

Appunti di Misure Elettriche

Capitolo 1 - Misura e incertezza (parte I)

Metodi di misura.....	2	
Incertezza di misura.....	2	
Il risultato di una misura.....	3	
Errori.....	4	
Propagazione degli errori nelle misure indirette.....	5	
<i>Esempi</i>	6	
Propagazione dell'incertezza nelle misure indirette.....	9	
<i>Osservazione: incertezza in una misura indiretta generica</i>	11	
Classificazione degli errori.....	12	
<i>Errori sistematici</i>	15	
Accuratezza e precisione.....	17	
Errore stimato.....	18	
Media, deviazione media, deviazione standard e varianza di un campione di misura.....	19	
Concetti di frequenza e di classi.....	22	
Probabilità e statistica.....	24	
Concetto di probabilità.....	24	
Variabili aleatorie.....	24	
<i>Variabili aleatorie discrete</i>	25	
<i>Variabili aleatorie continue</i>	25	
Il significato matematico della densità.....	26	
<i>Osservazione: peso nullo dei singoli punti</i>	26	
Distribuzione cumulativa di una variabile aleatoria continua.....	27	
Valore atteso, covarianza e correlazione.....	28	
Stime non distorte, efficienti, consistenti.....	30	
Momenti centrali e momenti assoluti.....	31	
variabili aleatorie continue.....	34	
Distribuzione binomiale.....	36	
Distribuzione di Poisson.....	37	
Distribuzione uniforme.....	37	
Distribuzione di Gauss (o distribuzione normale).....	38	
<i>Calcolo della distribuzione cumulativa per una variabile di Gauss</i>	40	
<i>Funzione densità di probabilità congiunta</i>	42	
<i>Indipendenza di due variabili aleatorie con distribuzione gaussiana</i>	43	
<i>Funzione densità di probabilità condizionata</i>	44	
<i>Combinazione lineare di variabili aleatorie con distribuzione gaussiana</i>	44	
Distribuzione esponenziale.....	45	
Distribuzione di Weibull.....	45	
Distribuzione gamma.....	46	
<i>Distribuzione chi quadro</i>	47	
Distribuzione t (o di Student).....	47	

METODI DI MISURA

Con il termine **misurazione** indichiamo una serie di operazioni aventi lo scopo di determinare il **valore** di una quantità. Si tratta, quindi, del processo che porta alla quantificazione di una grandezza.

Il risultato della misurazione è la **misura**. Per semplicità, nel seguito parleremo di misura anziché di misurazione, ma è bene tener presente la differenza tra i due termini.

L'esecuzione di una misura richiede, teoricamente, un confronto tra la quantità incognita che si vuol misurare e una quantità nota, che è presa come **campione di riferimento**.

Per **metodo di misura** si intende la sequenza logica di operazioni, descritte in modo generico, impiegate nell'esecuzione delle misure. Una volta fissato, a livello del tutto generale, un *metodo di misura*, si procede all'effettuazione di una specifica misura: per **procedura di misura** si intende allora l'insieme di operazioni, descritte in modo specifico, utilizzate nell'esecuzione di tale specifica misura, in accordo al metodo di misura prefissato.

Per **misurando** intendiamo una quantità soggetta a misura.

Ci sono due possibilità di effettuare una misura:

- il **metodo diretto** di misura permette di ottenere il risultato della misura direttamente dalla lettura dello strumento utilizzato, senza la necessità di conoscere esplicitamente valori di altri parametri, eccetto ovviamente quelli delle grandezze che influenzano la misura stessa¹; una misura ottenuta con il metodo diretto è ovviamente detta *misura diretta*;
- si parla invece di **metodo indiretto** di misura quando il risultato della misura è ottenuto dalla combinazione di risultati di misure dirette su parametri funzionalmente legati al misurando. Parliamo perciò in questo caso di una *misura indiretta*. Ad esempio, una misura di resistenza si può ottenere misurando la tensione ai suoi capi e la corrente attraverso di essa e facendo poi il rapporto.

La maggior parte delle misure è ottenuta per via indiretta, quasi sempre per motivi di costo. Ad esempio, una misura di densità di una data sostanza potrebbe essere ottenuta direttamente tramite un apparecchio che si chiama *densimetro*, ma è decisamente più comodo misurare direttamente la massa ed il volume della sostanza e farne poi il rapporto.

INCERTEZZA DI MISURA

Tutti i risultati di una misura sono affetti da una incertezza: l'**incertezza di misura** è il parametro, associato al risultato di una misura, che caratterizza la *dispersione* dei valori che potrebbero essere ragionevolmente attribuiti al misurando. Ad esempio, il risultato della misura di una tensione V sarà scritto nella forma

$$V = 15 \pm 0.5 \text{ mV}$$

La quantità 0.5 mV rappresenta l'incertezza della misura effettuata. Il problema della valutazione di questa quantità è l'oggetto della **teoria degli errori e dell'incertezza di misura**².

I motivi per cui non potremo mai eliminare l'incertezza di una qualsiasi misura sono molteplici:

¹ Si tratta delle cosiddette grandezze di influenza, che saranno esaminate in seguito.

² In generale, la **teoria degli errori** comprende tutti i procedimenti di valutazione e minimizzazione degli errori nei *procedimenti approssimati* (sperimentali e/o matematici). Non esiste un trattato esaustivo della teoria degli errori.

- imperfezione strutturale nei componenti degli strumenti utilizzati (**incertezza strumentale**): nonostante la tecnologia metta a disposizione strumenti sempre più raffinati, non si potranno mai avere strumenti ideali, per cui questa causa di incertezza non potrà mai essere nulla;
- inadeguatezza del **campione** di confronto: gli *Istituti Metrologici* mettono a disposizione campioni sempre più raffinati per venire incontro alle esigenze della tecnica, ma questo non vale sempre;
- limitatezza della scala o del sistema numerico di visualizzazione dello strumento;
- frettolosità da parte dell'operatore;
- imperfezioni del metodo di misura utilizzato e/o inadeguatezza del modello matematico prescelto (**incertezza intrinseca** del misurando). Ogni modello può essere reso più o meno complicato, per cui questo fattore di incertezza è generalmente trascurabile; il problema è che un modello complicato risulta talvolta poco pratico nella sua applicazione, per cui bisogna sempre trovare un giusto compromesso.

A queste cause si aggiunga il fatto che l'inserzione di uno strumento di misura in un sistema quasi sempre altera le condizioni iniziali del sistema stesso e non consente perciò la misura del valore che il misurando aveva prima dell'inserzione. Quindi, *il processo di misura di per sé disturba il sistema e altera il valore delle quantità da misurare*. L'entità di tale disturbo varia, evidentemente, da strumento a strumento; uno degli aspetti più importanti della **scienza delle misure** è quello di minimizzare questo disturbo.

Nel seguito, faremo sempre riferimento a quanto riportato nella "Guide to the expression of uncertainty in measurement", redatta dall' **ISO** (*International Organization for Standardization*): in questo manuale (che nel seguito chiameremo semplicemente **GUIDA**) si afferma che lo scopo di una misura è determinare il valore (non il valore vero) del misurando.

Una misura deve iniziare con una appropriata specificazione del **misurando**, del **metodo di misura** e della **procedura di misura**.

IL RISULTATO DI UNA MISURA

Supponiamo di voler misurare una certa grandezza X, ad esempio il valore di una tensione tra due punti di un circuito. Immaginiamo allora di andare a compiere una serie di **misure ripetute** di questa tensione, sforzandoci di mantenere sempre le stesse condizioni ambientali. In generale, *noteremo che i risultati delle misure non sono uguali tra di loro*: in particolare, accade generalmente che le prime cifre significative si mantengono uguali per tutte le misure, mentre invece le altre variano da misura a misura. Per esempio, se la tensione da misurare è realmente di 12V, i valori che potremo ottenere saranno 12.1, 11.9, 12, 12.2, 11.8 e così via.

Le cause di questa variabilità dei risultati delle misure sono molteplici e sono state in parte accennate prima; citiamo:

- le *perturbazioni ambientali* (variazioni di temperatura, di pressione, di umidità, di campi magnetici ed elettrici di natura parassita e così via);
- *limitazione tecnologiche* della strumentazione (imperfezioni costruttive, instabilità della taratura);
- limitazioni nel *potere risolutivo* dell'occhio e dell'*abilità di lettura* dell'operatore: in particolare, queste limitazioni riguardano solo gli **strumenti analogici** (ad esempio un

multimetro analogico), in quanto gli **strumenti digitali** (ad esempio un **multimetro digitale**) forniscono indicazioni numeriche dei valori misurati.

ERRORI

Prima di eseguire una misura di un misurando, è possibile avere a disposizione una stima del valore di tale misurando³. Indichiamo allora con V il **valore vero** (che non è mai noto) del misurando e con A la **stima** (che invece è nota) di V .

Al fine di operare alcune possibili correzioni alle misure eseguite, è tradizionalmente risultato utile introdurre il concetto di errore.

