutte le frequenze che annullano tale ammettenza sono frequenze naturali del circuito” <sup>(2)</sup>

E' importante evidenziare che è opportuno applicare questo teorema quando la singola parte di circuito per la quale si annulla l'ammettenza ha ordine (cioè numero di elementi reattivi) pari ad uno, altrimenti ci si ritrova a dover fare molti conti e quindi il teorema non risulta di alcuna utilità.

Diciamo, quindi, che il teorema risulta utile se si è capaci, con delle operazioni di equivalenza e/o con delle ragionevoli approssimazioni, di sconnettere dal circuito parti di ordine pari ad uno: annullando l'ammettenza di ciascuna parte, si ottengono le frequenze dei poli del circuito.

In pratica, questo è ciò che viene fatto con il teorema di Miller. In generale, però, emerge il problema per cui il coefficiente  $k$ , essendo un guadagno, dipende dalla frequenza. Per calcolare l'espressione esatta di  $k$ , bisognerebbe perciò risolvere il circuito (ma questo è proprio quello che si vuole evitare) e comunque, valutando i poli, si otterrebbero delle espressioni in funzione di  $k$  (e quindi di  $s$ ) e quindi in realtà non si determinerebbero i poli del circuito. Tuttavia, nel caso particolare della determinazione della frequenza di taglio  $\omega_h$ , è lecito supporre  $k$  costante e pari al valore a centro banda (così come abbiamo fatto prima): in tal modo, applicando il teorema di Miller, si ottiene un circuito che si può considerare equivalente a quello di partenza fino alla sua frequenza di taglio.

Pertanto, possiamo calcolare la frequenza di taglio del nuovo circuito e assumere con buona approssimazione che essa sia anche la frequenza di taglio del circuito di partenza. Questa operazione prende il nome di **approssimazione di Miller** (e si tratta di una approssimazione a polo dominante).

Oltre a semplificare notevolmente la ricerca della frequenza di taglio, l'approssimazione di Miller offre una spiegazione significativa di come il limite della risposta in frequenza dei transistor in configurazione di emettitore comune non venga dalla  $C_\pi$ , ma bensì dalla  $C_\mu$ , che in genere riporta in ingresso una capacità nettamente maggiore della  $C_\pi$  (questo prende il nome di **effetto Miller**).

<sup>2</sup> La dimostrazione del teorema può essere intuita constatando che in un circuito privo di generatori forzanti l'unica soluzione non banale è data dalla risposta naturale del circuito.

Adottando dunque l'approssimazione di Miller, si ottengono i seguenti poli:

$$\frac{1}{R} + s \cdot [C_{\pi} + C_{\mu} \cdot (1-k)] = 0 \longrightarrow p_1 = - \frac{1}{[C_{\pi} + C_{\mu} \cdot (1-k)] \cdot R}$$

$$\frac{1}{R_L} + s \cdot C_{\mu} \cdot \left( \frac{k-1}{k} \right) = 0 \longrightarrow p_2 = - \frac{1}{C_{\mu} \cdot \left( \frac{k-1}{k} \right) \cdot R_L}$$

dove ricordiamo ancora che  $k = -g_m R_L$  è il guadagno a centro banda tra i nodi di base e di collettore ai quali è connessa la  $C_{\mu}$ .

Tra questi due poli, sarà quello a frequenza più bassa ad essere in comune con il circuito di partenza, mentre, per quello a frequenza più alta, l'equivalenza con l'approssimazione di Miller non è più valida (per cui esso non dà alcuna indicazione). D'altra parte, il nostro scopo è trovare  $\omega_H$ , per cui, a patto che il secondo polo non sia interagente col primo, ci basta trovare quest'ultimo.

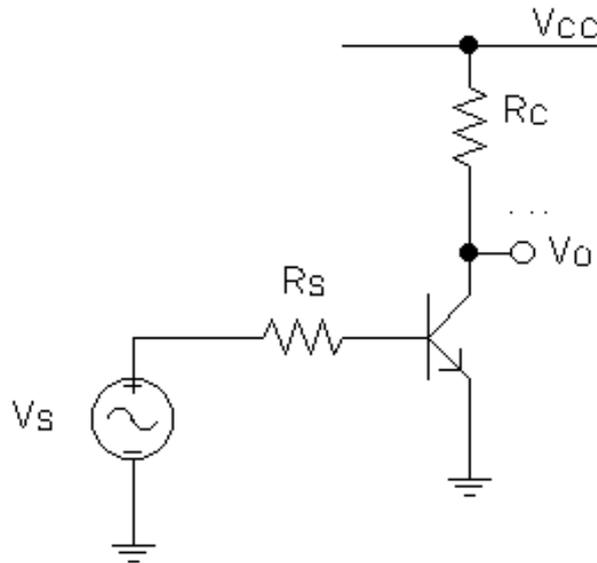
Evidenziamo, a questo punto, che l'effetto Miller non è sempre un effetto indesiderato: infatti, in alcuni casi, collocando una capacità fra due nodi dove esiste un guadagno in tensione elevato e invertente, si può simulare una capacità nettamente maggiore di quella che viene utilizzata (il caso più frequente lo si ha con la compensazione interna degli amplificatori).

Per concludere, sono fondamentali le seguenti due osservazioni:

- in primo luogo, il circuito ottenuto applicando l'equivalenza di Miller non può essere utilizzato per calcolare la funzione di trasferimento di ritorno, ossia la funzione  $\frac{v_i}{v_o}(s)$ . Esso ha in comune, con il "circuito originale", solo la stessa funzione di trasferimento d'andata (e quindi lo stesso polo dominante) e la stessa impedenza di ingresso: calcolando, quindi, il polo dominante sull'equivalente di Miller, si ottiene una buona stima del polo dominante del circuito originario e quindi anche della frequenza di taglio superiore;
- non solo, ma l'equivalente di Miller non può essere utilizzato nemmeno per valutare l'impedenza di uscita dello stadio, poiché tale calcolo comporterebbe uno spostamento del generatore forzante e in genere un cambiamento del coefficiente  $k$ .

## Esempio

Facciamo un esempio numerico al fine di chiarire i concetti esposti nel paragrafo precedente. Consideriamo perciò uno stadio ad emettitore comune come quello considerato nel paragrafo precedente:



Supponiamo di avere a disposizione i seguenti dati di progetto:

resistenze del circuito  $\rightarrow R_S=1\text{k}\Omega - R_L=R_C//r_o=5\text{k}\Omega$   
 parametri intrinseci del transistor  $\rightarrow r_b=200\Omega - \beta=100 - C_\mu=0.5\text{pF}$   
 punto di lavoro  $\rightarrow I_C=1\text{mA} \rightarrow g_m=40\text{mA/V} \rightarrow r_\pi=2.5\text{k}\Omega$

Supponiamo inoltre di conoscere la frequenza di transizione del dispositivo:  $f_T=400\text{MHz}$  (in corrispondenza, ovviamente, di  $I_C=1\text{mA}$ , in quanto sappiamo che la corrente di collettore influenza il valore della frequenza di transizione).

Vogliamo calcolare la **frequenza di taglio superiore** del circuito usando sia l'analisi approssimata di Miller sia l'analisi esatta.

Per prima cosa, a prescindere dal tipo di analisi che intendiamo utilizzare per la determinazione di  $\omega_h$ , dobbiamo calcolare la  $C_\pi$ : allora, ci ricordiamo che la frequenza di transizione di un transistor bipolare è espressa dalla formula

$$f_T = \frac{1}{2\pi} \frac{g_m}{C_\pi + C_\mu}$$

Da qui ricaviamo, sulla base degli altri dati a disposizione, che  $C_\pi=14.8\text{pF}$ . Come generalmente accade, si nota che questa capacità è molto più grande della  $C_\mu$  (in questo caso di due ordini di grandezza, ma spesso c'è un solo ordine di grandezza di differenza).

A questo punto, se usiamo l'approssimazione di Miller, possiamo scrivere che la capacità di Miller vale

$$C_M = C_\mu (1 - A_V) = C_\mu (1 + g_m R_L) = 96.7\text{pF}$$

da cui ricaviamo quindi che la frequenza di taglio superiore, coincidente con la frequenza del polo dominante del circuito ottenuto con l'approssimazione di Miller, vale

$$f_H = f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \frac{1}{C_\pi + C_M} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(R_S + r_b) // r_\pi} \frac{1}{C_\pi + C_M} = 1.74\text{MHz}$$

Se adesso ripetiamo lo stesso calcolo usando la formula esatta, troviamo

$$f_H = \frac{\omega_H}{2\pi} = \frac{\omega_{p1}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R // r_\pi} \frac{1}{C_\pi + C_\mu \cdot \left[ (1 + g_m R_L) + \frac{R_L}{R} \right]} = 1.69 \text{MHz}$$

E' evidente che i valori trovati con le due formule sono molto prossimi tra di loro.

