

Appunti di Elettronica

Capitolo 16 – parte III

Analisi in frequenza

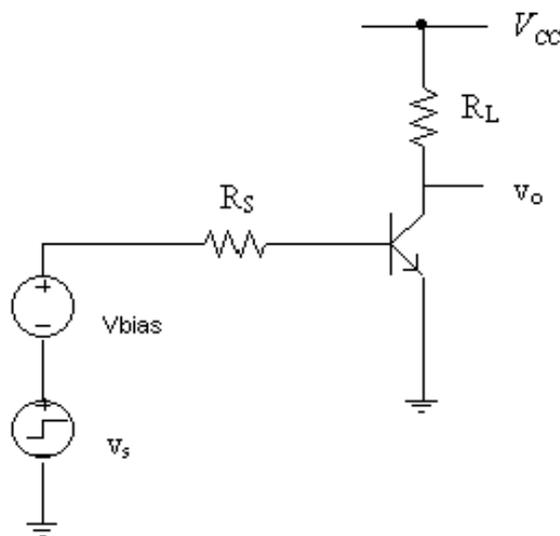
| | |
|--|----|
| <i>Determinazione sperimentale delle frequenze di taglio</i> | 1 |
| Esempio numerico..... | 5 |
| Esempio numerico..... | 8 |
| Sistemi con due poli nella funzione di trasferimento | 12 |
| <i>Analisi in frequenza degli amplificatori a più stadi</i> | 15 |
| Approssimazione con un polo dominante | 15 |

Determinazione sperimentale delle frequenze di taglio

Fino a questo punto, si è analizzato il procedimento generale da seguire per caratterizzare il comportamento in alta frequenza di un circuito e, contemporaneamente, si sono analizzate le configurazioni circuitali fondamentali.

Ora vogliamo vedere come sia possibile determinare sperimentalmente le frequenze di taglio di un circuito. Si tratta, fondamentalmente, di legare i parametri della risposta armonica con i parametri della risposta nel dominio del tempo.

Si consideri il seguente circuito :



Il generatore V_{bias} garantisce la polarizzazione, mentre l'altro fornisce un piccolo segnale in ingresso allo stadio.

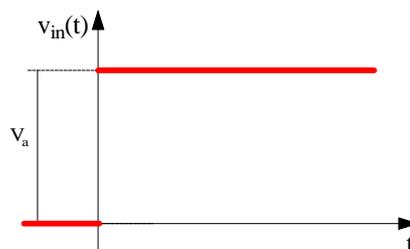
Supponiamo che il circuito abbia una funzione di trasferimento (per piccoli segnali) che può essere approssimata da una espressione avente un solo polo e nessuno zero (è, ad esempio, il caso di uno stadio ad emettitore comune per il quale si trascura lo zero fuori banda e si trascura anche il polo non dominante):

$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{k}{1 - \frac{s}{s_p}}$$

La costante K rappresenta chiaramente il valore statico (o a bassa frequenza) del guadagno (può essere positivo o negativo, a seconda che l'amplificatore considerato sia non invertente, come l'inseguitore di tensione, o invertente, come lo stadio ad emettitore comune qui considerato).

Il parametro p_1 rappresenta invece il polo (da prendere negativo) della funzione di trasferimento. In base a quanto detto nei paragrafi precedenti, la frequenza $\omega_p = |p_1|$ dell'unico polo è una ottima stima della frequenza di taglio del circuito.

Supponiamo di applicare all'ingresso del circuito un gradino di tensione di ampiezza v_a sufficientemente piccola da potersi considerare un piccolo segnale:



Vogliamo calcolare la corrispondente tensione di uscita.

Tenendo conto che la trasformata del gradino è v_a/s , deduciamo che la tensione di uscita ha la seguente espressione, nel dominio di Laplace:

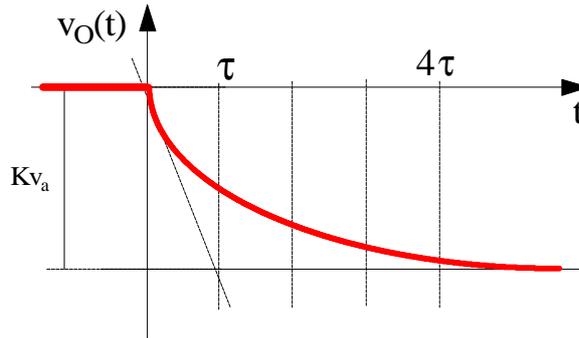
$$v_o(s) = \frac{k}{1 - \frac{s}{s_p}} \cdot \frac{v_a}{s} = -\frac{kv_a}{s - s_p} + \frac{kv_a}{s}$$

Antitrasformando secondo Laplace, si ottiene quanto segue:

$$v_o(t) = kV_a(1 - e^{s_p t}) = kv_a \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

In base a questa espressione, la tensione di uscita tende al valore di regime $k \cdot v_a$ dopo un transitorio con andamento esponenziale caratterizzato dalla **costante di tempo** $\tau = -1/s_p$ pari all'inverso del polo.

Tenendo conto che il guadagno k dello stadio è invertente, l'uscita ha dunque il seguente andamento temporale:



Su questo andamento tipico si definiscono alcuni importanti parametri caratteristici del sistema:

- **tempo di ritardo T_0 (delay time)**: tempo necessario affinché l'uscita raggiunga il 50% del valore finale;
- **tempo di salita T_r (t-rise)**: tempo necessario affinché l'uscita passi dal 10% al 90% del valore finale;
- **tempo di assestamento T_a** : tempo necessario affinché l'uscita rimanga entro il $\pm 5\%$ del valore finale di regime.

Di particolare importanza è il *tempo di salita*, che può essere misurato molto facilmente: infatti, indicando con t_1 l'istante in cui l'uscita raggiunge il 10% del valore finale (cioè di Kv_a nel caso del gradino di ampiezza v_a) e con t_2 l'istante in cui l'uscita raggiunge il 90% del valore finale, risulta

$$\begin{aligned} 0.1Kv_a &= Kv_a(1 - e^{p_1 t_1}) \\ 0.9Kv_a &= Kv_a(1 - e^{p_1 t_2}) \end{aligned}$$

Esplicitando t_1 e t_2 e facendone la differenza, si ottiene il tempo di salita:

$$\begin{cases} p_1 t_1 = \ln 0.9 \\ p_1 t_2 = \ln 0.1 \end{cases} \longrightarrow t_r = t_2 - t_1 = -\frac{1}{p_1} \ln 9$$

Considerando dunque che $\ln 9 = 2.2$ e che $-p_1 = \omega_p = \omega_h$, possiamo concludere che

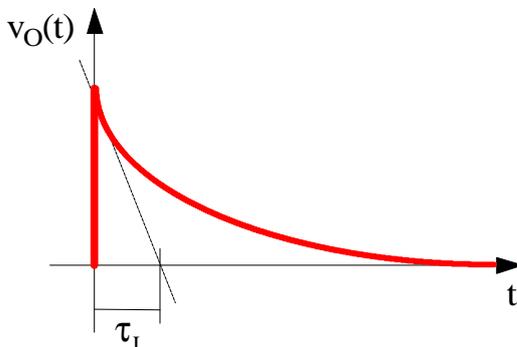
$$t_r = \frac{2.2}{\omega_h} = \frac{0.35}{f_h}$$

Questa equazione mostra dunque il legame tra il tempo di salita dell'uscita e la frequenza del polo dominante del sistema (cioè la frequenza di taglio). Supponendo, ad esempio, che la frequenza di taglio sia di 10 MHz, si trova un tempo di salita di 35 nsec.