Si definisce **errore assoluto**, E , la differenza tra il valore misurato X e la stima A del valore del misurando:

$$E = X - A$$

Se noi conoscessimo esattamente il valore del misurando, potremmo anche valutare esattamente l'errore assoluto. Al contrario, del misurando abbiamo solo la stima A , per cui l'errore assoluto E non potrà mai essere conosciuto esattamente e quindi la correzione non potrà mai essere completa. Questo è il motivo per cui una misura sarà sempre affetta da incertezza. Occorre però distinguere le parole "errore" ed "incertezza", che non sono assolutamente dei sinonimi e non vanno perciò confuse: possiamo dire genericamente che l'**incertezza** (simbolo: U) di una misura è un qualunque numero positivo di cui si sappia con certezza (!) che è maggiorante del valore assoluto dell'errore E :

$$|E| \leq U$$

Altre due fondamentali differenze tra errore ed incertezza sono le seguenti:

- in primo luogo, mentre gli errori sono affetti da segno, le incertezze sono sempre quantità positive;
- in secondo luogo, mentre l'incertezza può essere valutata esattamente, lo stesso non è possibile per l'errore, in quanto esso dipende dal valore vero della grandezza sotto misura e tale valore non è conoscibile perfettamente.

In sintesi, ogni volta che compiamo una misura, noi compiamo anche un errore, che però non possiamo conoscere; tutto ciò che possiamo fare è stimare tale errore tramite un suo maggiorante, quale è appunto l'incertezza.

Lasciando da parte, per il momento, il concetto di incertezza, torniamo agli errori. Si definisce **errore relativo**, e , il rapporto tra l'errore assoluto e la stima del valore del misurando:

$$e = \frac{E}{A} = \frac{X - A}{A}$$

³ Tale stima può derivare dalla disponibilità di un campione o dalla conoscenza del suo valore (e della sua incertezza), oppure dalla definizione convenzionale a priori del valore del misurando, o dal valor medio di misure precedentemente eseguite sullo stesso misurando o da altre informazioni ancora.

Considerando che il valore X si assume comunque abbastanza prossimo al valore A , si può anche porre

$$e = \frac{E}{A} \cong \frac{E}{X}$$

L'errore relativo può anche essere fornito in percentuale, nel qual caso si parla di **errore percentuale**, $e_{\%}$:

$$e_{\%} = \frac{X-A}{A} \cdot 100$$

Segnaliamo inoltre che, essendo l'errore di misura generalmente piccolo, è possibile trattare l'errore assoluto come differenziale, il che significa sostanzialmente scrivere che

$$E = X - A \cong dX \quad \rightarrow \quad e = \frac{X-A}{A} \cong \frac{E}{X} \cong \frac{dX}{X}$$

PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI NELLE MISURE INDIRETTE

Abbiamo detto in precedenza che una **misura indiretta** del misurando è una combinazione dei valori di misure dirette di grandezze funzionalmente legate al misurando stesso:

$$X = f(a, b, c, \dots)$$

La funzione f rappresenta il **legame funzionale** tra il misurando (detto anche **grandezza di uscita**) e le quantità (dette **grandezza di ingresso** e suscettibili di una misura diretta) da cui dipende. Esempio banale di misura indiretta è quello del valore di una resistenza, che può essere ottenuto come rapporto tra la tensione misurata ai capi della resistenza e la corrente che risulta attraversare la resistenza (misurata anch'essa ai capi della resistenza stessa).

Considerando allora che ciascuna misura indiretta presenta un errore, *ci chiediamo come una misura indiretta risenta degli errori delle singole misure dirette da cui è ottenuta*⁴.

Questa analisi è importante in quanto consente, prima di effettuare la misura, di scegliere il metodo più corretto per l'esecuzione della misura stessa. D'altra parte, la valutazione del modo in cui si propagano gli errori non va confusa con la procedura necessaria all'indicazione del risultato finale di una misura indiretta, per la quale è invece necessario far riferimento alla *propagazione dell'incertezza*, della quale si parlerà in seguito.

Consideriamo una grandezza $X = f(a, b, c, \dots)$ che sia funzione di diverse grandezze misurabili a, b, c, \dots . Le misure di ciascuna di queste quantità a, b, c, \dots sono affette da errori ed è possibile studiare, con semplici passaggi matematici, come questi si propagano su X . In particolare, *facciamo l'ipotesi che gli errori siano sufficientemente piccoli da poter confondere l'errore assoluto $E_X = X - A$ con il differenziale totale della funzione X* : quindi l'errore assoluto è

$$E_X = X - A \cong dX = \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db + \frac{\partial f}{\partial c} dc + \dots$$

⁴ In modo analogo, ci porremo in seguito il problema di calcolare l'incertezza della misura indiretta note che siano le incertezze associate alle singole misure dirette.

E' evidente che, in questa formula, i termini da, db, dc, \dots sono gli errori assoluti sulle grandezze a, b, c, \dots , per cui scriviamo che

$$E_x \cong \frac{\partial f}{\partial a} E_a + \frac{\partial f}{\partial b} E_b + \frac{\partial f}{\partial c} E_c + \dots$$

In base a questa relazione, *l'errore assoluto su X è una particolare combinazione lineare degli errori assoluti sulle grandezze a, b, c, ...: i coefficienti della combinazione lineare sono le derivate parziali della funzione f rispetto ad a, b, c, ...*

Ovviamente, dall'errore assoluto possiamo facilmente risalire all'errore relativo, dividendo per il valore X misurato per la grandezza in esame:

$$e_x = \frac{E_x}{A_x} \cong \frac{E_x}{X} \cong \frac{dX}{X} = \frac{1}{X} \left(\frac{\partial f}{\partial a} E_a + \frac{\partial f}{\partial b} E_b + \frac{\partial f}{\partial c} E_c + \dots \right)$$

Moltiplicando e dividendo il termine $\frac{\partial f}{\partial a} E_a$ per a, il termine $\frac{\partial f}{\partial b} E_b$ per b e così via gli altri termini, possiamo scrivere che

$$e_x \cong \frac{1}{X} \left(a \frac{\partial f}{\partial a} \frac{E_a}{a} + \frac{\partial f}{\partial b} \frac{E_b}{b} + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{E_c}{c} + \dots \right) = \frac{1}{X} \left(a \frac{\partial f}{\partial a} e_a + b \frac{\partial f}{\partial b} e_b + c \frac{\partial f}{\partial c} e_c + \dots \right)$$

In tal modo, *anche l'errore relativo su X è una particolare combinazione lineare degli errori relativi sulle grandezze a, b, c, ...: i coefficienti della combinazione lineare sono in questo caso le derivate parziali della funzione f rispetto ad a, b, c, ..., moltiplicate ciascuna per la grandezza corrispondente e divise tutte per X:*

$$e_x \cong \frac{a}{X} \frac{\partial f}{\partial a} e_a + \frac{b}{X} \frac{\partial f}{\partial b} e_b + \frac{c}{X} \frac{\partial f}{\partial c} e_c + \dots$$

Questa formula esprime il cosiddetto **principio di sovrapposizione degli errori**. Essa fa riferimento all'errore relativo della misura di X, ma è evidente che basta moltiplicare per X per ottenere l'errore assoluto:

$$E_x \cong a \frac{\partial f}{\partial a} e_a + b \frac{\partial f}{\partial b} e_b + c \frac{\partial f}{\partial c} e_c + \dots = \frac{\partial f}{\partial a} E_a + \frac{\partial f}{\partial b} E_b + \frac{\partial f}{\partial c} E_c + \dots$$

Esempi

Facciamo allora qualche esempio di applicazione delle formule appena ottenute.

Consideriamo, ad esempio, il caso in cui la grandezza X di interesse sia il prodotto di due altre grandezze da misurare direttamente, per cui

$$X = a \cdot b$$

Per calcolare l'errore relativo su X in funzione degli errori relativi su a e su b, ci basta applicare la formula ricavata poco fa:

$$e_x \cong \frac{a}{X} \frac{\partial f}{\partial a} e_a + \frac{b}{X} \frac{\partial f}{\partial b} e_b = \frac{a}{ab} \frac{\partial}{\partial a} (ab) e_a + \frac{b}{ab} \frac{\partial}{\partial b} (ab) e_b = \frac{1}{b} b e_a + \frac{1}{a} a e_b = e_a + e_b$$

Abbiamo dunque ricavato che l'errore relativo di una grandezza X , ottenuta dal prodotto di due grandezze misurabili a e b , è dato dalla somma degli errori relativi di a e di b .

A questo stesso risultato possiamo arrivare anche per altra via. Cominciamo con l'applicare la definizione di errore relativo su X :

$$e_x \cong \frac{E_x}{X} = \frac{X - A_x}{X} = 1 - \frac{A_x}{X}$$

Da qui possiamo ricavare il valore A_x del misurando in funzione del suo errore relativo:

$$A_x \cong X(1 - e_x)$$

Stesso discorso possiamo fare anche per le grandezze a e b di cui X è funzione: abbiamo dunque che

$$\begin{cases} A_a \cong a(1 - e_a) \\ A_b \cong b(1 - e_b) \end{cases} \xrightarrow{\text{dato che } X=ab} A_x = A_a A_b = a(1 - e_a)b(1 - e_b) = ab(1 - e_a)(1 - e_b) = ab(1 - e_a - e_b + e_a e_b)$$

Nel termine $(1 - e_a - e_b + e_a e_b)$, il prodotto $e_a e_b$ è sicuramente trascurabile rispetto agli altri:

$$A_x \cong ab(1 - e_a - e_b)$$

Confrontando questa relazione con la relazione $A_x \cong X(1 - e_x)$ ottenuta prima, deduciamo che

$$X(1 - e_x) = ab(1 - e_a - e_b) \xrightarrow{\text{dato che } X=ab} 1 - e_x = 1 - e_a - e_b \longrightarrow \boxed{e_x = e_a + e_b}$$

Questo è evidentemente lo stesso risultato ottenuto prima.