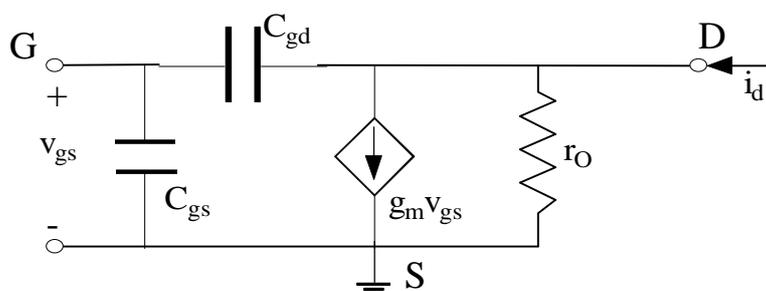
Sfruttando l'analisi esatta, invece, è possibile calcolare anche il polo non dominante del circuito in esame (l'analisi con l'approssimazione di Miller non consente invece il calcolo di tale polo): si ha infatti che

$$p_2 = - \left( \frac{1}{R_L C_\mu} + \frac{1}{(R // r_\pi) C_\pi} + \frac{1}{R_L C_\pi} + \frac{g_m}{C_\pi} \right) = -30 \cdot 10^8 \text{ (rad/sec)} \longrightarrow f_2 = \frac{1}{2\pi} |p_2| = 476 \text{MHz}$$

E' evidente che questo polo si trova a frequenza superiore alla frequenza di transizione del dispositivo (che è anche il limite di validità del modello a  $\pi$ ), che vale 400 MHz, per cui può essere lecitamente trascurato, anche perché non si può più fare affidamento sul valore trovato.

## Stadio a source comune

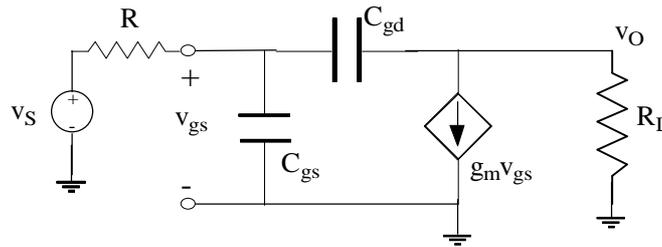
Uno stadio a source comune ha un circuito incrementale del tutto analogo a quello dello stadio ad emettitore comune studiato nel paragrafo precedente: al posto della  $C_\pi$  c'è la capacità  $C_{gs}$  tra gate e source, mentre al posto della  $C_\mu$  c'è la capacità  $C_{gd}$  tra gate e drain; inoltre, al posto della  $r_\pi$  c'è una resistenza di ingresso praticamente infinita:



Di conseguenza, i risultati trovati per lo stadio ad emettitore comune valgono ugualmente per lo stadio a source comune, a patto di effettuare le sostituzioni di cui sopra.

A titolo di esempio, determiniamo la frequenza di taglio superiore del circuito sfruttando l'approssimazione di Miller.

Consideriamo lo stadio a source comune alimentato in tensione e chiuso su un carico  $R_L$ :



La capacità  $C_{gd}$  si trova tra due nodi (il gate ed il drain del FET) tra i quali esiste un guadagno di tensione invertente, per cui è soggetta ad *effetto Miller*. Studiamo allora il circuito facendo uso della **approssimazione di Miller**.

Consideriamo l'impedenza di ingresso vista dalla capacità  $C_{gs}$  guardando verso destra: questa impedenza è pari al rapporto tra la tensione  $v_{gs}$  e la corrente che scorre in  $C_{gd}$ ; trascurando in prima approssimazione il solito zero in  $g_m/C_{gd}$ , questa impedenza risulta avere espressione

$$Z_{eq}(s) = \frac{1}{(1 + g_m R_L) C_{gd} s}$$

Si tratta perciò di una capacità, che indichiamo con  $C_M$  e che prende ancora una volta il nome di **capacità di Miller**:

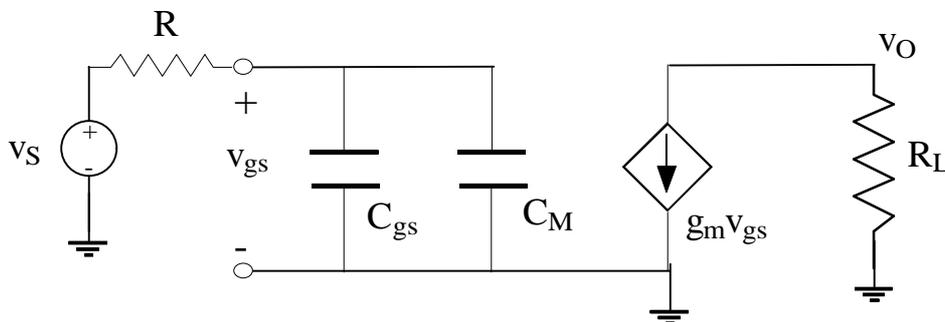
$$C_M = C_{gd} (1 + g_m R_L)$$

Il termine  $g_m R_L$  che compare in questa formula è proprio il guadagno di tensione  $A_V$ , cambiato di segno e valido a centro banda, tra i nodi di drain e di gate cui la  $C_{gd}$  è connessa:

$$C_M = C_{gd} (1 - A_V)$$

Dato che questo guadagno è generalmente molto maggiore dell'unità (in modulo), la capacità di Miller è molto maggiore di  $C_{gd}$ .

A questo punto, *facendo uso dell'equivalente di Miller, possiamo disegnare un nuovo circuito per il calcolo della funzione di trasferimento di andata e della impedenza di ingresso del circuito di partenza:*



Ricordiamo anche in questo caso che questo circuito equivalente ha in comune, con il circuito precedente, solo il fatto di presentare la stessa funzione di trasferimento d'andata (e quindi lo stesso polo dominante) e la stessa impedenza di

ingresso, mentre invece non può essere utilizzata per calcolare né la funzione di trasferimento di ritorno  $\frac{V_i}{V_o}(s)$  né l'impedenza di uscita.

Andiamo allora a calcolare il guadagno di tensione dell'amplificatore: si ottiene l'espressione

$$A_v(s) = -g_m R_L \frac{1}{1 + sR(C_{gs} + C_M)}$$

Come si poteva notare direttamente sul circuito, la capacità di Miller va dunque a sommarsi in parallelo alla  $C_{gs}$ , degradando così le prestazioni in frequenza dell'amplificatore

Sostituendo l'espressione di  $C_M$  ricavata prima, si ottiene

$$A_v(s) = -g_m R_L \frac{1}{1 + sR(C_{gs} + C_{gd}(1 + g_m R_L))}$$

Questa espressione indica che il circuito ha una funzione di trasferimento priva di zeri e con un solo polo, avente espressione

$$p = -\frac{1}{R} \frac{1}{C_{gs} + C_{gd}(1 + g_m R_L)}$$

La frequenza di questo polo corrisponde alla frequenza di taglio superiore del circuito:

$$\omega_H = \omega_p = \frac{1}{R} \frac{1}{C_{gs} + C_{gd}(1 + g_m R_L)}$$

Se, al posto di usare l'approssimazione di Miller, conducessimo una analisi rigorosa del circuito equivalente per piccoli segnali, otterremo la seguente espressione di  $\omega_h$  (nella quale si è comunque trascurato il solito zero fuori banda):

$$\omega_H = \omega_p = \frac{1}{R} \frac{1}{C_{gs} + C_{gd} \left( 1 + g_m R_L + \frac{R_L}{R} \right)}$$

La differenza è dunque nel termine additivo  $R_L/R$  a denominatore, termine che comunque risulta spesso trascurabile rispetto agli altri due.

Si presentano due casi estremi:

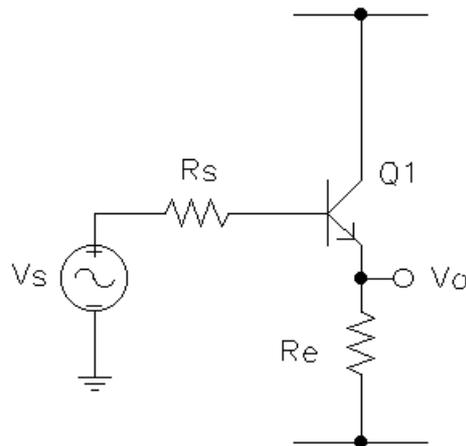
- quando  $R \gg 0$ , risulta  $\omega_H \cong \frac{1}{C_{gd} R_L}$
- quando  $R_L \gg 0$ , cioè in presenza di un carico molto piccolo, risulta invece  $\omega_H \cong \frac{1}{R} \frac{1}{C_{gs} + C_{gd}}$ .