Per un sistema a polo dominante, il tempo di salita è dunque inversamente proporzionale alla frequenza di taglio superiore: *per sistemi di questo tipo è quindi possibile, mediante una semplice misura in laboratorio della risposta del circuito, determinare la frequenza di taglio superiore del circuito.*

Viceversa, è possibile stimare la risposta ad un gradino del circuito conoscendo la f_h grazie alla quale si può risalire al t_r .

Un discorso analogo può essere fatto per le basse frequenze, poiché un sistema con un polo e uno zero alle basse frequenze risponde ad un gradino di piccolo segnale in ingresso con un'uscita che decresce esponenzialmente, come riportato nella figura seguente:

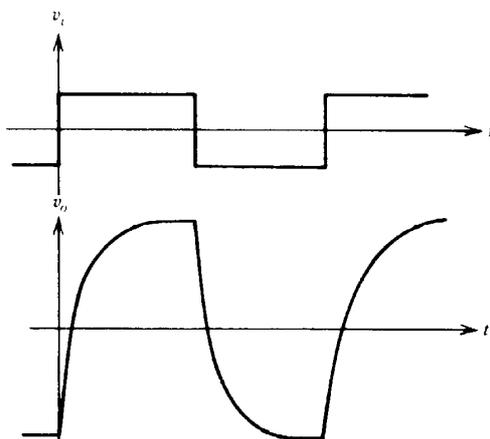


In questo caso si può parlare di **tempo di discesa** t_f , il quale può essere determinato molto facilmente in quanto è più facile, rispetto al caso precedente, stimare la costante di tempo τ_L ($=1/\omega_L$) di decadimento (essendo la scala dei tempi molto più alta): una volta stimata τ_L , si può direttamente scrivere che

$$t_f \cong 4\tau_L$$

Quindi, se alle basse frequenze c'è un polo che domina, la frequenza di taglio inferiore può essere determinata sperimentalmente analizzando la risposta al gradino del circuito (in particolare si misura il tempo di decadimento del valore dell'uscita quando l'ingresso è costante).

Quanto detto, a proposito dei tempi di salita e discesa, vale dunque nel caso in cui l'ingresso sia un impulso di tensione. Nel caso, invece, l'ingresso sia rappresentato da un treno di impulsi, la situazione è quella indicata nella figura seguente:



Gli spigoli dell'onda quadra sono arrotondati nello stesso modo descritto prima per il singolo impulso.

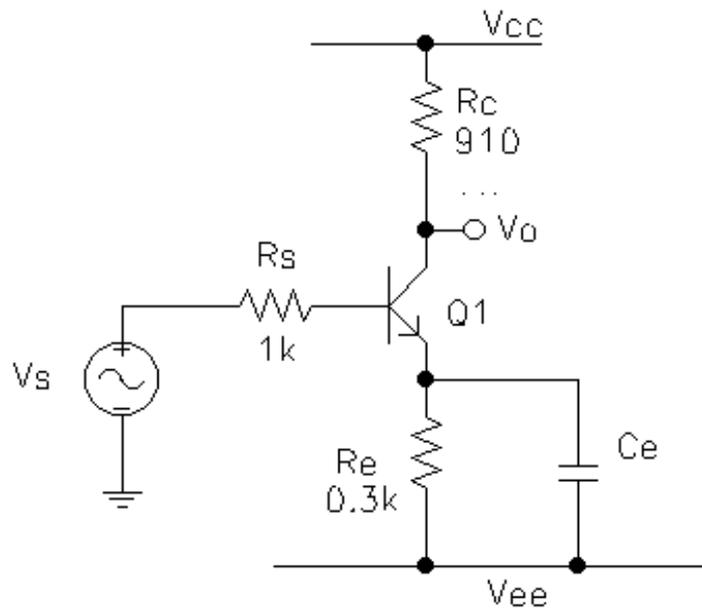
Si distinguono, nella forma d'onda di uscita, due transistori: quello legato ai fronti ripidi di salita e di discesa dell'onda quadra in ingresso e quello legato ai tratti nei quali l'onda quadra in ingresso è costante. Il primo transitorio (detto **transitorio veloce**) è determinato essenzialmente dalla costante di tempo τ_H associata alla frequenza di taglio superiore (cioè $\tau_H=1/\omega_H$), mentre il secondo

transitorio (detto **transitorio lento**) è determinato essenzialmente dalla costante di tempo τ_L associata alla frequenza di taglio inferiore (cioè $\tau_L = 1/\omega_L$).

Quanto minore è τ_H (cioè quanto più alta è ω_H), tanto più pronta è la risposta del sistema e quindi tanto più rapido è il transitorio in risposta ai fronti ripidi dell'ingresso; in modo analogo, quanto maggiore è τ_L (cioè quanto più alta è ω_L), tanto più lento è il transitorio ad essa associato, in modo che l'uscita possa mantenersi approssimativamente costante con l'ingresso.

Esempio numerico

Consideriamo lo stadio ad emettitore comune indicato nella figura seguente:



I dati sul punto di lavoro ed il valore del guadagno β sono tali che $g_m = 100 \text{ (mA/V)}$ e $r_\pi = 0.4 \text{ (k}\Omega\text{)}$.

Ipotizzando anche che $C_e = 103 \mu\text{F}$, vogliamo determinare la risposta del circuito ad un gradino di tensione di 1mV in ingresso.

Un gradino di tensione, come detto in precedenza, è un segnale estremamente veloce (cioè ad alta frequenza) in corrispondenza del proprio fronte di salita, mentre dopo è un segnale estremamente lento (cioè a bassa frequenza). Allora, la risposta del sistema a questo ingresso può essere interpretata nel modo seguente: in corrispondenza del fronte di salita, il circuito è sollecitato da un segnale ad alta frequenza, per cui la sua risposta viene determinata dalla frequenza di taglio superiore; subito dopo, invece, la sollecitazione al circuito è molto lenta, per cui la risposta è determinata dalla frequenza di taglio inferiore.