Possiamo applicare questo risultato ad altri casi analoghi. Per esempio, supponiamo che sia $X = a^2$: per ottenere l'errore relativo su X , ci basta considerare la formula $e_x = e_a + e_b$ e porre $a=b$, in modo da ottenere $e_x = 2e_a$: questa formula dice che l'errore relativo di una grandezza X , ottenuta dal quadrato di una grandezza misurabile a , è pari a due volte l'errore relativo su a .

In modo del tutto analogo, se $X = \sqrt{a}$, allora si verifica facilmente che $e_x = \frac{e_a}{2}$.

Inoltre, se $X = abc\dots$, allora $e_x = e_a + e_b + e_c + \dots$: l'errore relativo di una grandezza X , ottenuta dal prodotto di un certo numero di grandezze misurabili, è dato dalla somma dei singoli errori relativi.

Consideriamo adesso una grandezza che sia data dal rapporto tra due grandezze misurabili:

$$X = \frac{a}{b}$$

Applicando ancora una volta il principio di sovrapposizione degli errori, abbiamo che l'errore relativo su X vale

$$e_x \cong \frac{a}{X} \frac{\partial f}{\partial a} e_a + \frac{b}{X} \frac{\partial f}{\partial b} e_b = \frac{a}{a/b} \frac{\partial}{\partial a} (a/b) e_a + \frac{b}{a/b} \frac{\partial}{\partial b} (a/b) e_b = b \frac{1}{b} e_a + \frac{b^2}{a} \left(-\frac{a}{b^2} \right) e_b = e_a - e_b$$

Abbiamo in questo caso ricavato che l'errore relativo di una grandezza X, ottenuta dal quoziente di due grandezze misurabili a e b, è dato dalla differenza degli errori relativi di a e di b:

$$e_x = e_a - e_b$$

A proposito di questa formula, è importante osservare una cosa: spesso accade, nella pratica, che gli errori relativi non siano noti con esattezza in entità e segno, per cui se ne fissano i limiti che delimitano la fascia di incertezza. In genere, allora, si preferisce fornire una stima del valore massimo dell'errore relativo, in modo da considerare il **caso peggiore** (*worst case*): ciò significa, quindi, che, anche nel caso di X=a/b, si prende comunque

$$(e_x)_{MAX} = e_a + e_b$$

in modo da indicare il massimo valore (stimato) dell'errore relativo. C'è d'altra parte un'altra possibilità: anziché considerare il caso peggiore, si considera il **valore più probabile** dell'errore relativo, che è valutato come

$$(e_x)_{PROB} = \sqrt{e_a^2 + e_b^2}$$

Si ottiene, con questa formula, un quantità che è sicuramente maggiore di e_a e di e_b, ma è minore della loro somma.

Consideriamo adesso una grandezza che sia data dalla somma di due grandezze misurabili:

$$X = a + b$$

Applicando il principio di sovrapposizione degli errori, l'errore relativo su X risulta essere

$$e_x \cong \frac{a}{X} \frac{\partial f}{\partial a} e_a + \frac{b}{X} \frac{\partial f}{\partial b} e_b = \frac{a}{a+b} \frac{\partial}{\partial a} (a+b) e_a + \frac{b}{a+b} \frac{\partial}{\partial b} (a+b) e_b = \frac{a}{a+b} e_a + \frac{b}{a+b} e_b = \frac{ae_a + be_b}{a+b}$$

Questa formula, nel caso particolare in cui e_a=e_b, fornisce evidentemente e_x=e_a: quindi, l'errore relativo di una grandezza X, ottenuta dalla somma di due grandezze misurabili a e b le cui misure sono affette dallo stesso errore relativo e_a, è pari a sua volta ad e_a.

Consideriamo infine

$$X = a - b$$

L'errore relativo su X vale

$$e_x \cong \frac{a}{a-b} \frac{\partial}{\partial a} (a-b)e_a + \frac{b}{a-b} \frac{\partial}{\partial b} (a-b)e_b = \frac{a}{a-b} e_a - \frac{b}{a-b} e_b = \frac{ae_a - be_b}{a-b}$$

Anche in quest'ultimo caso, così come nel caso di $X=a/b$, se ci si pone nell'ipotesi del *caso peggiore*, si prende il valore massimo dell'errore relativo, che in questo caso vale

$$(e_x)_{MAX} = \frac{ae_a + be_b}{a-b}$$

In tal modo, l'errore relativo ottenuto su una grandezza ottenuta per differenza è tanto maggiore quanto più le grandezze misurabili a e b sono vicine tra di loro. Ne risulta, quindi, che un metodo di misura basato sulla differenza tra due grandezze misurabili va applicato solo in casi particolari.

PROPAGAZIONE DELL'INCERTEZZA NELLE MISURE INDIRETTE

Abbiamo detto che l'incertezza associata ad una misura può essere vista come un maggiorante dell'errore assoluto $E=X-A$ associato alla misura stessa:

$$|E| \leq U$$

Possiamo allora seguire discorsi simili a quelli del precedente paragrafo per studiare anche la propagazione delle incertezze di misura. In particolare, faremo qui riferimento non più all'errore relativo, ma all'errore assoluto.

Consideriamo ad esempio una misura indiretta ottenuta come somma di due misure dirette:

$$X = a + b$$

Siano x_a ed x_b i risultati delle misure rispettivamente di a e di b; i corrispondenti errori assoluti saranno $E_a = a - x_a$ e $E_b = b - x_b$.

Adesso consideriamo il risultato x della misura di X, ottenuto come

$$x = x_a + x_b$$

Indicato con V il valore vero (incognito) del misurando X, l'errore assoluto associato alla misura x sarà dato da

$$E = V - x = (A + B) - (x_a + x_b) = E_a + E_b$$

dove ovviamente A e B sono i valori veri delle grandezze a e b.

Abbiamo dunque trovato che gli errori assoluti in questo caso si sommano. Adesso andiamo a calcolare il modulo dell'errore assoluto appena individuato:

$$|E| = |E_a + E_b| \leq |E_a| + |E_b|$$

Abbiamo qui applicato la nota disuguaglianza triangolare, che è in questo caso una diretta conseguente della **regola del caso peggiore**, assumendo che i due errori sulle misure dirette vadano comunque a sommarsi.

D'altra parte, sappiamo che ciascun errore assoluto è maggiorato dall'incertezza di misura, per cui possiamo scrivere che

$$|E| \leq |E_a| + |E_b| \leq U_a + U_b = U$$

Questa disuguaglianza ci conferma che anche nella misura indiretta ottenuta come somma di misure indirette, l'errore assoluto è maggiorato dall'incertezza.

Si nota inoltre una fondamentale differenza tra l'errore assoluto E di misura e l'incertezza U di misura: infatti, *mentre gli errori associati alle singole misure dirette si sommano algebricamente ($E = E_a + E_b$), le incertezze si sommano aritmeticamente, non essendo affette da segno (al contrario degli errori)*.

Passiamo adesso ad una misura indiretta ottenuta come differenza tra due misure dirette:

$$X = a - b$$

Siano sempre x_a ed x_b i risultati delle misure rispettivamente di a e di b e $E_a = a - x_a$ e $E_b = b - x_b$ i corrispondenti errori assoluti. In modo analogo a prima, l'errore assoluto associato alla misura $x = x_a - x_b$ sarà dato da

$$E = V - x = (A - B) - (x_a - x_b) = E_a - E_b$$

dove ovviamente A e B sono i valori veri delle grandezze a e b.

In questo caso, dunque, gli errori assoluti si sottraggono. Calcolando il modulo dell'errore assoluto appena individuato, otteniamo

$$|E| = |E_a - E_b| \leq |E_a| + |E_b| \leq U_a + U_b = U$$

Come si vede, applicando nuovamente la regola del caso peggiore, abbiamo trovato lo stesso risultato visto nel caso precedente.