In entrambi i casi, quindi, la frequenza di taglio superiore aumenta.

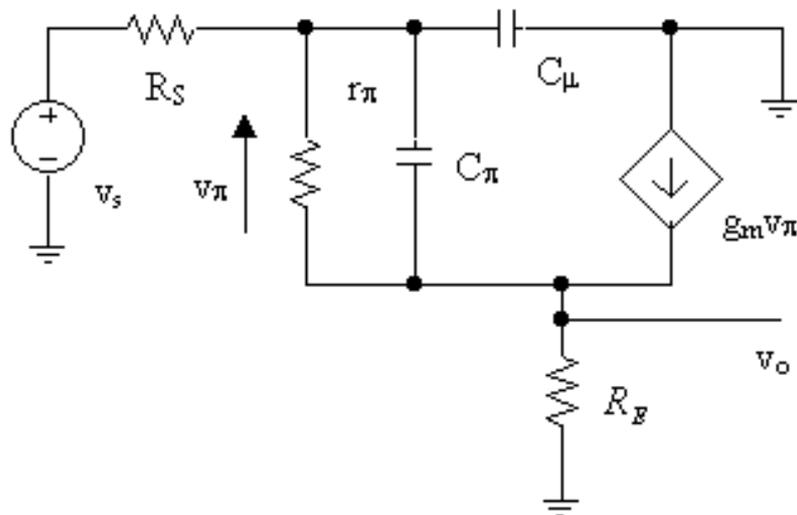
## Stadio inseguitore di tensione a BJT

Lo stadio inseguitore di tensione viene largamente usato nella pratica. Le sue tipiche applicazioni sono come stadio di disaccoppiamento (per variare l'impedenza da alta e bassa), come traslatore di livello (dato che l'uscita è 0.7V circa al di sotto dell'ingresso) e come stadio di uscita (in classe A).

Facciamo allora riferimento ad un inseguitore di tensione realizzato mediante un BJT nella configurazione a collettore comune:

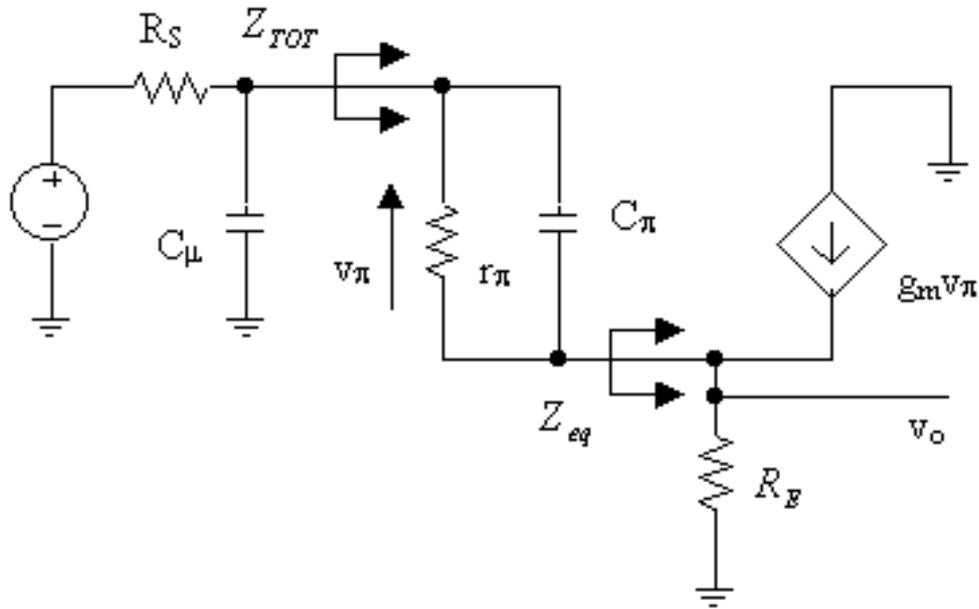


Il circuito equivalente per piccoli segnali di questo stadio, tenendo conto delle capacità intrinseche del transistor, è fatto nel modo seguente:



Osserviamo subito che la  $C_\mu$  si ritrova totalmente in ingresso (tra la base e massa), per cui non è soggetta ad effetto Miller. Viceversa, la  $C_\pi$  si trova a cavallo tra l'ingresso (base) e l'uscita (emettitore), per cui è soggetta ad effetto Miller.

Ci conviene ridisegnare il circuito nel seguente modo:



Dato che questo stadio presenta, tra ingresso ed uscita, un guadagno di tensione approssimativamente unitario, deduciamo che l'effetto Miller su  $C_p$  è notevolmente attenuato.

Di conseguenza, si può subito affermare che un transistor, in questa configurazione, ha un comportamento in frequenza nettamente migliore rispetto alla configurazione da invertitore.

E' inoltre facile accorgersi che questo circuito presenta uno zero nella funzione di trasferimento di andata  $v_o/v_\pi$ : infatti, dalla semplice applicazione della LKT al circuito dell'ultima figura, si ottiene che

$$v_o(s) = R_E [g_m v_\pi + (g_\pi + sC_\pi)v_\pi] = R_E [g_m + g_\pi + sC_\pi]v_\pi$$

In base a questa espressione, la funzione  $v_o(s)$  si annulla in due casi: quando  $v_\pi=0$  e quando  $g_m + g_\pi + sC_\pi = 0$ . La condizione  $v_\pi=0$  si verifica quando la  $C_\pi$  diventa un cortocircuito, il che avviene per  $s \rightarrow \infty$ , ossia per frequenze particolarmente elevate. La condizione  $g_m + g_\pi + sC_\pi = 0$  si verifica invece quando

$$s = -\frac{g_m + g_\pi}{C_\pi} = -\frac{g_m + \frac{1}{r_\pi}}{C_\pi} = -\frac{g_m + \frac{g_m}{\beta}}{C_\pi} \cong -\frac{g_m}{C_\pi}$$

da cui ricaviamo appunto che l'unico zero è  $z = -\frac{g_m}{C_\pi}$ .

La frequenza  $\omega_z = \frac{g_m}{C_\pi}$  di questo zero è leggermente maggiore della frequenza di transizione  $\omega_T = \frac{g_m}{C_\pi + C_\mu}$  del transistor, per cui si tratta ancora una volta di uno **zero fuori banda** che possiamo tranquillamente trascurare.

Per quanto riguarda la determinazione dei poli del circuito, si può usare un apposito teorema sulle reti elettriche, in base alla quale il polo del circuito si può

ottenere calcolando l'impedenza di ingresso visto dal generatore forzante e imponendo che essa risulti nulla.

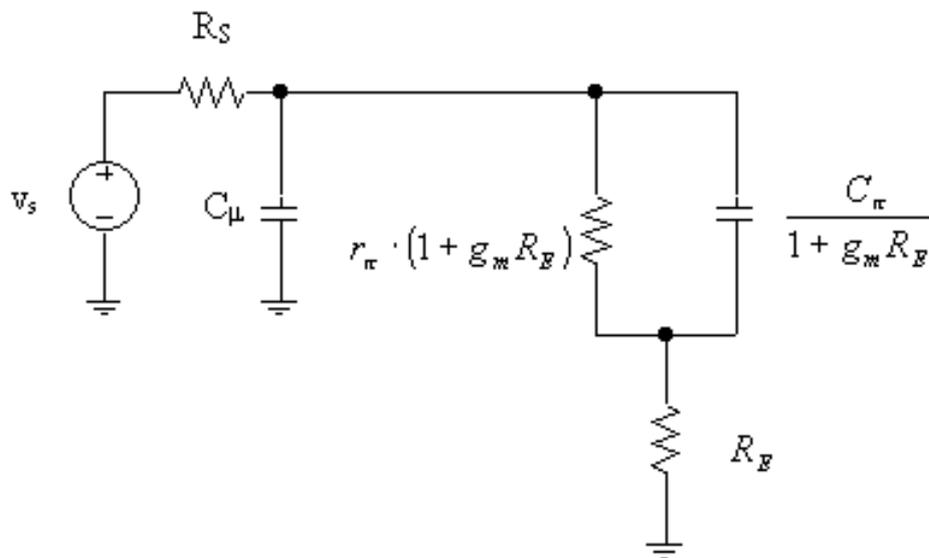
Conviene inizialmente calcolare l'impedenza indicata nell'ultima figura con  $Z_{TOT}$ : considerando che

$$Z_{eq} = \frac{v_o}{y_\pi v_\pi} = \frac{(g_m + y_\pi) \cdot v_\pi R_E}{y_\pi v_\pi} = \left( \frac{g_m}{y_\pi} + 1 \right) \cdot R_E$$