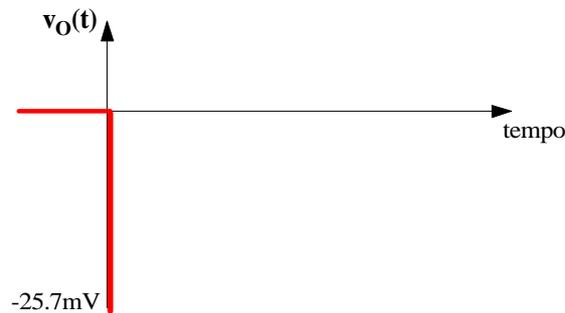
Dobbiamo allora calcolare per prima cosa le frequenze di taglio. Tuttavia, non abbiamo alcuna informazione circa gli elementi che determinano il comportamento in alta frequenza del circuito (vale a dire che non conosciamo le capacità C_π e C_μ): questo ci consente senz'altro di assumere infinita la frequenza di taglio superiore, il che significa che il circuito risponde in modo ideale alla sollecitazione ad alta frequenza, cioè con la stessa velocità: così come l'ingresso passa istantaneamente da 0V a 1mV, allo stesso modo si può ipotizzare che l'uscita passi istantaneamente da 0V ad un certo valore. Quest'ultimo, poi, è pari al prodotto dell'ampiezza (1mV) dell'ingresso per il guadagno del circuito a centro banda.

Dobbiamo quindi calcolare questo guadagno sul circuito a centro banda: questo circuito non presenta alcuna capacità, in quanto la C_e ha effetti solo in bassa frequenza, per cui può essere sostituita con un cortocircuito, mentre C_π e C_μ hanno effetti solo in alta frequenza, per cui possono essere sostituite con dei circuiti aperti; si tratta, dunque, del circuito equivalente di un classico stadio a degenerazione di emettitore, il cui guadagno è

$$A_v = -g_m R_C \frac{r_\pi}{r_\pi + R_s} = -25.7$$

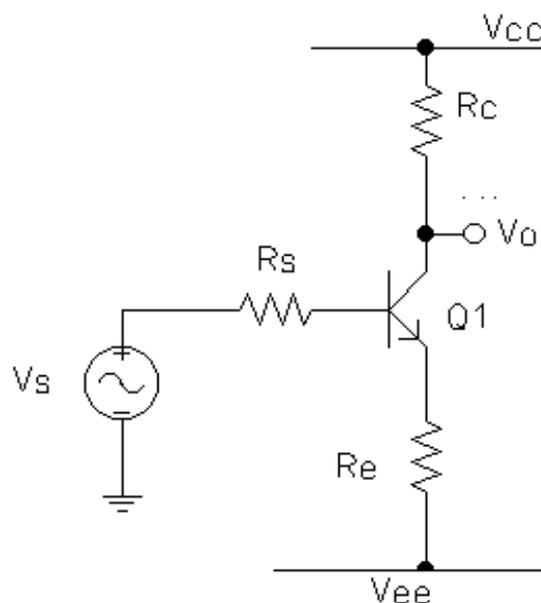
Quindi, quando l'ingresso passa istantaneamente da 0V a 1mV, l'uscita passa istantaneamente da 0V al valore $v_{INIZIALE} = A_v \cdot 1mV = -25.7mV$.

Possiamo dunque cominciare a tracciare l'andamento della risposta nel modo seguente:



Questo, dunque, per quanto riguarda l'andamento dell'uscita in corrispondenza del fronte di salita del gradino in ingresso.

Per quanto riguarda, invece, l'andamento dell'uscita a regime ($t \rightarrow \infty$), così come l'ingresso si mantiene costante, anche l'uscita si dovrà mantenere costante su un certo valore. Tale valore, dato che l'ingresso è costante (cioè a frequenza nulla), sarà il prodotto dell'ampiezza (1mV) dell'ingresso per il guadagno statico del circuito. Dobbiamo allora calcolare questo guadagno sul circuito originario, senza però la C_e , che in continua è un circuito aperto:

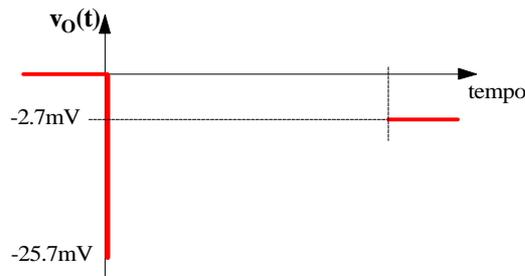


Abbiamo un classico stadio a degenerazione di emettitore, per il quale il guadagno statico vale

$$a_0 = -\frac{\beta R_L}{R_S + r_\pi + (\beta + 1)R_E} = -2.7$$

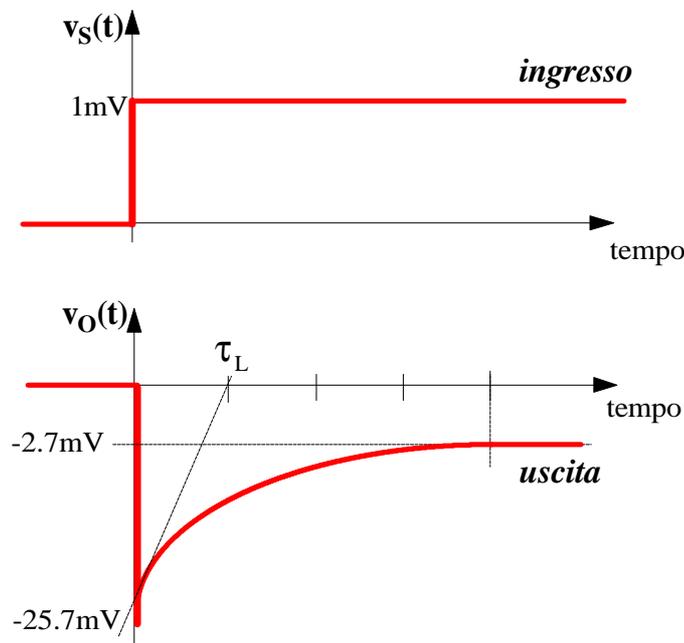
Quindi, quando l'ingresso è costante sul valore 1mV, l'uscita è a sua volta costante sul valore $v_{\text{REGIME}} = a_0 \cdot 1\text{mV} = -2.7\text{mV}$.