Passiamo ora ad una misura indiretta ottenuta come prodotto di misure dirette:

$$X = a \cdot b$$

L'errore assoluto associato alla misura $x = x_a \cdot x_b$ sarà dato da

$$\begin{aligned} E = V - x &= (A \cdot B) - (x_a \cdot x_b) = (A \cdot B) - [(A - e_a) \cdot (B - e_b)] = (A \cdot B) - [AB - e_a B - Ae_b + e_a e_b] = \\ &= +e_a B + Ae_b - e_a e_b \end{aligned}$$

Ritenendo che gli errori sulle singole misure dirette siano comunque piccoli, possiamo trascurare il termine $e_a e_b$ rispetto agli altri due, per cui concludiamo che

$$E \cong Be_a + Ae_b$$

Come nei casi precedenti, calcoliamo il modulo dell'errore assoluto appena individuato:

$$|E| \cong |Be_a + Ae_b| \leq |Be_a| + |Ae_b| \leq |B| \cdot |e_a| + |A| \cdot |e_b| \leq |B| \cdot U_a + |A| \cdot U_b$$

Infine, consideriamo una misura indiretta ottenuta come rapporto di misure dirette:

$$X = a/b$$

L'errore assoluto associato alla misura $x = x_a/x_b$ è

$$E = V - x = \frac{A}{B} - \frac{x_a}{x_b} = \frac{A}{B} - \frac{A - e_a}{B - e_b} = \frac{A(B - e_b) - B(A - e_a)}{B(B - e_b)} = \frac{-Ae_b + Be_a}{B(B - e_b)}$$

Ritenendo ancora una volta che gli errori sulle singole misure dirette siano comunque piccoli, possiamo trascurare il termine e_b a denominatore rispetto a B , per cui concludiamo che

$$E \cong \frac{Be_a - Ae_b}{B^2}$$

Calcoliamo infine il modulo dell'errore assoluto appena individuato:

$$|E| \cong \left| \frac{Be_a - Ae_b}{B^2} \right| \leq \frac{|Be_a - Ae_b|}{|B^2|} \leq \frac{|Be_a| + |Ae_b|}{|B^2|} \leq \frac{|B| \cdot |e_a| + |A| \cdot |e_b|}{|B^2|} \leq \frac{|B| \cdot U_a + |A| \cdot U_b}{|B^2|}$$

Possiamo a questo punto riepilogare, usando una tabella, i risultati ottenuti in questo e nel precedente paragrafo a proposito degli errori e delle incertezze nelle misure indirette:

Tipo di misura indiretta	Misura	Errore relativo (max)	Errore assoluto	Incertezza
somma: $X=a+b$	$x=x_a+x_b$	$\frac{Ae_a + Be_b}{A + B}$	$E_a + E_b$	$U_a + U_b$
differenza: $X=a-b$	$x=x_a-x_b$	$\frac{Ae_a + Be_b}{A - B}$	$E_a - E_b$	$U_a + U_b$
prodotto: $X=ab$	$x=x_ax_b$	$e_a + e_b$	$Be_a + Ae_b$	$ B \cdot U_a + A \cdot U_b$
rapporto: $X=a/b$	$x=x_a/x_b$	$e_a - e_b$	$\frac{Be_a - Ae_b}{B^2}$	$\frac{ B \cdot U_a + A \cdot U_b}{ B^2 }$

Osservazione: incertezza in una misura indiretta generica

Nel paragrafo sullo studio della propagazione degli errori nelle misure indirette, abbiamo trovato che l'errore assoluto sulla misura indiretta di X è esprimibile, in funzione degli errori assoluti sulle singole misure dirette, tramite la formula seguente:

$$E_x \cong \frac{\partial f}{\partial a} E_a + \frac{\partial f}{\partial b} E_b + \frac{\partial f}{\partial c} E_c + \dots$$

Se calcoliamo il modulo di entrambi i membri ed applichiamo la disuguaglianza triangolare così come fatto nel precedente paragrafo, abbiamo che

$$|E_x| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial a} E_a \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial b} E_b \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial c} E_c \right| + \dots \leq \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \cdot |E_a| + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| \cdot |E_b| + \left| \frac{\partial f}{\partial c} \right| \cdot |E_c| + \dots$$

Maggiorando gli errori assoluti con le rispettive incertezze, otteniamo che

$$|E_x| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \cdot U_a + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| \cdot U_b + \left| \frac{\partial f}{\partial c} \right| \cdot U_c + \dots$$

Concludiamo perciò che l'**incertezza della generica misura indiretta** è ottenibile come

$$U = \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \cdot U_a + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| \cdot U_b + \left| \frac{\partial f}{\partial c} \right| \cdot U_c + \dots$$

ossia come somma pesata delle incertezze delle singole misure dirette, dove i coefficienti di peso portano in conto la dipendenza della funzione f dalle singole grandezze di ingresso.

Possiamo a questo punto fare tre osservazioni importanti a proposito dell'incertezza (che comunque saranno riprese in seguito):

- una valutazione dell'incertezza è sempre necessaria; una misura con incertezza "completamente" sconosciuta non è una misura, ma piuttosto un numero a caso;
- dato che una incertezza è un qualunque numero maggiore dell'errore, non ha senso chiedersi quale sia l'errore di una incertezza oppure l'incertezza di una incertezza;
- al contrario, ha senso chiedersi se una incertezza è **corretta** (cioè se è effettivamente maggiore dell'errore) e se è **migliorabile** (ossia se si può determinare una maggiorazione ancora più stretta dell'errore).

CLASSIFICAZIONE DEGLI ERRORI

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto il concetto di **errore** su una misura. Vogliamo adesso inquadrare le principali cause cui sono dovuti gli errori, al fine di capire se e in che modo essi possono essere ridotti al minimo. Sussiste allora la seguente classificazione:

- gli **errori grossolani** sono quelli addebitabili a imperizia o distrazione dell'operatore che sta compiendo la misura; possono ad esempio derivare da una sbagliata lettura o da un uso improprio degli strumenti, oppure da trascrizioni errate dai dati sperimentali o anche da errate elaborazioni di tali dati. E' evidente perciò che tali errori non si presentano quando si opera con cura e attenzione e comunque possono essere eliminati semplicemente ripetendo la misura;
- gli **errori sistematici** sono quelli che si ripresentano sempre con lo stesso segno e la stessa ampiezza, ove ovviamente la misura di una grandezza venga ripetuta più volte con la stessa strumentazione e nelle stesse condizioni operative ed ambientali. Questi errori sono generalmente dovuti ad una non corretta taratura degli strumenti oppure a difetti intrinseci

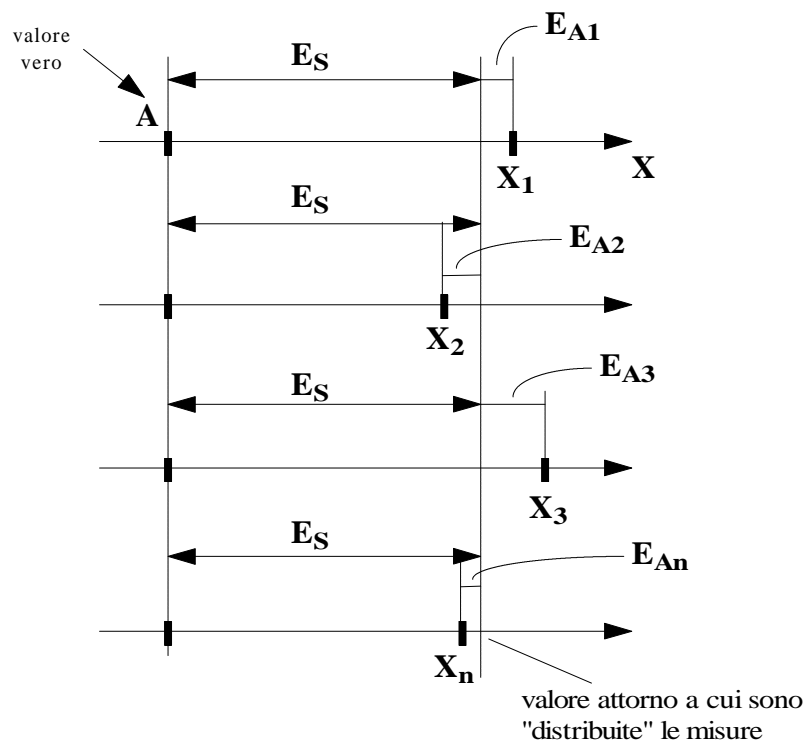
degli strumenti stessi⁵; questo significa, sostanzialmente, che in talune situazioni è possibile correggere tali errori o comunque minimizzarli;

- infine, gli **errori accidentali** (detti anche *non sistematici* o *casuali*) sono quelli che permangono anche nell'ipotesi di essere riusciti ad eliminare tutti gli errori grossolani e sistematici. Le cause di tali errori sono tipicamente le imprevedibili fluttuazioni nelle condizioni operative, strumentali ed ambientali. Gli errori accidentali possono essere analizzati statisticamente, in quanto si è visto empiricamente che essi sono generalmente distribuiti secondo leggi semplici. In particolare, si fa spesso l'ipotesi che le cause di tali errori agiscano in modo del tutto aleatorio, determinando perciò scarti, rispetto al valore medio, sia negativi sia positivi. Questo ci autorizza ad aspettarci che gli effetti mediamente si annullino, ossia sostanzialmente che il valore medio degli errori accidentali sia nullo. Questa considerazione ha una conseguenza fondamentale: se riusciamo a correggere tutti gli errori grossolani e quelli sistematici, per cui avremo a che fare solo con errori accidentali, ci basterà compiere misure ripetute e poi mediare i risultati: quante più misure considereremo, tanto meno il risultato finale (media dei singoli risultati) sarà affetto da errori accidentali. Quanto più piccoli risultano gli errori accidentali, tanto più si dice che la misura è **precisa**.