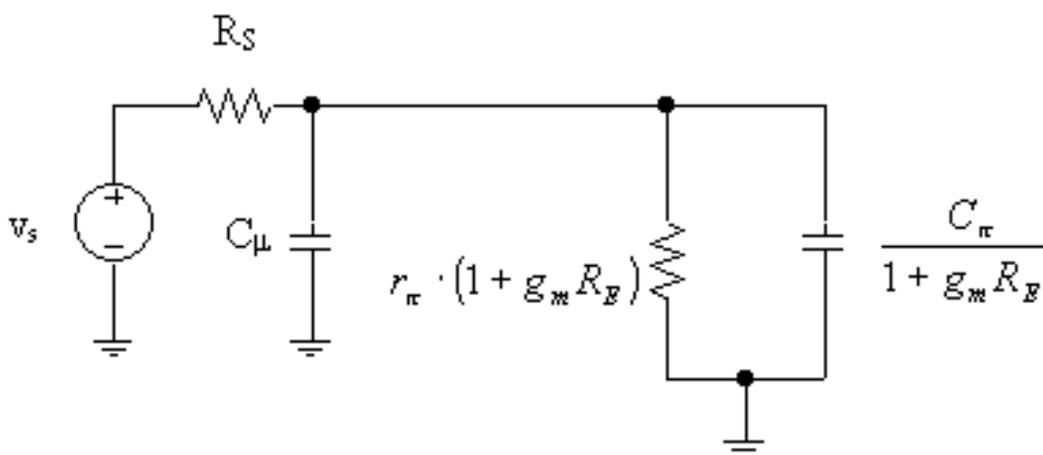
possiamo scrivere che

$$Z_{TOT} = \frac{1}{y_\pi} + Z_{eq} = \frac{1}{y_\pi} + \left( \frac{g_m}{y_\pi} + 1 \right) \cdot R_E = \frac{1 + g_m R_E}{\frac{1}{r_\pi} + sC_\pi} + R_E = r_\pi \cdot (1 + g_m R_E) // \frac{sC_\pi}{1 + g_m R_E} + R_E$$

Sostituendo, dunque, la parte destra del circuito con gli elementi corrispondenti a questa impedenza, possiamo tracciare il seguente circuito equivalente:



Possiamo del resto anche trascurare la resistenza  $R_E$  nella serie (ipotesi ragionevole alle alte frequenze e corrispondente ad un'approssimazione a polo dominante):



Così facendo, l'impedenza che risulta in parallelo alla  $C_\mu$  vale

$$Z_{TOT} \cong [(1 + g_m R_E) r_\pi] // \left( \frac{s C_\pi}{1 + g_m R_E} \right)$$

Imponendo che sia nullo il parallelo di  $C_\mu$  con questa impedenza, si trova la seguente espressione per il polo del circuito:

$$p = - \frac{1}{\left( C_\mu + \frac{C_\pi}{1 + g_m R_E} \right) [R_S // (1 + g_m R_E) r_\pi]}$$

La frequenza di questo polo risulta essere piuttosto elevata, soprattutto se la si confronta con quella della configurazione ad emettitore comune; il fattore  $1 + g_m R_E$  diminuisce l'effetto della  $C_\pi$ , mentre nel parallelo domina la  $R_S$ , che in genere è piccola essendo la resistenza interna di un generatore (bisognerebbe eventualmente aggiungere la  $r_b$  del transistor).

Queste considerazioni sono importanti perché, nello studio del comportamento in alta frequenza di un circuito con più stadi, gli inseguitori di tensione possono essere considerati praticamente privi di dinamica rispetto agli emettitori comuni.

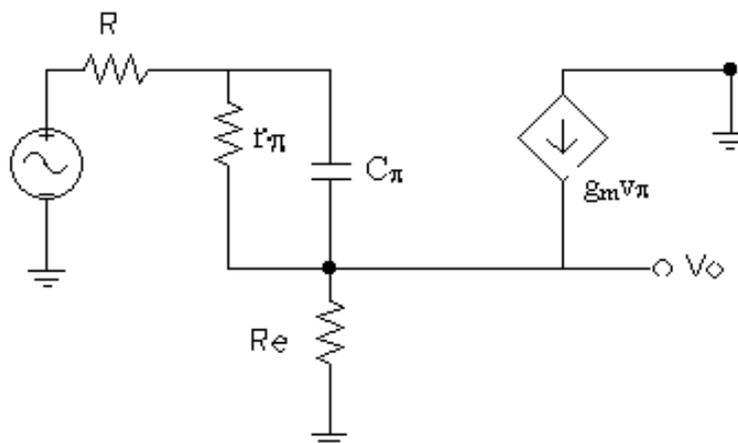
Sostituendo i valori tipici dei parametri coinvolti in questa espressione, si trova un valore della frequenza  $\omega_p = |p|$  di tale polo leggermente inferiore al valore della

frequenza di transizione  $\omega_T = \frac{g_m}{C_\pi + C_\mu}$  del transistor, dal che deduciamo che lo

stadio ha una larghezza di banda estremamente elevata (3).

Tutte le conclusioni appena ricavate possono essere ottenute anche con un altro metodo di analisi, più tradizionale, che andiamo ad esporre.

Il punto di partenza consiste nell'osservare che, essendo la capacità  $C_\mu$  non sottoposta ad effetto Miller, è lecito trascurarla, per cui il circuito equivalente per piccoli segnali dello stadio risulta essere il seguente:



Abbiamo posto  $R = R_S + r_b$ .

<sup>3</sup> Se  $\omega_p$  e  $\omega_T$  coincidessero, la larghezza di banda sarebbe la massima possibile compatibile con i limiti fisici del transistor.

E' immediato individuare, tramite le semplici leggi di Kirchoff, il rapporto tra la tensione di uscita e quella di ingresso, ossia la funzione di trasferimento in andata:

$$A_V(s) = \frac{v_O}{v_i}(s) = \frac{g_m R_E + \frac{R_E}{r_\pi}}{1 + g_m R_E + \frac{R + R_E}{r_\pi}} \frac{1 + \frac{C_\pi}{g_m} s}{1 + C_\pi \left( r_\pi // \frac{R + R_E}{1 + g_m R_E} \right) s}$$

Tramite questa espressione è immediato ricavare tutti i parametri di interesse del circuito. Ad esempio, il guadagno statico si ottiene ponendo  $s=0$ :

$$A_{V0} = A_V(s)|_{s=0} = \frac{g_m R_E + \frac{R_E}{r_\pi}}{1 + g_m R_E + \frac{R + R_E}{r_\pi}}$$

Questo guadagno, come ci aspettavamo, è unitario se  $g_m R_E \gg 1$  e  $R \ll R_E$ .

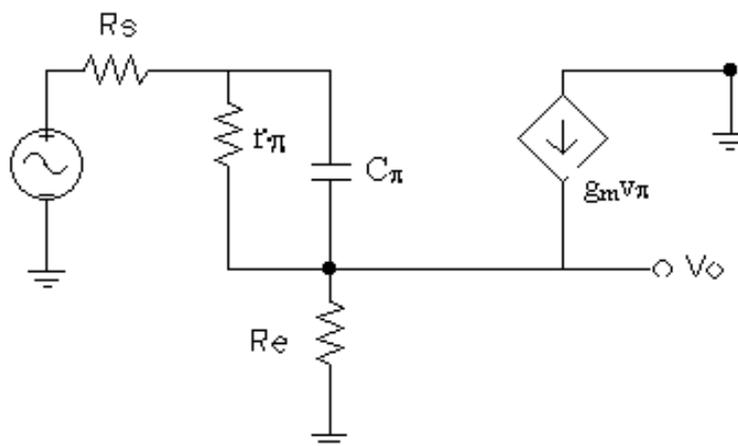
Si osserva anche la presenza dello zero della funzione di trasferimento  $A_V(s)$ , che vale  $z = -\frac{g_m}{C_\pi}$ .

Analogamente, uguagliando a zero il denominatore di  $A_V(s)$ , si ottiene l'espressione dell'unico polo.

## Impedenze di ingresso e di uscita

Le considerazioni appena concluse hanno dunque mostrato che *uno stadio inseguitore di emettitore presenta una elevata larghezza di banda*. Una delle applicazioni più frequenti dell'inseguitore di emettitore è come **circuito disaccoppiatore**, grazie alla sua alta impedenza di ingresso e alla sua bassa impedenza di uscita. Il comportamento al variare della frequenza di queste impedenze è quindi di estrema importanza e verrà perciò adesso approfondito.