Possiamo allora perfezionare ancora l'andamento dell'uscita:

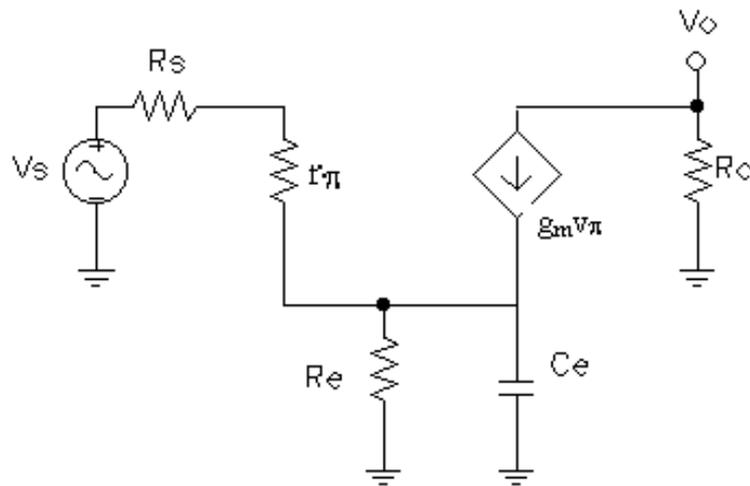


A questo punto, restano da individuare due cose: in primo luogo, dopo quanto tempo si può ritenere che l'uscita sia a regime; in secondo luogo, il *transitorio lento*, ossia l'andamento dell'uscita nella regione intermedia tra il fronte iniziale di discesa e il valore finale di regime.

Entrambe queste informazioni si ricavano calcolando la *frequenza di taglio inferiore* ω_L , cui è associata la costante di tempo $\tau_L = 1/\omega_L$ che caratterizza il transitorio lento (nel senso che tale transitorio avviene con questa costante di tempo e si può assumere che abbia termine dopo circa $4\tau_L$):



Andiamo dunque a calcolare $\tau_L = 1/\omega_L$, usando il circuito equivalente per piccoli segnali dell'amplificatore ottenuto includendo solo la C_e :



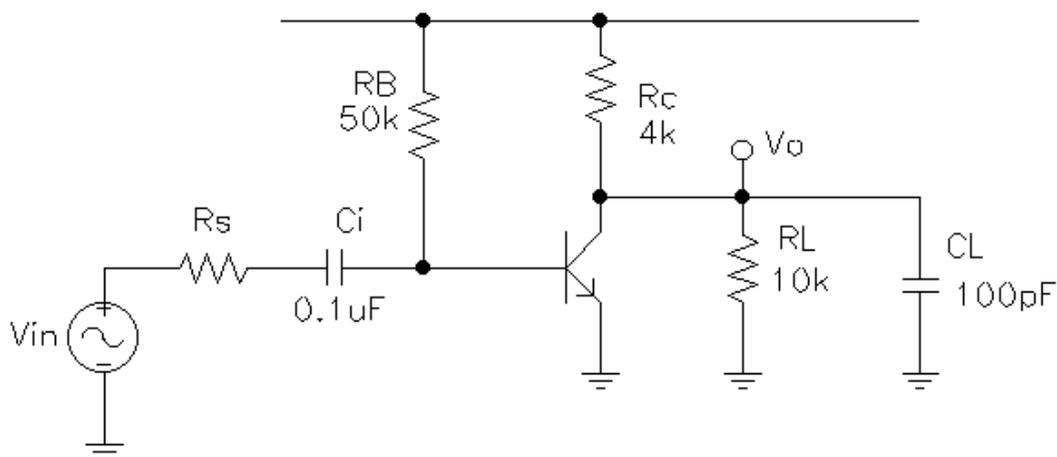
All'unica capacità presente (C_e) corrisponde l'unico polo del circuito (sempre con riferimento alla bassa frequenza) e quindi la frequenza di tale polo è un'ottima stima della frequenza di taglio inferiore: passivando l'ingresso e calcolando la resistenza R vista dai morsetti di C_e , si ha che

$$\frac{1}{\omega_L} = \tau_L = C_e R = C_e \left[R_e // \left(\frac{R_s + r_\pi}{\beta + 1} \right) \right] = 3.12 \text{ msec}$$

Il transitorio lento è dunque caratterizzato da una costante di tempo di 3.12 msec, il che significa che tale transitorio si esaurisce, portando l'uscita a regime, dopo circa 12 msec.

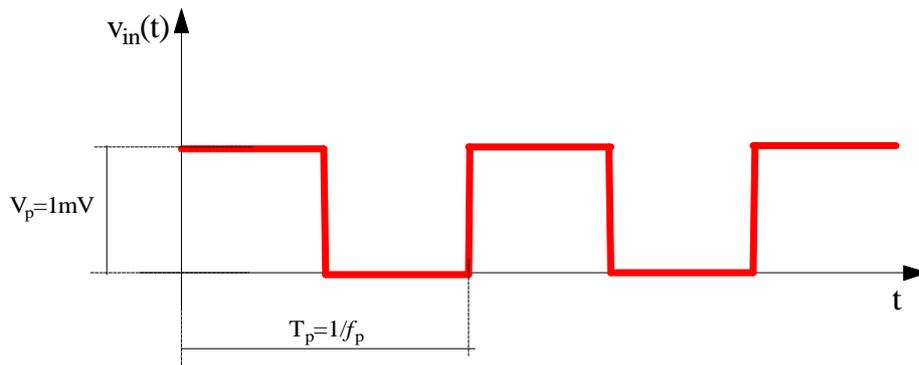
Esempio numerico

Usiamo un esempio numerico per chiarire i concetti appena esposti. Consideriamo lo stadio ad emettitore comune rappresentato nella figura seguente:



Supponiamo che il punto di lavoro sia tale che $g_m = 40 \text{ (mA/V)}$ e $r_\pi = 2.5 \text{ (k}\Omega\text{)}$. Supponiamo inoltre che $C_\pi = 10 \text{ pF}$ e $C_\mu = 1 \text{ pF}$.

Supponiamo infine che l'ingresso al circuito sia un treno di impulsi del tipo seguente:

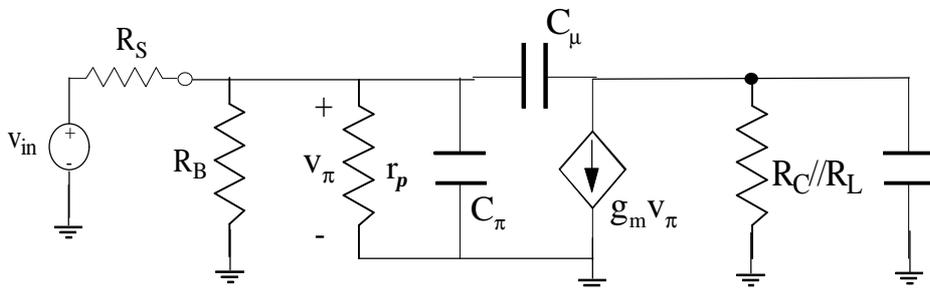


Gli impulsi hanno ampiezza di 1 mV.

Ci chiediamo come sia fatta l'uscita temporale del circuito nel caso in cui la frequenza dell'ingresso sia $f_p=200\text{kHz}$ oppure $f_p=2.5\text{kHz}$.