In generale, dunque, nell'ipotesi di aver eliminato ogni tipo di errore grossolano, possiamo affermare che *l'errore di una misura è somma di un errore sistematico (che si ripete ogni misura, in uguali condizioni operative) e di un errore accidentale (che invece varia casualmente in ogni misura, anche se le condizioni operative rimangono immutate):*

$$E = E_S + E_A$$

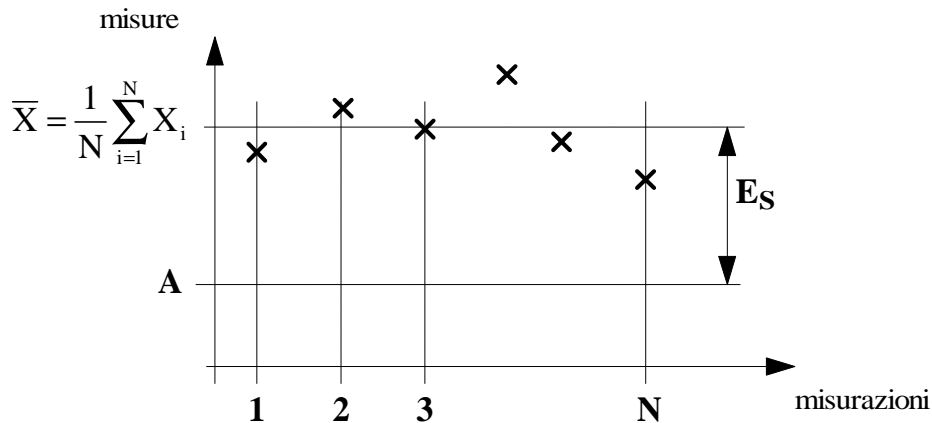
Il diagramma seguente aiuta a comprendere questi concetti:



⁵ Ad esempio, possono esserci dei difetti costruttivi oppure dei malfunzionamenti derivanti dall'aver usato gli strumenti in particolari condizioni operative o ambientali (elevate temperature, forti campi elettromagnetici, sovraccarichi e così via).

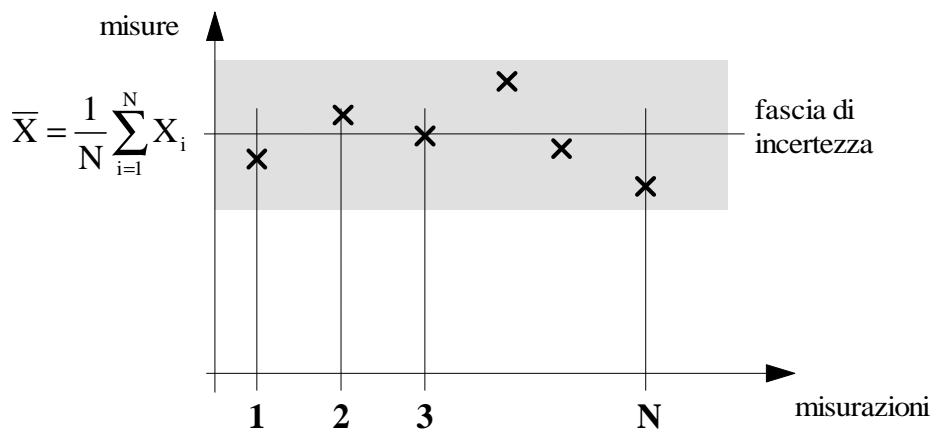
E' qui illustrato quello che accade quando vengono compiute N misure ripetute di una stessa quantità X, il cui valore vero (incognito) è A. Si nota che ciascuna misura X_i è affetta da un identico errore sistematico E_S (pari alla differenza tra A ed il valore attorno al quale risultano distribuite le X_i , ad esempio il loro valor medio), mentre ciò che cambia, di volta in volta, è l'errore accidentale E_{Ai} , che rende diversa una misura dall'altra. Come si vede, l'errore accidentale cambia sia in ampiezza sia in segno.

Possiamo anche usare una rappresentazione grafica alternativa alla precedente. Usiamo in particolare un diagramma cartesiano che presenta in ascisse i numeri identificativi delle varie misurazioni (1,2,...,N) ed in ordinate i valori ottenuti per le misure:



Così come nel caso precedente, vengono qui riportati (questa volta in ordinate) il valore vero A (incognito) del misurando e i valori ottenuti dalle varie misure; tali valori sono "distribuiti" attorno al loro valor medio $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ (si veda in proposito quanto detto nei prossimi paragrafi), che differisce da A per una quantità pari, per definizione, all'errore sistematico⁶. La differenza tra il risultato X_i di ciascuna misura ed A è invece l'errore accidentale della misura i-sima, che cambia da caso a caso.

La dispersione dei valori X_i attorno al valor medio delimita una regione, detta **fascia di incertezza**, in cui risultano comprese tutte le misure effettuate:

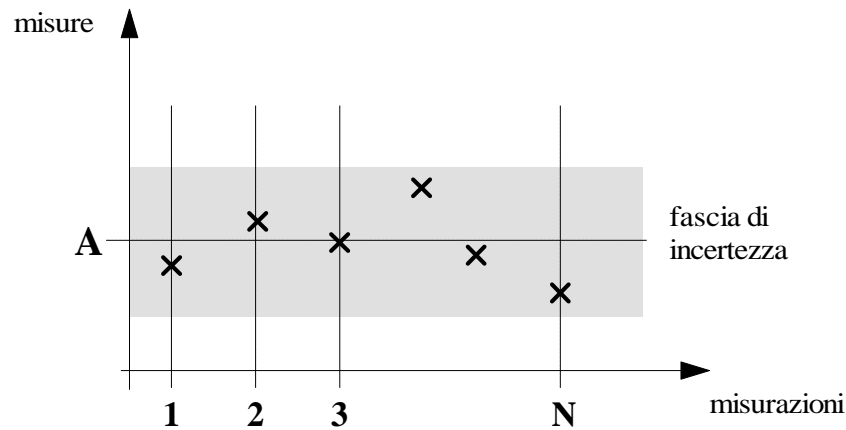


Facciamo notare, comunque, che la *fascia di incertezza* è definita rigorosamente come quella regione, a cavallo del valore vero A del

⁶ La figura riportata non deve trarre in inganno: i risultati X_i delle singole misure possono, in generale, risultare sia superiori sia inferiori ad A, anche se la figura riporta solo valori X_i superiori ad A.

misurando, nella quale si distribuiscono i risultati delle varie misure. Tuttavia, il discorso fatto poco fa si adatta a questa definizione nell'ipotesi che il valore medio \bar{X} si approssimi al valore vero A , il che accade quando $N \rightarrow \infty$, ossia nell'ipotesi di compiere un numero sufficientemente elevato di misure ripetute.

In modo del tutto equivalente, è evidente che, se riusciamo ad eliminare l'errore sistematico (il quale, come visto, incide in egual misura sulle X_i), le misure X_i saranno "distribuite" proprio attorno ad A e differiranno da essa per una quantità E_{Ai} (incognita) variabile da caso a caso:



Come vedremo nel prossimo paragrafo, la caratteristica fondamentale degli errori accidentali è quella di essere a valor medio nullo, per cui è nullo il valore medio degli scarti E_{Ai} di ciascuna misura rispetto ad A .

Errori sistematici

Soffermiamoci adesso maggiormente sugli errori sistematici, dovuti essenzialmente, come si è detto, a imperfezioni (costruttive o di taratura) degli strumenti impiegati per compiere le misure.

In primo luogo, è evidente che è possibile ridurre gli errori sistematici effettuando una nuova e migliore taratura degli strumenti, usando tali strumenti nel modo appropriato e sottoponendoli ad una accurata e periodica manutenzione.

In secondo luogo, gli errori sistematici dipendono anche dalle condizioni ambientali, ossia dall'ambiente in cui si esegue la misura: questo perché eventuali variazioni della temperatura oppure presenza di eventuali campi elettromagnetici sono fenomeni che possono influenzare sia la strumentazione sia lo stesso misurando. Si dice in questi casi che esiste una **interferenza esterna** sul sistema di misura e gli errori prendono anche il nome di **errori condizionati**.

In generale, diciamo che gli errori sistematici sono difficili da valutare ed hanno anche una maggiore importanza di quelli accidentali: infatti, mentre gli errori accidentali influenzano la **precisione** di una misura, gli errori sistematici influenzano l'**incertezza** della misura stessa.

Il modo classico di valutare l'errore sistematico su una misura è quello di confrontare una stima A nota del valore del misurando ed il risultato X della misura⁷:

$$E_s = X - A$$

Questa è in pratica la definizione di errore data in precedenza. Da notare che essa differisce dal modo con cui valutare gli **errori accidentali**: infatti, sfruttando il fatto che gli errori accidentali si

⁷ Al posto del risultato della singola misura, si potrebbe prendere il valor medio dei risultati di misure ripetute.

possono ritenere a valor medio nullo, tali errori accidentali devono essere calcolati come differenza tra il risultato X di una singola misura e la media dei risultati di una serie di misure ripetute:

$$E_A = X - \bar{X}$$

dove quindi $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$.

Tornando agli errori sistematici, si definisce **correzione** il valore da aggiungere, algebricamente, al risultato non corretto di una misura per compensarne l'errore sistematico. Il concetto è semplice: se il risultato X della misura è affetto da un errore sistematico $E_S = X - V$, allora potrà compensare tale errore sommando, ad X , la correzione **$C = -E_S$** :

$$X + C = X - E_S = X - (X - V) = V$$

Così facendo, otteniamo proprio il valore del misurando.

E' ovvio che il discorso è puramente teorico: infatti, non essendo perfettamente noto E_S (perché non è noto il valore V del misurando), non lo sarà nemmeno la correzione C e quindi la compensazione non sarà completa.