Quando, a suo tempo, abbiamo calcolato l'impedenza di ingresso e di uscita di un inseguitore di emettitore a centro banda, abbiamo usato un circuito identico a quello della figura seguente, con la sola esclusione di  $C_\pi$ :



Allora, possiamo riprendere gli stessi risultati ottenuti allora e sostituire, al posto di  $r_\pi$ , l'impedenza

$$z_\pi = r_\pi // C_\pi = \frac{r_\pi}{1+sC_\pi r_\pi}$$

Apportando questa sostituzione e includendo anche la resistenza intrinseca di base  $r_b$ , si ottengono le seguenti formule:

$$Z_{IN} = r_b + \frac{r_\pi}{1+sC_\pi r_\pi} + \left(1+g_m \frac{r_\pi}{1+sC_\pi r_\pi}\right) R_E$$

$$Z_{OUT} = \frac{R_s + r_b + \frac{r_\pi}{1+sC_\pi r_\pi}}{1+g_m \frac{r_\pi}{1+sC_\pi r_\pi}}$$

Possiamo fare alcune interessanti osservazioni su queste formule.

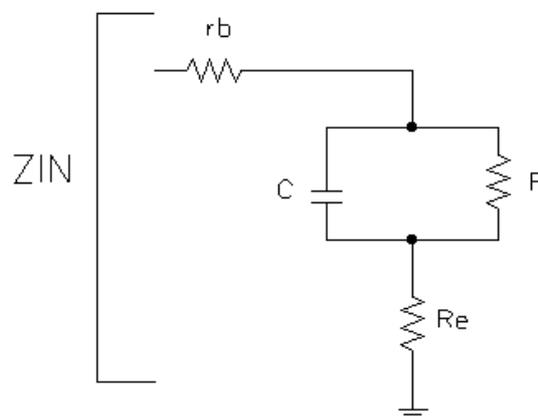
Cominciamo dall'impedenza di ingresso: facendo qualche semplice manipolazione algebrica, essa può essere riscritta nella forma

$$Z_{IN} = r_b + R_E + \frac{(1+g_m R_E)r_\pi}{1+s \frac{C_\pi}{1+g_m R_E} (1+g_m R_E)r_\pi}$$

Questa formula, ponendo  $R = (1+g_m R_E)r_\pi$  e  $C = \frac{C_\pi}{1+g_m R_E}$ , può essere riscritta come

$$Z_{IN} = r_b + R_E + \frac{R}{1+sCR}$$

In questo modo, si evidenzia che l'impedenza di ingresso  $Z_{IN}$  può essere rappresentata da un circuito RC parallelo posto in serie ad  $r_b$  ed  $R_E$ , come indicato nella figura seguente:



La capacità di ingresso effettiva è  $C = \frac{C_\pi}{1 + g_m R_E}$  ed è, per i normali valori del prodotto  $g_m R_E$ , molto minore di  $C_\pi$ .

La capacità  $C_\mu$  potrebbe anche essere il contributo dominante alla capacità di ingresso e può essere perciò inclusa, nell'ultimo circuito disegnato, ponendola tra il nodo interno di base e la massa: in questo caso, l'espressione dell'impedenza di ingresso diventa

$$Z'_{IN} = C_\mu // Z_{IN} = C_\mu // \left( r_b + R_E + \frac{R}{1 + sCR} \right)$$

Alle alte frequenze, quindi, l'impedenza di ingresso dell'inseguitore di emettitore diventa capacitiva e quindi diminuisce in valore.

Passiamo adesso all'impedenza di uscita, della quale riproponiamo l'espressione:

$$Z_{OUT} = \frac{R_S + r_b + \frac{r_\pi}{1 + sC_\pi r_\pi}}{1 + g_m \frac{r_\pi}{1 + sC_\pi r_\pi}}$$

E' interessante vedere come cambia l'espressione di questa impedenza al variare della frequenza:

- a bassa frequenza ( $\omega \rightarrow 0$ ), risulta  $z_\pi \cong r_\pi$  e sappiamo perciò che l'impedenza vale

$$(Z_{OUT})_{\omega=0} = \frac{R_S + r_b + r_\pi}{1 + g_m r_\pi} = \frac{R_S + r_b}{1 + \beta_0} + \frac{1}{g_m}$$

- ad alta frequenza ( $\omega \rightarrow \infty$ ), invece,  $C_\pi$  diventa un cortocircuito, per cui  $z_\pi \rightarrow 0$  e quindi l'impedenza assume il valore

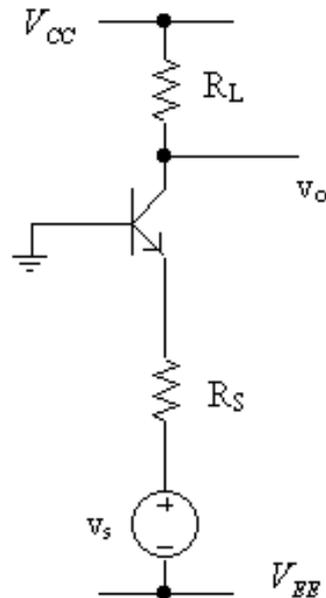
$$(Z_{OUT})_{\omega \rightarrow \infty} = R_S + r_b$$

In definitiva, quindi, l'impedenza di uscita è resistiva a frequenze molto basse e a frequenze molto alte, mentre il suo comportamento tra questi estremi dipende dai valori dei parametri. In presenza, ad esempio, di una corrente di collettore molto bassa, la resistenza  $1/g_m$  è molto grande: allora, se essa risulta maggiore di  $(R_S + r_b)$ , deduciamo, dalle ultime due formule, che  $Z_{OUT}$  diminuisce all'aumentare della frequenza ed ha natura capacitiva. Al contrario, se la corrente di collettore è superiore a qualche centinaio di  $\mu A$ , si ottiene normalmente che  $1/g_m$  è più piccola di  $(R_S + r_b)$ , per cui  $Z_{OUT}$  aumenta all'aumentare della frequenza ed ha natura induttiva. Nel caso particolare in cui  $1/g_m$  eguaglia perfettamente  $(R_S + r_b)$ , l'impedenza di uscita è resistiva e indipendente dalla frequenza per una ampia gamma di frequenze.

In conclusione, quindi, abbiamo appurato che l'impedenza di ingresso e di uscita dello stadio dipendono strettamente dalla frequenza: di conseguenza, anche se la larghezza di banda della funzione di trasferimento del circuito è ampia, la variazione con la frequenza delle impedenze di ingresso e di uscita può imporre una riduzione della banda utile del circuito.

## Stadio inseguitore di corrente a BJT

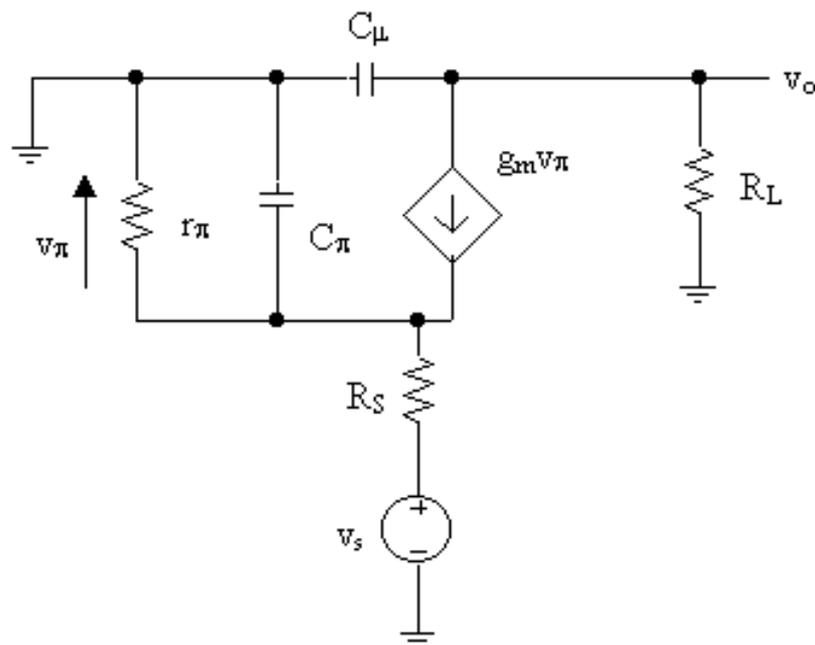
Lo schema circuitale di uno stadio inseguitore di corrente a BJT è quello riportato nella figura seguente:



Questo stadio presenta notoriamente una bassa impedenza di ingresso (pari a  $1/g_m$  a centro banda), un'alta impedenza di uscita (quella di uno specchio di Widlar) e un guadagno di corrente prossimo all'unità (è un inseguitore di corrente).