Per rispondere a questa domanda, dobbiamo calcolare 3 parametri: in primo luogo, le frequenze di taglio superiore ω_H e inferiore ω_L del circuito, in quanto ad esse corrispondono le costanti di tempo τ_H e τ_L che caratterizzano il transitorio dell'uscita in risposta, rispettivamente, a segnali veloci ed a segnali lenti; in secondo luogo, il guadagno di tensione A_V a centro banda, in modo da conoscere il valore di regime dell'uscita.

Per quanto riguarda la frequenza di taglio superiore, dobbiamo far riferimento al circuito equivalente dello stadio con incluse le capacità intrinseche e la capacità di carico C_L che è dello stesso loro ordine di grandezza (mentre le altre due capacità sono sufficientemente grandi da poter essere sostituite da cortocircuiti):

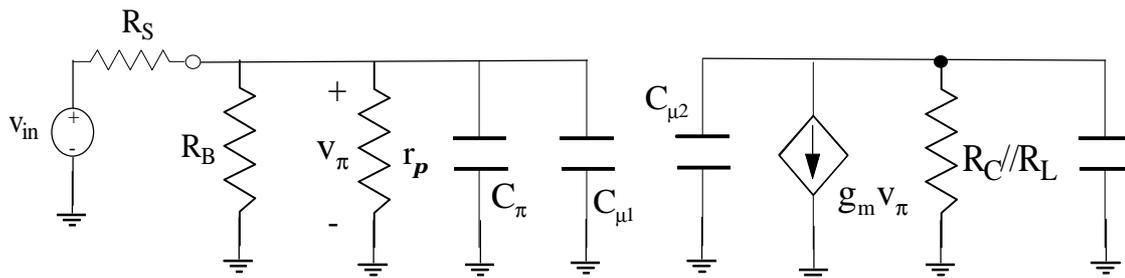


Per determinare la frequenza di taglio ω_H di questo circuito, conviene far uso dell'equivalente di Miller applicato alla C_μ , che è posta tra due nodi tra i quali sussiste un guadagno di tensione (a centro banda) pari a $-g_m(R_C // R_L)$: le due capacità equivalenti sono allora

$$\text{tra base e massa} \quad \longrightarrow C_{\mu 1} = C_\mu (1 - A_V) = C_\mu (1 + g_m (R_C // R_L)) = 108\text{pF}$$

$$\text{tra collettore e massa} \quad \longrightarrow C_{\mu 2} = C_\mu \left(1 - \frac{1}{A_V} \right) \cong C_\mu = 1\text{pF}$$

Così facendo, il circuito risulta diviso in due parti disaccoppiate tra di loro:



Ciascuna delle due parti del circuito introduce perciò un proprio polo:

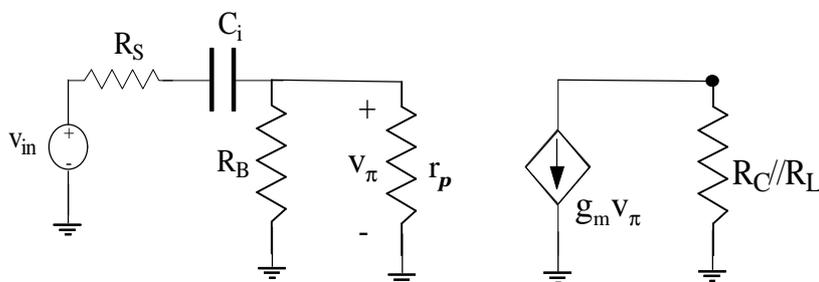
$$\text{parte sinistra} \longrightarrow \omega_1 = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{(C_{\mu 1} + C_{\pi})(R_S // R_B // r_{\pi})} = \frac{1}{49(\text{n sec})} = 2 * 10^7 \text{ (rad / sec)}$$

$$\text{parte destra} \longrightarrow \omega_2 = \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{(C_{\mu 1} + C_L)(R_C // R_L)} = \frac{1}{270(\text{n sec})} = 3.7 * 10^6 \text{ (rad / sec)}$$

Il polo dominante è quello a frequenza più piccola, per cui si tratta di ω_2 : concludiamo che la frequenza di taglio superiore del circuito che stiamo considerando è

$$f_H = \frac{\omega_H}{2\pi} = \frac{\omega_2}{2\pi} = 589(\text{kHz})$$

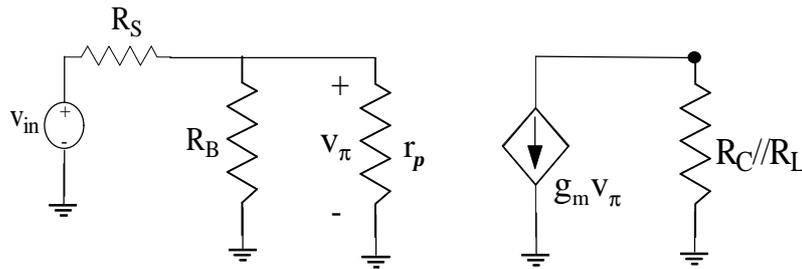
Passiamo adesso al calcolo della frequenza di taglio inferiore, per calcolare la quale dobbiamo considerare il circuito equivalente dello stadio includendo solo la C_i e sostituendo le altre capacità con dei circuiti aperti:



Abbiamo dunque una sola capacità, per cui la frequenza di taglio inferiore sarà quella del polo associato alla suddetta capacità:

$$\omega_L = \frac{1}{\tau_L} = \frac{1}{C_i (R_S + (R_B // r_{\pi}))} = \frac{1}{290(\mu \text{ sec})} = 3.45 * 10^3 \text{ (rad / sec)} \longrightarrow f_L = \frac{\omega_L}{2\pi} = 550(\text{Hz})$$

Infine, per continuare a caratterizzare la risposta del circuito ci serve conoscere il guadagno a centro banda, da ricavarsi sul circuito equivalente dello stadio con le capacità in alta frequenza sostituite con dei circuiti aperti e con le capacità in bassa frequenza sostituite con dei cortocircuiti:



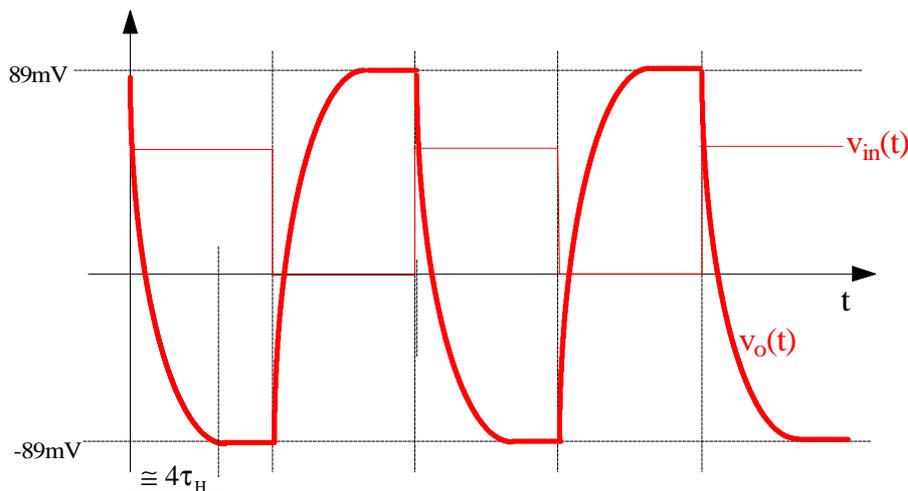
Abbiamo un semplice stadio ad emettitore comune, per il quale la tensione di ingresso è la partizione di v_{in} sul parallelo tra R_B ed r_π : abbiamo perciò che

$$A_v = -\frac{R_B // r_\pi}{R_S + R_B // r_\pi} g_m (R_C // R_L) = -89$$

Calcolando le frequenze di taglio ed il guadagno a centro banda, abbiamo in pratica caratterizzato la risposta in frequenza del circuito, il che ci consente di individuare la risposta del circuito stesso al treno di impulsi in ingresso.

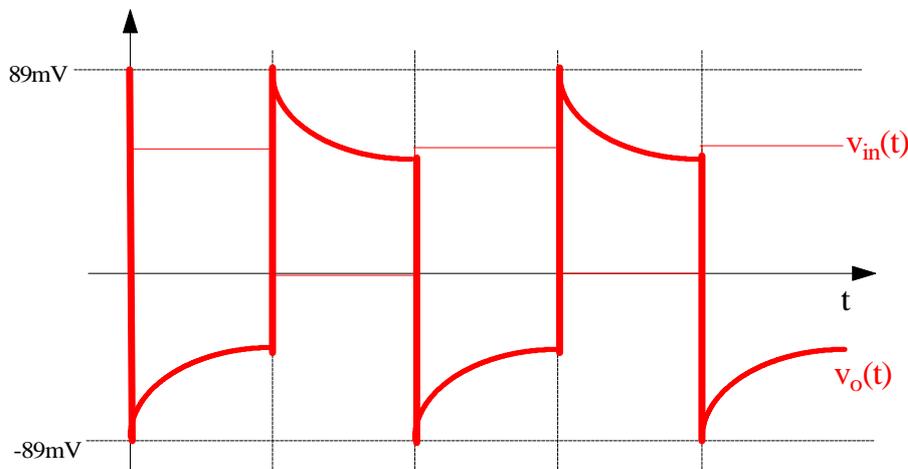
Cominciamo dal caso in cui tale treno di impulsi ha frequenza $f_p=200\text{kHz}$, cui corrisponde un periodo $T_p=1/f_p=5(\mu\text{sec})$ e quindi un semiperiodo di $2.5\mu\text{sec}$. Il semiperiodo rappresenta la durata di ciascun impulso ed è evidentemente molto minore della costante di tempo $\tau_L=290(\mu\text{sec})$ con cui il circuito risponde a segnali lenti (come appunto l'impulso nel suo tratto costante): deduciamo che non è visibile il transitorio associato a τ_L . Al contrario, il semiperiodo è di un solo ordine di grandezza superiore alla costante di tempo $\tau_H=270(\text{nsec})$ con cui il circuito risponde a segnali veloci (come l'impulso nel suo fronte iniziale di salita o di discesa): dato che $T_p \approx 10\tau_H$, deduciamo che è ben visibile il transitorio con cui il circuito risponde al fronte iniziale di ciascun impulso.

In base a queste considerazioni e considerando inoltre che il circuito è invertente con guadagno 89, possiamo aspettarci un segnale di uscita fatto approssimativamente nel modo seguente:



Passiamo adesso a considerare il caso in cui il treno di impulsi in ingresso ha frequenza di 2.5kHz , cui corrisponde un semiperiodo di $200(\mu\text{sec})$. In questo caso, l'ingresso è più lento del caso precedente, il che comporta che sia ben visibile il transitorio legato alla costante di tempo $\tau_L=290(\mu\text{sec})$ in bassa frequenza: dato,

comunque, che questo transitorio si esaurirebbe dopo circa $4\tau_L=1160(\mu\text{sec})$, è evidente che, essendo il semiperiodo di soli $200\mu\text{sec}$, esso non ha il tempo di esaurirsi (cioè di portare l'uscita a zero), per cui la risposta sarà una successione di transitori interrotti. Avremo cioè un andamento del tipo seguente:



Non è invece visibile il transitorio con cui lo stadio risponde ai fronti ripidi di discesa e di salita degli impulsi: il motivo è che la costante di tempo $\tau_H=270(\text{nsec})$ è molto più bassa (circa tre ordini di grandezza) del semiperiodo $T_P\cong 200(\mu\text{sec})$, per cui il transitorio ad essa associato non sarebbe visualizzabile su nessun display.

Sistemi con due poli nella funzione di trasferimento

Abbiamo dunque evidenziato, nei paragrafi precedenti, il legame esistente tra la risposta in frequenza e l'andamento nel tempo di piccoli segnali applicati ad un circuito con una funzione di trasferimento a singolo polo: in questa categoria rientrano, ad esempio, lo stadio ad emettitore comune e, quasi sempre, gli amplificatori operazionali.

Considerazioni analoghe possono essere fatte su circuiti rappresentati da una funzione di trasferimento a più poli, anche se l'andamento temporale dell'uscita può in questi casi essere molto diverso da quello visto nelle figure precedenti.

Di particolare importanza sono i sistemi aventi **funzione di trasferimento del secondo ordine**, dei quali diamo adesso dei rapidi cenni, citando i principali risultati senza dimostrarli.

Un sistema dinamico lineare stazionario del secondo ordine ha una funzione di trasferimento del tipo seguente:

$$a(s) = \frac{k\omega_m^2}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}$$

Ponendo in ingresso al sistema un gradino di ampiezza unitaria, si ottiene la seguente risposta temporale (può essere una tensione o una corrente):

$$y(t) = H(t) - \frac{e^{-\delta\omega_m t}}{\sin \varphi} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

dove $\omega_d = \omega_m \sqrt{1-\delta^2}$ e dove l'angolo φ è tale da soddisfare la duplice condizione