Un altro modo di esaminare lo stesso concetto consiste nel considerare il cosiddetto **fattore di correzione, C_F** , definito come quel numero per cui moltiplicare il risultato X di una misura al fine di compensare l'errore sistematico associato a tale misura: ciò significa porre

$$V = C_F X$$

Possiamo adesso fare la seguente considerazione: supponiamo di aver compiuto una data misura e di aver ottenuto il risultato X ; questo risultato è affetto da un errore sistematico E_S che non è perfettamente noto; d'altra parte, esistono delle situazioni in cui è possibile ipotizzare un modello matematico dal quale ricavare l'entità dell'errore sistematico, il che ci consente una correzione dell'errore, come visto poco fa; il problema è che il modello ipotizzato non è perfetto, per cui non lo potrà essere anche la correzione; quindi, quando proviamo a correggere un errore sistematico, apportiamo una correzione anch'essa sicuramente imperfetta; di conseguenza, il risultato finale della nostra misura presenta due cause di incertezza: quella dovuta all'aver applicato una correzione non perfetta e quella associata alla presenza di effetti accidentali.

Quindi, dopo la correzione, il risultato potrebbe anche essere molto vicino al valore vero V del misurando, ossia potrebbe avere un errore sistematico residuo molto piccolo, ma potrebbe comunque essere affetto da grande incertezza, in quanto i fattori che la determinano non vanno confusi con gli errori. In altre parole, è bene non confondere l'errore sistematico residuo non corretto con l'incertezza del risultato di una misura: pur riducendo l'errore sistematico, l'incertezza potrebbe rimanere elevata.

In linea generale, possiamo dire che ha senso provare a correggere gli errori sistematici solo quando si stima che il loro contributo sia dell'ordine dell'incertezza; se gli errori risultano essere piccoli, è possibile evitare la correzione; infine, se si stima la presenza di errori grandi, allora potrebbe essere opportuno cambiare metodo di misura.

ACCURATEZZA E PRECISIONE

Abbiamo capito, nei paragrafi precedenti, che ogni misura è soggetta a delle limitazioni, per cui il risultato della misura deve necessariamente essere accompagnato dall'indicazione quantitativa dell'**incertezza** della misura stessa.

Bisogna stare attenti a non confondere termini come accuratezza, incertezza e precisione. Per **accuratezza** (*accuracy*) intendiamo *il grado di approssimazione della quantità misurata al valore vero del misurando oppure ad una sua stima*.

Si tratta di un concetto tipicamente qualitativo e non quantitativo. Se invece si vuole passare ad una valutazione qualitativa, si considera l'**accuratezza relativa** (simbolo: **a**), definita nel modo seguente: se X è il risultato di una data misura ed E_s è l'errore sistematico (solo stimabile) di tale misura, l'accuratezza relativa è data da

$$a = 1 - \left| \frac{E_s}{X} \right|$$

E' evidente che, al diminuire dell'errore sistematico, aumenta l'accuratezza, fino al valore massimo 1 (teorico, non raggiungibile) quando $E_s=0$.

Ricordiamo che l'errore sistematico è definito come $E_s = X - V$, per cui possiamo anche scrivere che

$$a = 1 - \left| \frac{X - V}{X} \right| = 1 - \left| 1 - \frac{V}{X} \right|$$

La quantità sotto il segno di valore assoluto è sicuramente minore di 1, per cui il valore minimo dell'accuratezza relativa è 0. Talvolta, si sente dire che uno strumento presenta una accuratezza dello 0.5%: se ci si riferisse all'accuratezza relativa appena definita, ciò significherebbe che lo strumento fornisce delle pessime prestazioni. Al contrario, probabilmente ci si riferiva all'*incertezza*: in questo caso, in modo del tutto qualitativo, si dovrebbe semplicemente dire che lo strumento presenta un'ottima accuratezza.

Distinto dall'accuratezza è il concetto della *precisione*: per **precisione** di una misura intendiamo *l'indicazione numerica dell'approssimazione di un insieme ripetuto di misure della stessa quantità al valore medio dell'insieme di misure*. Vediamo di spiegarci meglio: supponiamo di condurre una serie di misure X_i ($i=1,2,\dots$) della stessa quantità; calcolando il valor medio di tale misure, scriviamo che

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

Allora, quanto più le singole misure X_i si avvicinano al loro valor medio \bar{X} , tanto più diremo che la misura è qualitativamente precisa.

Analiticamente, la precisione della generica misura X_i sarà

$$p_i = 1 - \left| \frac{X_i - \bar{X}}{\bar{X}} \right|$$

La media aritmetica delle p_i rappresenta invece la precisione del campione di misura (X_1, X_2, \dots, X_N):

$$p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i$$

Sottolineiamo che, pur potendo quantificare l'accuratezza e la precisione di una misura o di un insieme di misure ripetute, si tratta comunque di concetti essenzialmente qualitativi.

Concetto in qualche modo analogo a quello della precisione è quello della **ripetibilità**, definita come *il grado di approssimazione esistente tra i risultati di misure successive della stessa quantità, eseguite nelle stesse condizioni di misura*. Come vedremo più avanti, la deviazione standard delle misure eseguite rappresenta un indice di ripetibilità delle misure stesse.

Analogamente, la cosiddetta **riproducibilità** è definita come *il grado di approssimazione esistente tra i risultati di misure successive della stessa quantità, eseguite in diverse condizioni di misura*.

Sottolineiamo ancora una volta, come traspare dalle definizioni fornite, che l'accuratezza e la precisione sono concetti qualitativi e non quantitativi. Come vedremo, una bassa incertezza di misura si potrà avere solo quando sia l'accuratezza sia la precisione sono elevate. Accuratezza e precisione dipendono da vari fattori, tra cui citiamo la qualità degli strumenti utilizzati e la cura esercitata dall'utente nel compiere la misura.

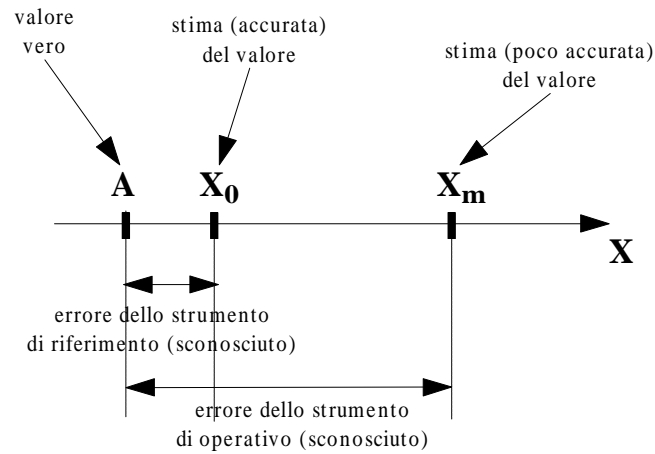
Avere una elevata precisione significa avere sia una elevata ripetibilità delle misure sia un sufficiente numero di cifre significative: infatti, quanto maggiore è la precisione della misura tante più cifre significative la rappresentano e tanto più piccoli sono gli scarti tra una misura e l'altra. Al contrario, quando sono poche le cifre significative che rappresentano la misura, la precisione è piccola anche se gli scarti tra le varie misure sono piccoli: questo proprio perché tali scarti interessano cifre via via più significative. Facciamo un esempio: supponiamo di avere uno **strumento a lettura digitale** (ad esempio un *multimetro digitale*), in cui cioè il risultato della misura sia indicato su un display digitale con un certo numero di cifre; se, per esempio, le cifre fossero solo due, avremmo probabilmente una serie di misure ripetibili (cioè con risultati simili tra loro), ma non precise (data l'assenza di ulteriori cifre significative da leggere).

Viene ora da chiedersi se la precisione implica l'accuratezza e/o viceversa. Si può affermare che la precisione è una condizione necessaria ma non sufficiente per l'accuratezza: questo significa che una misura, per essere accurata, deve anche essere precisa (e quindi rappresentabile con un elevato numero di cifre significative), ma una misura precisa potrebbe comunque essere non accurata. Facciamo anche qui un esempio: supponiamo di avere uno strumento che permetta di leggere 6 cifre della grandezza da misurare e supponiamo inoltre di compiere diverse misure, abbastanza ravvicinate (nel tempo) tra di loro; in queste condizioni, possiamo sicuramente affermare di aver compiuto una misura precisa se le misure si scostano poco una dall'altra, ma non è detto che la misura sia accurata, ad esempio perché lo strumento non è ben tarato.

Fin qui, dunque, l'accuratezza e la precisione ci forniscono indicazioni solo qualitative sulla bontà delle nostre misure. Se vogliamo delle indicazioni più quantitative, dobbiamo rivolgerci all'**incertezza**, la quale, come già detto, rappresenta sostanzialmente la nostra impossibilità a valutare con esattezza il misurando in questione. Per introdurre questo concetto, però, dobbiamo introdurre alcuni concetti di statistica, cui sono dedicati i prossimi paragrafi.

ERRORE STIMATO

Supponiamo di voler misurare una certa grandezza X , ad esempio una resistenza, e supponiamo che sia A il valore vero (a noi sconosciuto) di tale quantità. Supponiamo inoltre di compiere due distinte misure di X , una con uno strumento molto accurato (che chiamiamo **strumento di riferimento**) ed una con uno strumento meno accurato (detto **strumento operativo**), ad esempio quello usato in un laboratorio universitario. I due strumenti ci daranno due distinte misure, che indichiamo rispettivamente con X_0 ed X_m . Possiamo disporre tali valori, insieme al valore vero A , su un asse orizzontale, al fine di dare una interpretazione grafica di ciò che stiamo facendo:



La quantità $E_0 = X_0 - A$ rappresenta l'errore compiuto dallo strumento di riferimento: si tratta di una quantità sconosciuta (dato che non si conosce A), ma comunque piccola, data la bontà dello strumento usato.