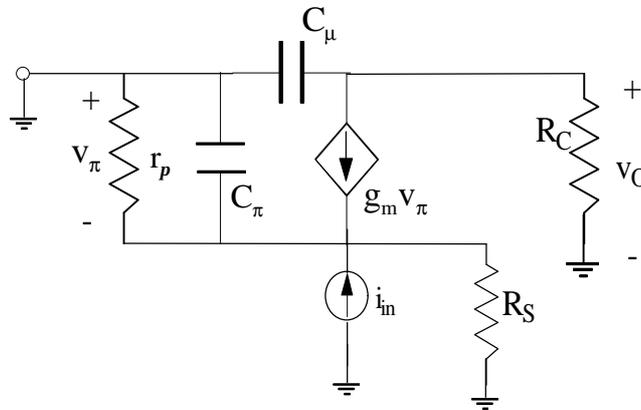
Vedremo più avanti che esso presenta una banda passante particolarmente estesa, per cui trova ampio utilizzo nelle applicazioni a larga banda e in quelle dove è richiesta una bassa impedenza di ingresso. Altre applicazioni sono negli stadi di uscita ad alta tensione e come traslatori di livello di tensione, come per esempio accade nell'amplificatore operazionale  $\mu A-741$ .

Nella figura seguente è mostrato il circuito equivalente per piccoli segnali dello stadio, completo delle capacità intrinseche:

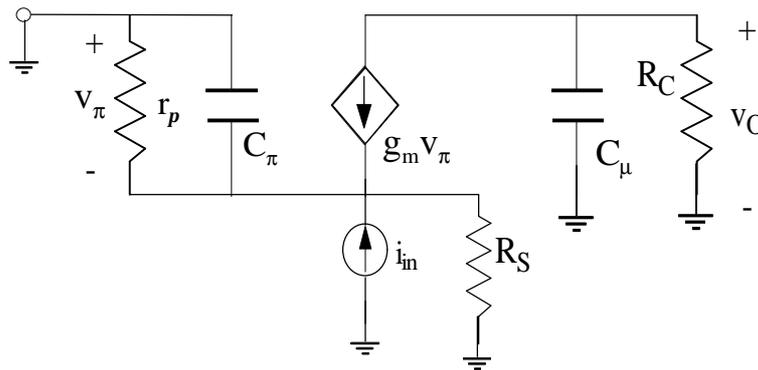


E' molto semplice caratterizzare il comportamento in alta frequenza dell'inseguitore di corrente, a patto però di ridisegnare il circuito equivalente in modo più opportuno.

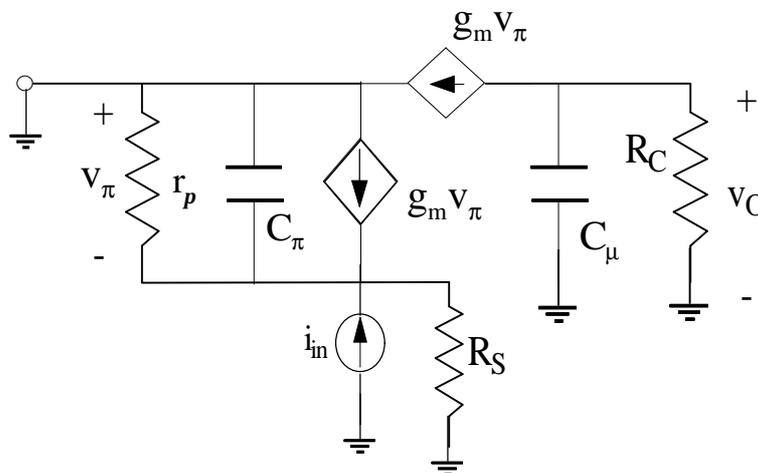
In primo luogo, conviene ridisegnare il generatore forzante mediante il suo equivalente di Norton:



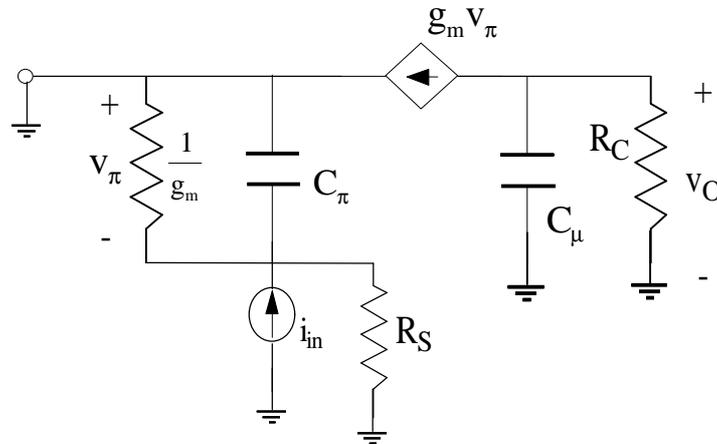
In secondo luogo, il fatto di trascurare la resistenza intrinseca di base fa' sì, evidentemente, che  $r_\pi$ ,  $C_\pi$  e  $C_\mu$  abbiano tutte un estremo a massa e quindi anche che la  $C_\mu$  risulti in parallelo al carico  $R_C$ :



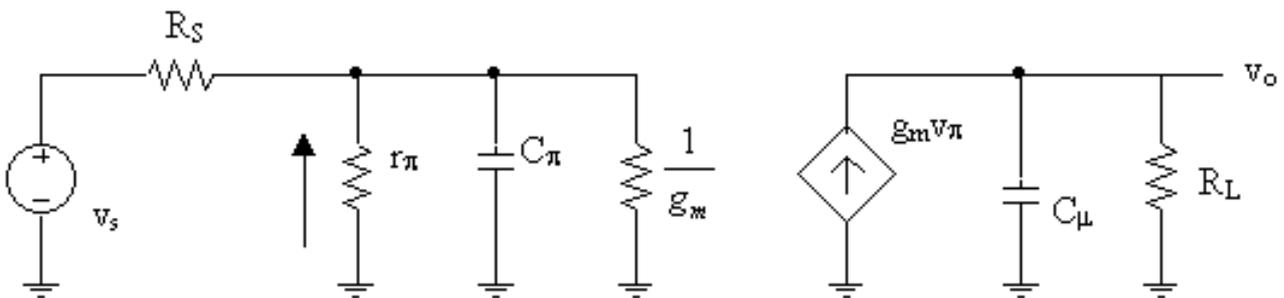
A questo punto, c'è il "problema" del generatore pilotato che trasferisce direttamente dall'ingresso e dall'uscita. Conviene allora *splittarlo* in due distinti generatori, come nella figura seguente:



In questo modo, il generatore pilotato più a sinistra è sottoposto alla stessa tensione che lo pilota, per cui possiamo sostituirlo con  $1/g_m$ . Questa resistenza va in parallelo alla  $r_\pi$ , ma è  $\beta$  volte più piccola di essa, per cui prevale nel parallelo:



Infine, ponendo in basso i terminali degli elementi connessi a massa, possiamo concludere che il circuito cui fare riferimento è il seguente:



Su questo circuito è immediato determinare i due poli del circuito, annullando le impedenze alle uniche due porte presenti:

$$\begin{aligned} \text{porta di ingresso: } \frac{1}{R_S // r_\pi // \frac{1}{g_m}} + sC_\pi = 0 &\longrightarrow & p_1 = -\frac{1}{C_\pi \cdot \left( R_S // r_\pi // \frac{1}{g_m} \right)} \\ \text{porta di uscita: } \frac{1}{R_L} + sC_\mu = 0 &\longrightarrow & p_2 = -\frac{1}{C_\mu R_L} \end{aligned}$$

In genere,  $R_L$  è più grande della resistenza che si vede in ingresso e quindi è  $p_2$  il polo a più bassa frequenza. Tale frequenza è comunque maggiore di quella del polo che si introduce nell'emettitore comune.

Possiamo inoltre evidenziare che, *in questa configurazione, il transistor non presenta effetto Miller e quindi anche in questo caso si ottengono elevate prestazioni in frequenza.*

Sempre partendo dal circuito dell'ultima figura, possiamo direttamente ricavare l'espressione del guadagno di corrente.