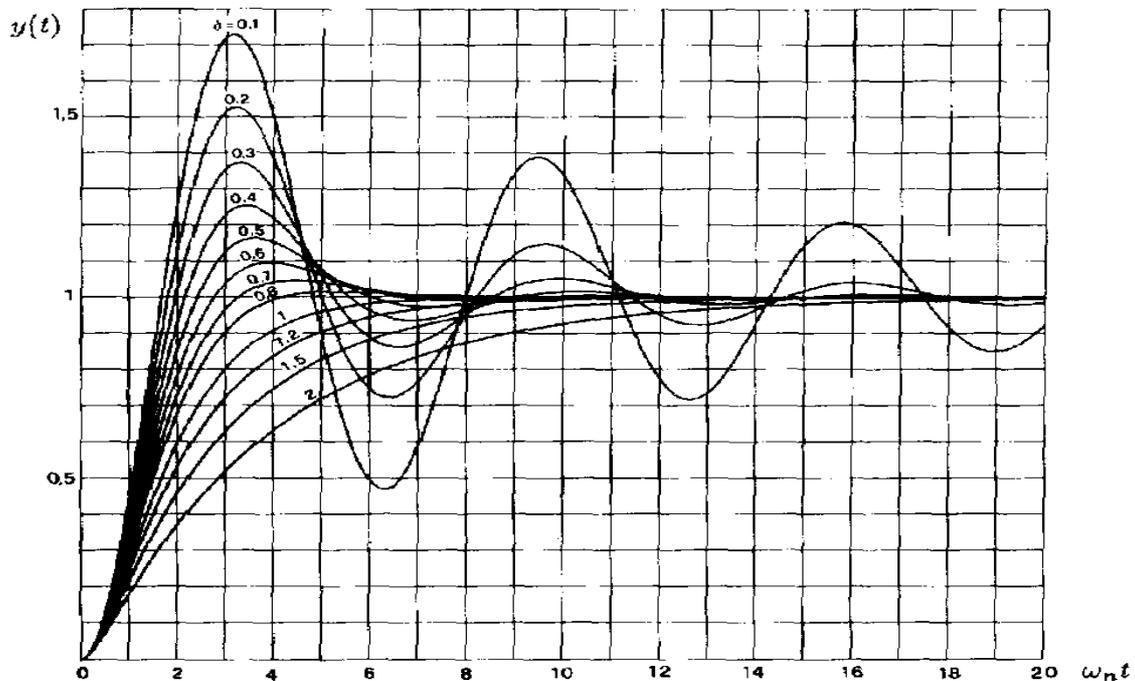
$$\begin{cases} \sqrt{1-\delta^2} = \sin\varphi \\ \delta = \cos\varphi \end{cases}$$

Si individua anche questa volta una **costante di tempo**, che è

$$\tau = 1/\delta\omega_m$$

Questa costante di tempo caratterizza il termine esponenziale $e^{-\delta\omega_m t}$, il quale smorza o amplifica il termine sinusoidale $\sin(\omega_d t + \varphi)$ a seconda che il coefficiente di smorzamento δ sia positivo o negativo: quando $\delta > 0$, il termine sinusoidale si smorza e $y(t)$ tende asintoticamente ad $H(t)$, mentre, quando $\delta < 0$, l'oscillazione sinusoidale assume ampiezza sempre crescente e quindi $y(t)$ diverge da $H(t)$.

La figura seguente mostra l'andamento di $y(t)$ per vari valori del coefficiente di smorzamento δ e con scala dei tempi normalizzata in rapporto all'inverso della pulsazione naturale ω_m :



Un caso assolutamente particolare è quello in cui $\delta=1$: in questo caso, infatti, risulta

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+2\omega_m}{(s+\omega_m)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_m} - \frac{\omega_m}{(s+\omega_m)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_m} - \omega_m \frac{1}{(s-(-\omega_m))^2}$$

e quindi, antitrasformando, si ottiene

$$y(t) = H(t) - H(t)e^{-\omega_m t} - \omega_m H(t)te^{-\omega_m t} = H(t) - H(t)(1 - \omega_m t)e^{-\omega_m t}$$

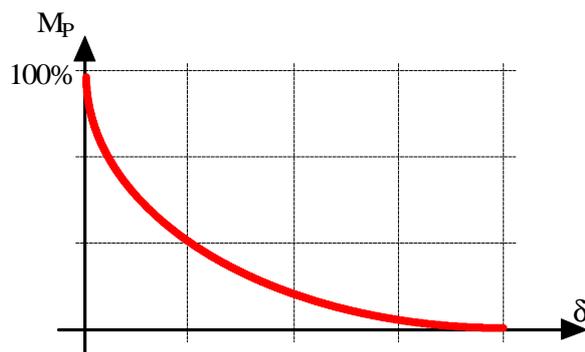
Non si ha dunque alcuna **sovraelongazione (overshoot)**, intesa come differenza positiva tra il valore raggiunto dall'uscita ed il valore finale di regime, visto che non

c'è più il termine sinusoidale: $y(t)$ tende asintoticamente al valore finale $H(t)$ senza mai superarlo.

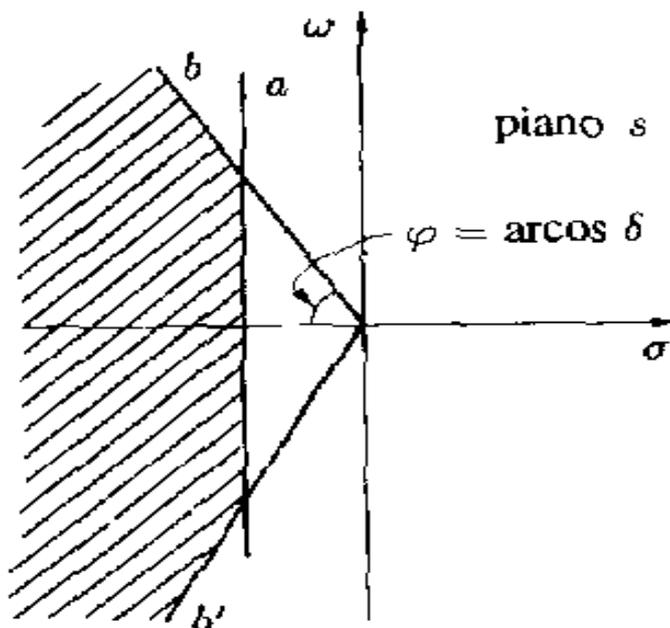
Può interessare la relazione esatta tra il coefficiente di smorzamento δ ed il valore della **massima sovralongazione percentuale**, ossia la differenza tra il massimo raggiunto dall'uscita ed il valore finale, espressa in %. Si trova che

$$M_p(\%) = e^{-\frac{\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \cdot 100$$

il che significa che *la massima sovralongazione percentuale è funzione univocamente del valore del coefficiente di smorzamento (mentre non dipende da ω_m) ed è uguale al 100% quando $\delta=0$:*



Talvolta, viene imposta una specifica sul valore della massima sovralongazione, nel senso che, ad esempio, si chiede che M_p non superi un certo massimo assegnato. In questo caso, è necessario che i 2 poli della funzione di trasferimento del sistema si trovino nel settore delimitato dalle rette b e b' della figura seguente:



Le suddette rette b e b' rappresentano *luoghi di poli* corrispondenti ad un dato valore del coefficiente di smorzamento, come avremo modo di approfondire in seguito.