Analogamente, la quantità $E_m = X_m - A$ rappresenta l'errore compiuto dallo strumento operativo: anche questa è una quantità sconosciuta e si presume inoltre più grande di E_0 , data la minore bontà dello strumento usato.

L'unica quantità nota è la differenza $E_m - E_0$ tra l'errore dello strumento operativo e quello dello strumento di riferimento: infatti, possiamo scrivere che

$$E_m - E_0 = (X_m - A) - (X_0 - A) = X_m - X_0$$

Questa quantità può allora essere presa come una **stima dell'errore dello strumento operativo**. In altre parole, quindi, *se vogliamo "stimare" l'errore commesso dal nostro strumento operativo, dobbiamo necessariamente fare affidamento ad uno strumento di riferimento (o, quanto meno, ad un campione)*.

MEDIA, DEVIAZIONE MEDIA, DEVIAZIONE STANDARD E VARIANZA DI UN CAMPIONE DI MISURA

Supponiamo di compiere N misure successive dello stesso misurando; se X_i è il risultato della generica misura, il nostro **campione di misura** è definito come la N -pla delle X_i :

$$(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

Tramite gli elementi di questo vettore possiamo calcolare una serie di quantità. La principale di esse è la **media aritmetica** delle N misure, già introdotta precedentemente:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

Come vedremo in seguito e come del resto è abbastanza intuitivo aspettarsi, questa quantità rappresenta la migliore stima possibile che possiamo fornire del nostro misurando.

In taluni casi, del resto, ha senso calcolare, al posto della media aritmetica, una **media pesata**, in modo da attribuire maggior peso ad alcune misure rispetto alle altre. Si considera perciò la seguente quantità:

$$\bar{X}_p = \frac{\sum_{i=1}^N w_i X_i}{\sum_{i=1}^N w_i}$$

Si tratta ovviamente di definire nel modo più opportuno possibile i **pesi** w_i secondo cui effettuare tale media pesata. I criteri possono essere diversi: ad esempio, si potrebbe dare maggior peso alle misure che sono più attendibili o comunque maggiormente significative. Il criterio più sensato si basa sulle seguenti considerazioni: dobbiamo infatti considerare che ciascuna misura X_i è affetta da una propria **incertezza** (che indichiamo con u_i); allora, si può attribuire maggior peso alle misure affette da incertezza minore; per ottenere questo, bisogna semplicemente prendere dei coefficienti di peso che siano inversamente proporzionali all'incertezza delle corrispondenti misure: generalmente, si pone allora

$$w_i = \frac{1}{2u_i^2}$$

Notiamo che, ovviamente, se le misure avessero tutte la stessa incertezza, i coefficienti di peso sarebbe uguali e quindi la media pesata risulterebbe pari alla media aritmetica.

Consideriamo adesso la media aritmetica⁸ e facciamo qualche passaggio in più. In particolare, indichiamo, rispettivamente, con E_{si} e E_{ai} gli errori sistematici e accidentali sulla i -sima misura X_i ; allora, quest'ultima può essere scritta come

$$X_i = V + E_i = V + E_{si} + E_{ai}$$

dove ovviamente la quantità V (valore vero del misurando) non è affetta da indice in quanto le misure sono tutte relative allo stesso misurando.

Calcolando adesso la media aritmetica dei due membri, a primo membro otteniamo la media aritmetica delle N misure, mentre a secondo membro otteniamo quanto segue:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_{si} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_{ai} = V + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_{si} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_{ai}$$

In base a quanto in precedenza, gli errori accidentali rappresentano una tipica variabile aleatoria a valor medio zero; questo vale, però, solo per $N \rightarrow \infty$, cioè per un numero molto grande di misure. Facendo allora questa ipotesi di N molto grande, possiamo concludere che

$$\bar{X} = V + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_{si}$$

Questa relazione ci suggerisce diverse considerazioni:

⁸ Ricordiamo che la media aritmetica ci consente di valutare la ripetibilità delle misure effettuate, ossia il grado di approssimazione di tali misure al valore della loro media.

- in primo luogo, essa dice che la media aritmetica di un insieme di misure è sostanzialmente una stima del valore V del misurando, tanto migliore quanto minore è il valor medio degli errori sistematici sulle singole misure;
- in secondo luogo, se scriviamo quella relazione come

$$\text{bias} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_{s_i} = \bar{X} - V$$

otteniamo la definizione del cosiddetto **bias** (polarizzazione) del nostro insieme di misure: esso è definito come il valor medio degli errori sistematici ed è quindi pari alla differenza tra il valor medio delle misure ed il valore vero del misurando. Ovviamente, il bias cambiato di segno rappresenta la correzione totale da apportare ad \bar{X} per ottenere un miglioramento dell'accuratezza.

Si definisce inoltre **deviazione** della misura i -sima la differenza tra il risultato della misura e la media dei risultati delle N misure:

$$d_i = X_i - \bar{X}$$

Questo concetto consente di definire anche la **dispersione** dell'insieme di misure rispetto al valor medio. Ad esempio, un modo di quantificare tale dispersione è quello di calcolare il valor medio dei moduli delle deviazioni delle singole misure, ossia la cosiddetta **deviazione media**:

$$\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |d_i| = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_i - \bar{X}|$$

Il motivo per cui si considerano le deviazioni in modulo è semplicemente quello per cui tali deviazioni hanno valor medio nullo:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - \bar{X} = 0$$

Ad ogni modo, il parametro tipicamente utilizzato per valutare la dispersione delle misure è la **deviazione standard**, definita in termini dei quadrati delle deviazioni delle singole misure, nel modo seguente:

$$\sigma \cong \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}$$

Facciamo subito osservare che il segno di *all'incirca uguale* in quest'ultima relazione sarà chiarito più avanti.

Il quadrato della deviazione standard è la cosiddetta **varianza** del campione di misura:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i^2 + \bar{X}^2 - 2X_i\bar{X}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 2X_i\bar{X} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2 + \bar{X}^2 - 2\bar{X} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2 - \bar{X}^2 \end{aligned}$$

Come ultima definizione, forniamo quella di **momento centrale di ordine q** del generico campione di misura:

$$E[X^q] \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^q$$

Si vede subito che questa quantità è una generalizzazione di quelle introdotte in precedenza: infatti, per $q=1$ otteniamo una quantità nulla, mentre per $q=2$ otteniamo la varianza.

A conclusione del paragrafo, *sottolineiamo che le definizioni date in questo paragrafo sono riferite sempre al campione di misura che abbiamo a disposizione*. Vedremo in seguito delle analoghe definizioni di carattere più generale e come tali definizioni sono legate a quelle introdotte in questo paragrafo.

CONCETTI DI FREQUENZA E DI CLASSI

Spesso, la comprensione di un fenomeno fisico può essere facilitata da un esame visivo dei risultati di misure ripetute di una grandezza o, comunque, in generale, di dati statistici. Bisogna allora individuare il modo migliore per rappresentare graficamente i dati disponibili. Ci vengono allora in aiuto alcuni concetti.

Sia dato il nostro campione di misure (X_1, X_2, \dots, X_N) composto da N elementi. Sia X_i il risultato della i -sima misura; è possibile che questo stesso risultato si ottenga in più di una misura; allora, il numero di volte n_i in cui la misura ha fornito valore X_i prende il nome di **frequenza** della misura X_i . La quantità $f_i = n_i/n$ prende invece il nome di **frequenza relativa** di X_i .

Ovviamente, se tutte le misure forniscono risultati diversi, la frequenza delle singole misure sarebbe 1 e quindi le frequenze relative sarebbero tutte pari ad $1/n$. Al contrario, se tutte le misure dessero lo stesso risultato, allora risulterebbe $n_i=n$ e quindi $f_i=1$.

Un modo alternativo di definire la frequenza relativa si basa sul raggruppamento delle misure in gruppi (dette **classi**): si tratta banalmente di intervallini in cui le misure possono cadere, definiti perciò ciascuno da un estremo inferiore ed uno superiore. Se K sono in totale le classi individuate, l'ampiezza della i -sima classe sarà

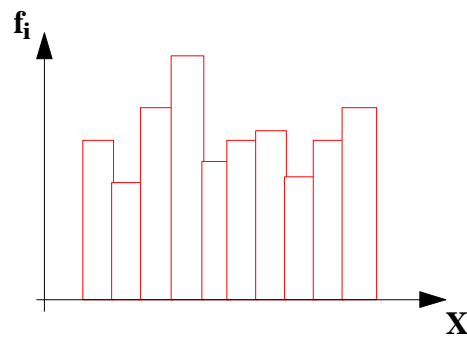
$$\Delta X_i = \frac{X_{\max,i} - X_{\min,i}}{K}$$

dove ovviamente $X_{\max,i}$ e $X_{\min,i}$ sono, rispettivamente, l'estremo superiore ed inferiore della classe i -sima.