La tensione di uscita  $v_o(s)$  è semplicemente dovuta alla corrente  $g_m v_\pi(s)$  che fluisce nel parallelo tra  $R_C$  e  $C_\mu$ , come anche tensione  $v_\pi(s)$  è dovuta alla corrente di ingresso  $i_{in}(s)$  che fluisce nel parallelo tra  $1/g_m$  e  $C_\pi$ . Prendendo come corrente di uscita  $i_o(s)$  la corrente che scorre nella resistenza  $R_C$  e trascurando la capacità  $C_\mu$  (che non è in questo caso soggetta ad effetto Miller), si ottiene, per il guadagno di corrente, la seguente espressione:

$$A_I(s) = \frac{i_o(s)}{i_{in}(s)} = \frac{\frac{\beta_0}{1 + \beta_0}}{1 + s \frac{C_\pi}{g_m}}$$

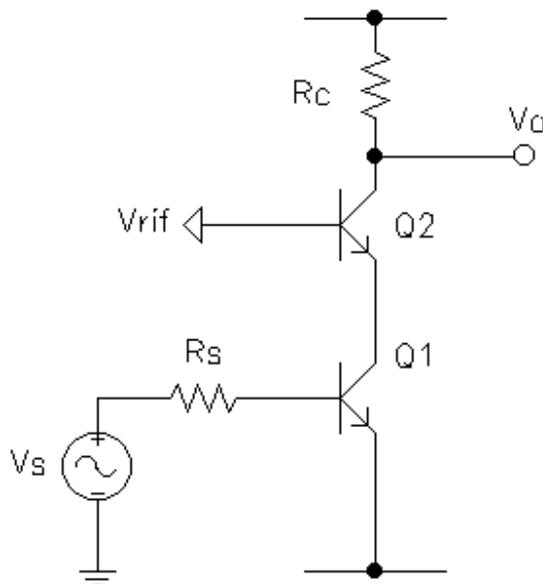
Questa espressione mostra che il guadagno di corrente dello stadio a base comune vale  $\frac{\beta_0}{1 + \beta_0}$  a bassa frequenza (cioè praticamente 1) ed ha un polo reale negativo  $p = -\frac{g_m}{C_\pi} = -\omega_p$  ad una frequenza prossima alla frequenza di transizione del transistor. Questo ci conferma che *lo stadio a base comune è un amplificatore (non invertente) a larga banda.*

Quindi, in base anche alle considerazioni del paragrafo precedente, riassumiamo dicendo che *i transistor che lavorano in configurazione da inseguitore (di tensione o di corrente) riescono a raggiungere le prestazioni massime del dispositivo stesso e si rivelano quindi stadi molto veloci.*

## Stadio cascode

Vediamo ora, brevemente, di giustificare il motivo per il quale lo stadio cascode ha delle eccellenti prestazioni in frequenza.

Lo schema circuitale di uno stadio cascode a BJT è il seguente:



Alla luce di ciò che è stato detto finora, è facile caratterizzare il funzionamento di questo circuito: infatti, la caratteristica peculiare di questa configurazione è che il transistor Q1 vede sul suo collettore una resistenza pari a  $\frac{1}{g_{m2}}$  e quindi il guadagno in tensione tra i nodi della  $C_{\mu1}$  risulta unitario (ovviamente invertente) data l'uguaglianza delle transconduttanze:

$$A_{v1} = -g_{m1} R_{carico} = -g_{m1} \frac{1}{g_{m2}} \cong -1$$

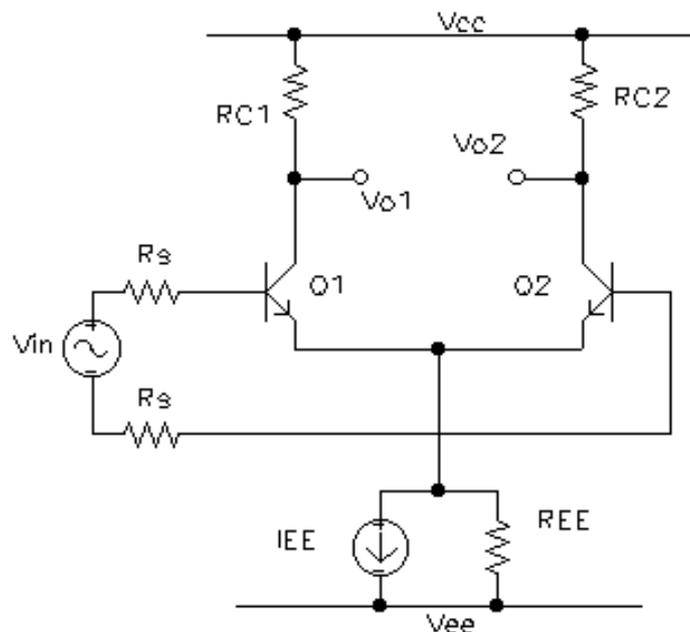
(le  $g_m$  sono uguali in quanto i due transistor hanno, circa, la stessa corrente di collettore).

Al contrario, dunque, dello stadio ad emettitore comune, la  $C_{\mu1}$  è soggetta ad un effetto Miller estremamente ridotto, il che quindi consente di migliorare decisamente le prestazioni in frequenza.

In definitiva, collegando un base comune in uscita ad un emettitore comune si riesce a contenere notevolmente l'effetto Miller del 1° transistor e allo stesso tempo a mantenere un elevato guadagno, poiché il 1° transistor fornisce l'amplificazione di corrente (circa  $\beta$ ) e poi l'inseguitore di corrente trasporta questa corrente su un carico elevato. Lo stadio cascode può essere dunque considerato come uno stadio emettitore comune privo dell'effetto Miller.

## Stadio differenziale

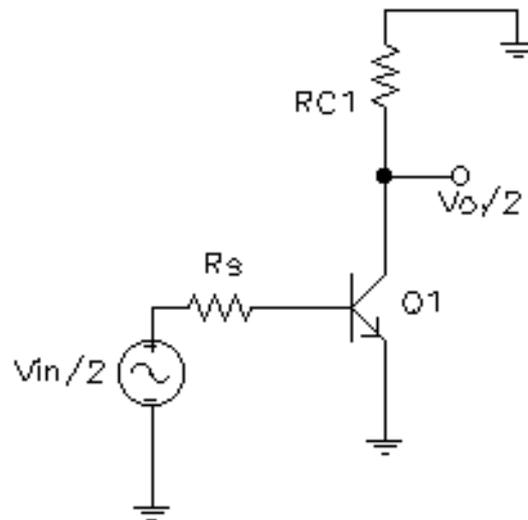
Consideriamo uno stadio differenziale come quello rappresentato nella figura seguente:



Questo stadio costituisce un blocco fondamentale dei circuiti analogici integrati. *Vogliamo studiarne il comportamento in alta frequenza sia rispetto ad un ingresso di modo puramente differenziale sia rispetto ad un ingresso di modo comune.*

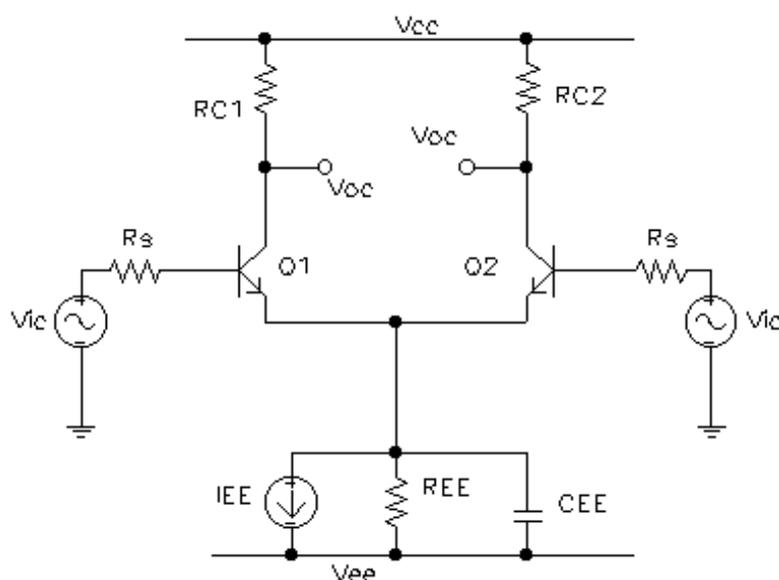
Cominciamo dal caso in cui è applicato in ingresso un segnale  $v_{in}$  di modo puramente differenziale: sappiamo bene che, in questo caso, il nodo in cui convergono i due emettitori è a massa sotto segnale, per cui non è importante considerare né la resistenza di Norton del generatore di corrente né una eventuale capacità in parallelo ad essa.

Consideriamo allora, ad esempio, il semicircuito di sinistra:



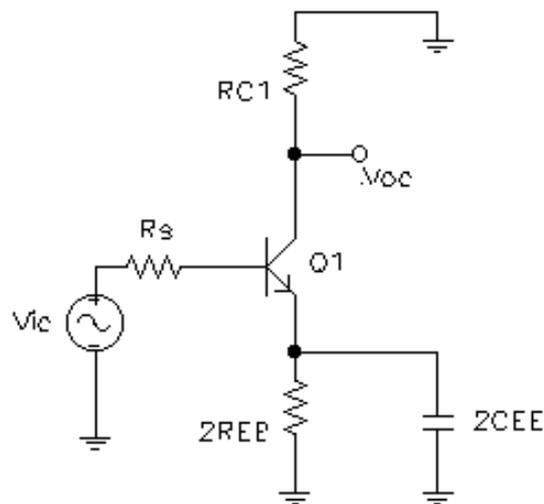
Il guadagno  $v_o/v_{in}$  di questo circuito è pari al guadagno di modo differenziale  $A_{dm}$  del circuito completo iniziale. Osservando il circuito, si nota che si tratta di un classico stadio ad emettitore comune come quello analizzato all'inizio di questo capitolo, il che ci consente quindi di affermare che valgono le stesse identiche considerazioni fatte in quel caso.