Analisi in frequenza degli amplificatori a più stadi

L'analisi del comportamento in frequenza dei circuiti a singolo stadio ha evidenziato, nei precedenti paragrafi, come, anche per circuiti semplici, il problema possa diventare complesso, data la presenza di numerosi effetti capacitivi. L'analisi rigorosa del comportamento in frequenza dei circuiti a più stadi, comprendenti ciascuno parecchi elementi capacitivi, raggiunge perciò una tale difficoltà che i risultati sono spesso di scarsa utilità. Per questo motivo, sono stati sviluppati dei **metodi di analisi approssimata** che siano di supporto alla fase di progetto del circuito, nonché dei programmi di simulazione al calcolatore tramite i quali verificare il circuito finale.

Uno di questi metodi di analisi è il cosiddetto **metodo delle costanti di tempo**, che verrà descritto in seguito. Adesso, invece, è importante fare alcune considerazioni riguardanti i *poli dominanti*.

Approssimazione con un polo dominante

Dato un qualsiasi circuito elettronico, è possibile ricavare per esso, mediante l'analisi per piccoli segnali, una funzione di trasferimento del tipo seguente (genericamente, si tratterà di un guadagno), a prescindere dal numero di stadi da cui è composto:

$$a(s) = \frac{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \dots + c_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

dove c_m, c_{m-1}, \dots, c_0 e a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 sono delle costanti.

Molto spesso, la funzione di trasferimento contiene solamente dei poli oppure, pur contenendo degli zeri, li si può tranquillamente trascurare (è il caso dello zero fuori banda visto per lo stadio ad emettitore comune): in questo caso, l'espressione di $a(s)$ assume la forma

$$a(s) = \frac{K}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

Indicate con p_1, p_2, \dots, p_n le radici del denominatore, cioè i poli di $a(s)$, possiamo fattorizzare il denominatore, scrivendo

$$a(s) = \frac{K}{\left(1 - \frac{s}{p_1}\right) \left(1 - \frac{s}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{s}{p_n}\right)}$$

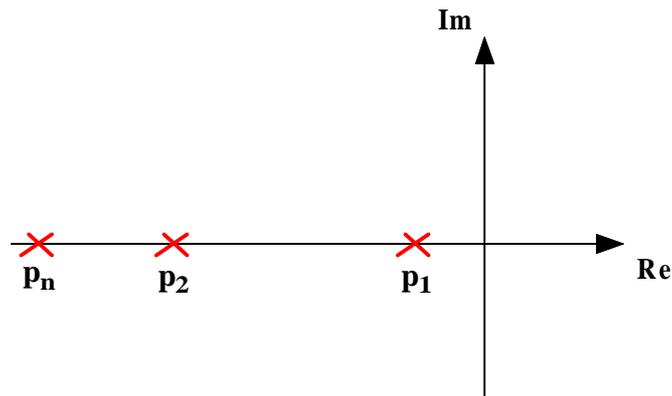
Facendo un confronto tra le ultime due espressioni di $a(s)$, è facile ricavare che il coefficiente b_1 del termine di grado 1 a denominatore è legato ai poli dalla seguente espressione:

$$b_1 = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$$

Nella pratica, un caso molto frequente, come si è visto nei paragrafi precedenti, è quello in cui un polo è **dominante** rispetto agli altri: se supponiamo che sia p_1 il polo dominante, ciò significa che risulta $\omega_{p_1} = |p_1| \ll |p_2|, |p_3|, \dots, |p_n|$ e quindi anche che

$$\left| \frac{1}{p_1} \right| \gg \sum_{i=2}^n \left| \frac{1}{p_i} \right| \xrightarrow{\text{da cui}} b_1 \cong \left| \frac{1}{p_1} \right|$$

Questa situazione è mostrata nel piano complesso della figura seguente:



Tornando adesso all'espressione di $a(s)$, poniamo $s=j\omega$ in modo da ricavare la risposta armonica del circuito, ossia l'andamento del guadagno con la frequenza:

$$a(j\omega) = \frac{K}{\left(1 - \frac{j\omega}{p_1}\right) \left(1 - \frac{j\omega}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{j\omega}{p_n}\right)} = \frac{K}{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_n}\right) \dots \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_n}\right)}$$

Se il polo a più bassa frequenza (ricordiamo che stiamo considerando il modello alle alte frequenze) è abbastanza lontano dagli altri, allora la funzione di risposta armonica (almeno fino alla frequenza di taglio superiore) può essere espressa come

$$a(j\omega) \cong \frac{K}{1 - j\omega \cdot \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \right)}$$

Questo perché, essendo $\frac{\omega_h}{p_i} < 1$, risulta anche $\frac{\omega_h^2}{p_i \cdot p_j} \ll 1$ e questo a maggior ragione vale per i termini di potenza maggiore di 2.

A questo punto, imponiamo che, ad una certa frequenza ω_H (**frequenza di taglio superiore**), il modulo del guadagno $a(j\omega)$ sia pari a $\frac{|K|}{\sqrt{2}}$:

$$|a(j\omega_H)| = \frac{|K|}{\sqrt{2}}$$

Elevando al quadrato ambo i membri e sostituendo l'espressione di $a(j\omega)$, possiamo scrivere che

$$\frac{K^2}{1 + \omega_H^2 \cdot \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \right)^2} = \frac{K^2}{2}$$

Da qui deduciamo dunque che

$$\omega_H^2 \cdot \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \right)^2 = 1 \longrightarrow \frac{1}{\omega_H^2} = \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \right)^2$$

Abbiamo una equazione di secondo grado in $1/\omega_H$, le cui soluzioni sono

$$\frac{1}{\omega_H} = \pm \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \right)$$

La soluzione con il segno “+” non è accettabile, poiché si avrebbe un valore negativo di pulsazione che fisicamente non ha senso, e quindi concludiamo che

$$\frac{1}{\omega_H} = - \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \right) = b_1 = \frac{a_1}{a_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_H \cong \frac{a_0}{a_1}}$$

Questa relazione mostra dunque un metodo per stimare, con buona approssimazione, la frequenza di taglio superiore senza conoscere direttamente le singolarità (poli e/o zeri), ma conoscendo semplicemente i coefficienti dell'equazione caratteristica del circuito stesso.

E' bene comunque specificare che questo metodo non va più bene se il polo dominante è multiplo, oppure ci sono più poli vicini al polo dominante.

Si nota infine, che, nell'ipotesi di singolo polo dominante, dato che risulta $b_1 \cong \left| \frac{1}{p_1} \right|$, risulta anche $\omega_H \cong |p_1|$, come già detto in precedenza.

Autore: Sandro Petrizzelli

e-mail: sandry@iol.it

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>