Passiamo allora a considerare il caso in cui è applicato in ingresso allo stadio differenziale un segnale di modo comune, cioè un segnale uguale sui due terminali di ingresso: in questo caso, sappiamo che sul nodo in cui convergono gli emettitori compare un segnale pari a metà del modo comune, per cui, questa volta, dobbiamo necessariamente considerare la resistenza di Norton del generatore di corrente ed una eventuale capacità posta in parallelo ad essa:



Quando abbiamo introdotto lo stadio differenziale, abbiamo ampiamente messo in luce l'importanza del guadagno di modo comune  $A_{cm}$ : abbiamo infatti osservato che bassi valori di  $A_{cm}$  permettono al circuito di non trasmettere in uscita segnali indesiderati applicati in maniera uguale ad entrambi gli ingressi. Questi segnali indesiderati di modo comune possono avere componenti ad alta frequenza, per cui è importante conoscere la risposta in frequenza del guadagno di modo comune.

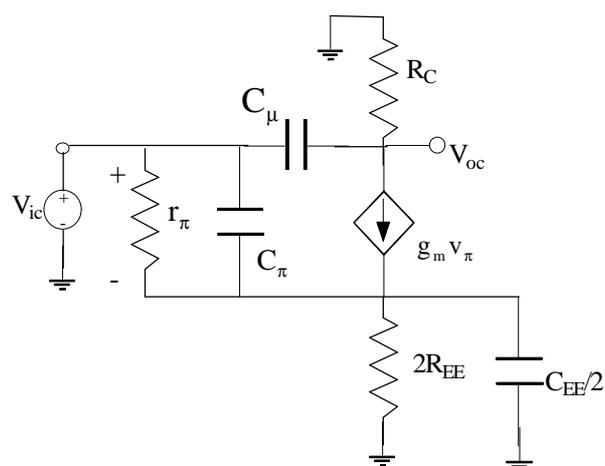
A tal fine, con riferimento all'ultimo circuito disegnato, sappiamo di poterci ricondurre ancora una volta ad un semicircuito, che in questo caso è fatto nel modo seguente:



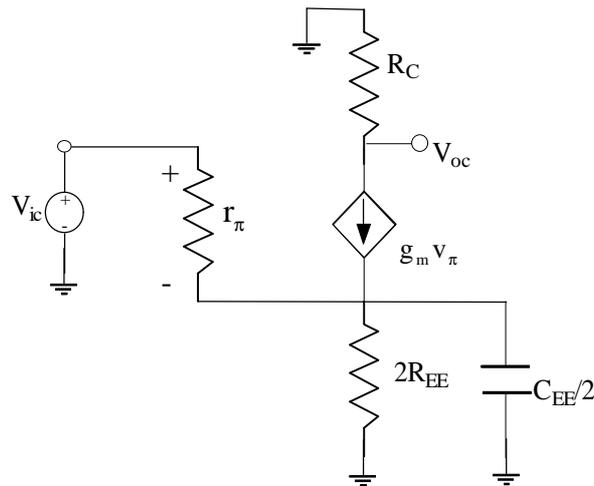
In questo circuito,  $R_{EE}$  e  $C_{EE}$  sono la resistenza e la capacità equivalenti di uscita del generatore di corrente  $I_{EE}$  (che sono invece state trascurate prima, per il modo differenziale, dato che i due emettitori erano a massa di segnale).

Il guadagno di tensione di questo circuito è il guadagno di modo comune dello stadio differenziale.

Il corrispondente circuito equivalente per piccoli segnali, che include tutti gli effetti capacitivi presenti, è il seguente:



L'analisi analitica rigorosa di questo circuito è piuttosto complessa, data la presenza di ben tre condensatori indipendenti: tuttavia, essa può essere semplificata osservando che, con i valori tipici dei vari elementi, la capacità  $C_{EE}$  risulta senz'altro prevalente, ad alta frequenza, rispetto alle capacità intrinseche del dispositivo. Trascuriamo allora tali capacità rispetto alla  $C_{EE}/2$ :



Sotto questa ipotesi, si trova facilmente la seguente espressione del guadagno di modo comune in funzione di  $s$ :

$$A_{cm}(s) = \frac{v_{oc}}{v_{ic}}(s) \cong -\frac{R_C}{2R_{EE}}(1 + sC_{EE}R_{EE})$$

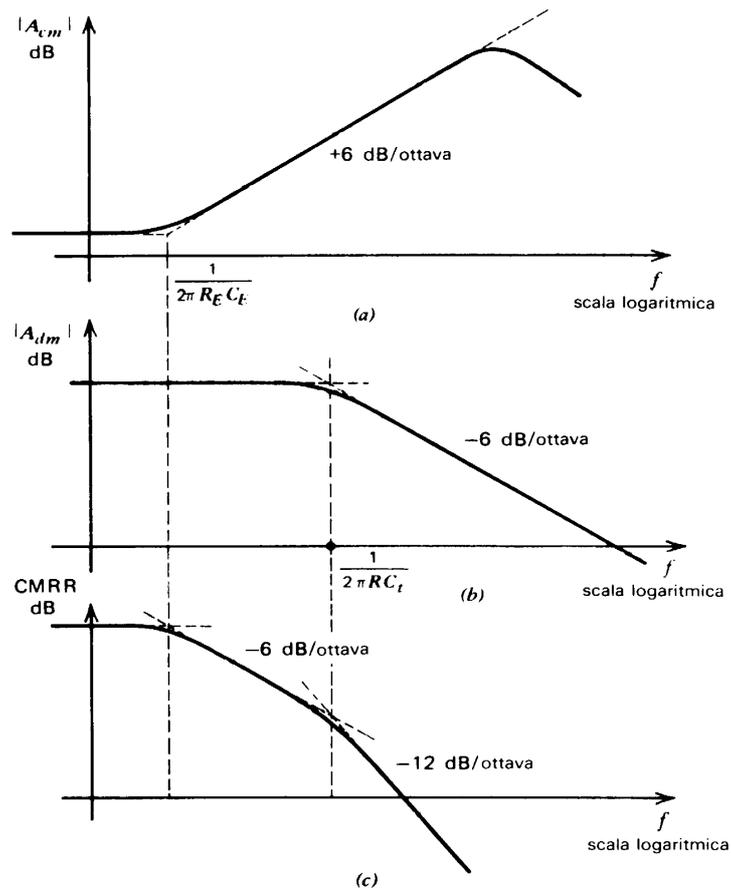
Questa espressione mostra che  $A_{cm}(s)$  non presenta poli, mentre presenta uno zero reale negativo in  $-\frac{1}{R_{EE}C_{EE}}$ : questo zero, come sappiamo, ha l'effetto di far aumentare  $A_{cm}(s)$  di 20 dB/decade (o, ciò che è lo stesso, di 6dB/ottava) per le frequenze superiori alla frequenza  $\omega_z = \frac{1}{R_{EE}C_{EE}}$  dello zero stesso.

E' ovvio che questo aumento è indesiderato, in quanto si vorrebbe che il guadagno di modo comune fosse il più piccolo possibile. D'altra parte, questo aumento non può continuare indefinitamente, in quanto le capacità che prima abbiamo trascurato ( $C_\pi$  e  $C_\mu$ ) incominceranno, da una certa frequenza in poi, a far sentire il loro peso, costringendo  $A_{cm}(s)$  a diminuire alle frequenze più elevate.

Nella prossima figura sono dunque riportati gli andamenti tipici, rispetto alla frequenza in scala logaritmica, dei moduli di  $A_{dm}$  e  $A_{cm}$  nonché del rapporto di reiezione di modo comune, che ricordiamo essere  $CMRR = \left| \frac{A_{dm}}{A_{cm}} \right|$ .

Si osserva che il CMRR comincia a diminuire in corrispondenza della frequenza alla quale  $|A_{cm}|$  prende ad aumentare. La pendenza della diminuzione aumenta ulteriormente quando anche  $|A_{dm}|$  comincia a diminuire a frequenze più elevate.

La conclusione è dunque che *l'amplificatore differenziale respinge sempre meno i segnali di modo comune quanto più la frequenza di tali segnali aumenta.*



Autore: **Sandro Petrizzelli**  
e-mail: [sandry@iol.it](mailto:sandry@iol.it)  
sito personale: <http://users.iol.it/sandry>