Una volta effettuata questa suddivisione, diremo che la frequenza relativa della i -sima classe è il numero N_i di misure che cadono in tale classe, rapportato al numero totale N di misure:

$$f_i = \frac{N_i}{N}$$

Si può dare una interpretazione grafica. Consideriamo infatti un grafico cartesiano; in ascisse mettiamo il valore X delle misure, mentre in ordinate mettiamo la frequenza relativa f_i :



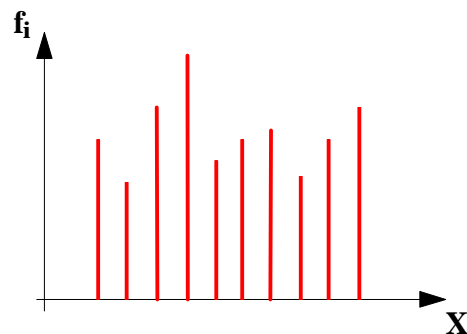
L'asse delle ascisse è stato suddiviso nelle varie classi, supposte tutte per comodità di ampiezza ΔX_i unitaria, il che significa che $X_{\max,i} - X_{\min,i} = K$, ossia che $X_{\max,i} = X_{\min,i} + K$.

Con questa scelta, otteniamo un istogramma, in cui la frequenza relativa rappresenta l'area del generico rettangolino.

Ovviamente, dato che la somma delle frequenze relative è pari ad 1, l'area complessiva sottesa dall'istogramma è a sua volta unitaria:

$$\sum_{i=1}^N f_i = \sum_{i=1}^N \frac{N_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N N_i = \frac{1}{N} N = 1$$

Ovviamente, ci sono da considerare due possibilità, a seconda dei risultati che possiamo attenderci dalle misure: il caso rappresentato nell'ultima figura è quello in cui le misure possono assumere qualsiasi valore reale compreso tra il minimo ed il massimo; l'altro caso, rappresentato nella figura seguente, è invece quello in cui i risultati possono assumere solo valori discreti (pensiamo ad esempio al lancio di due dadi, che può dare, come risultato, solo i numeri 2,3,...,12):



Per identificare ciascuna classe, possiamo considerare il valor medio delle misure che cadono in tale classe: possiamo cioè associare alla i-sima classe la quantità

$$X_i = \frac{1}{F_i} \sum_{h=1}^{F_i} X_{hi}$$

dove F_i è la frequenza della classe i-sima, ossia il numero di misure che cadono in tale classe, e dove X_{hi} è la h-sima misura che cade nella classe i-sima.

Adesso, possiamo calcolare nuovamente la media delle N misure:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^K \sum_{h=1}^{F_i} X_{hi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^K F_i \left(\frac{1}{F_i} \sum_{h=1}^{F_i} X_{hi} \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^K F_i X_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^K N f_i X_i = \sum_{i=1}^K f_i X_i$$

dove abbiamo evidentemente tenuto conto che frequenza e frequenza relativa sono legate dalla relazione $f_i = F_i/N$.

La formula appena ricavata mette in evidenza che la media aritmetica delle misure non dipende più dal numero N di prove eseguite: notiamo infatti che essa è pari ad una media pesata dei valori medi X_i delle singole classi considerate, dove i coefficienti di peso sono le frequenze relative associate alle classi.

Naturalmente, basandoci sulle X_i , possiamo ripetere gli stessi discorsi fatti in precedenza circa la deviazione media, la deviazione standard e la varianza, che assumono le seguenti espressioni (ottenute con procedimento analogo a quello seguito per il calcolo della media \bar{X}):

- deviazione media: $\alpha \cong \sum_{i=1}^K f_i |X_i - \bar{X}|$
- deviazione standard: $\sigma \cong \sqrt{\sum_{i=1}^K f_i (X_i - \bar{X})^2}$
- varianza: $\sigma^2 \cong \sum_{i=1}^K f_i (X_i - \bar{X})^2$

Probabilità e statistica

CONCETTO DI PROBABILITÀ

Continuiamo a considerare il concetto di frequenza relativa f_i di una data classe i -sima. Se facciamo un numero N di misure molto grande ($N \rightarrow \infty$), le frequenze relative tendono ad assumere valori sempre più stabili, fino a raggiungere un valore bene definito, detto **probabilità** dell'evento. Il concetto di *probabilità* è stato ampiamente trattato in corsi precedenti, per cui non verranno trattate le principali definizioni ad esso relative, ritenendole ampiamente note. Nei prossimi paragrafi saranno citati solo i concetti di più stretto interesse per le misure.

VARIABILI ALEATORIE

E' spesso conveniente associare, ad ogni risultato dell'esperimento casuale considerato, un valore numerico: tale valore può essere scelto in modo del tutto convenzionale oppure può essere introdotto al solo scopo di classificare in modo più preciso i risultati o può anche rappresentare il valore assunto da una grandezza fisica in corrispondenza del risultato ottenuto.

Per esempio, nella produzione di un certo tipo di oggetti, è possibile associare convenzionalmente il valore logico 0 a ciascun pezzo difettoso ed il valore logico 1 a ciascun pezzo sano. Oppure, se l'esperimento consiste nella produzione in serie di un certo tipo di resistori, viene immediato pensare di caratterizzare il resistore prodotto (cioè il risultato dell'esperimento) con il valore della sua resistenza.

Consideriamo perciò un esperimento casuale il cui spazio di probabilità sia (S,P) , dove S è lo **spazio di eventi**, ossia l'insieme di tutti i possibili risultati osservabili per il fenomeno, e P è la

funzione probabilità, che a ciascun evento di S associa la probabilità che esso si verifichi. Consideriamo inoltre una funzione così definita:

$$X: S \rightarrow \mathbb{R}^k$$

Si tratta cioè di una funzione che a ciascun evento contenuto in S associa un certo valore numerico, che sarà un valore reale nel caso che $k=1$ oppure un vettore di elementi reali se $k>1$. Da notare che non si tratta di una funzione probabilità: si tratta semplicemente di una legge analitica che fa corrispondere, a ciascun evento, un certo valore determinato in un modo prestabilito.

Una funzione del tipo di X prende il nome di **variabile aleatoria (o anche casuale) k -dimensionale**. Nel seguito noi ci limiteremo a considerare i casi in cui $k=1$ e $k=2$, ossia variabili aleatorie monodimensionali ($k=1$) e bidimensionali ($k=2$).

Si definisce **rango** della variabile aleatoria X il codominio di X , ossia l'insieme $X(S)$ dei valori osservabili per X .

Variabili aleatorie discrete

Una variabile aleatoria è **a valori discreti** (o semplicemente **discreta**) se il suo rango $X(S)$ è un insieme finito o comunque numerabile. Quindi, dire che una certa variabile X è discreta significa dire che il suo rango è del tipo

$$X(S) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

dove $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ (con n finito nel caso di $X(S)$ finito oppure indeterminato se $X(S)$ è infinito numerabile) sono degli scalari se X è monodimensionale oppure dei vettori a k componenti se X è k -dimensionale.

Allora, noi siamo sempre interessati a valutare la probabilità che la variabile aleatoria X assuma quei valori, ossia saremo interessati a valutare

$$P(X=x_1) \quad P(X=x_2) \quad \dots\dots$$

Questi numeri, che spesso indicheremo con le lettere minuscole p_1, p_2, \dots , godono ovviamente di 2 proprietà:

- trattandosi di valori di probabilità relativi ad uno stesso fenomeno, essi sono tutti maggiori o al più uguali a zero;
- inoltre, per lo stesso motivo, la loro somma, per n finito o infinito, è sempre pari ad 1.

La funzione P che associa ad ogni valore x_i del rango di X la probabilità che X assuma quel valore prende il nome di **funzione di probabilità** di X . L'insieme delle coppie (x_i, p_i) , con $i=1, 2, \dots$, costituisce invece ciò che si chiama **distribuzione di probabilità** di X .

Variabili aleatorie continue

L'altra categoria di variabili aleatorie è quella della *variabili aleatorie continue*. Diremo che X è una variabile aleatoria **a valori continui** (o semplicemente **continua**) se esiste una funzione reale $p: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ che gode di **3 proprietà caratteristiche**:

1. $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$

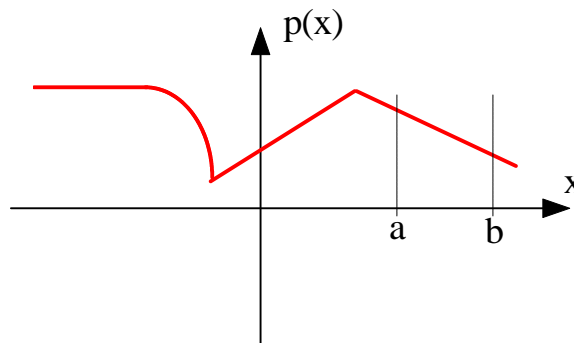
3. $\forall A \subset \mathbb{R}^k : P(X \in A) = \int_A p(x) dx$: questa proprietà dice che, preso un qualsiasi sottoinsieme A di \mathbb{R}^k , la probabilità che i valori riscontrati per X facciamo parte di A è data da quell'integrale

Una funzione $p(x)$ che goda delle prime 2 proprietà si dice che è una **densità**; la terza proprietà fa' invece sì che ad f si dia il nome di **densità di probabilità**.

Come sarà chiaro tra poco e come si deduce proprio della terza proprietà, una funzione densità di probabilità serve a indicare il peso di singoli punti o di interi sottoinsiemi di \mathbb{R}^k .

Il significato matematico della densità

Riguardo la terza proprietà della funzione densità $p(x)$ relativa ad una certa variabile aleatoria X, possiamo visualizzare il suo significato nel modo che segue: la funzione densità può essere rappresentata su di un grafico cartesiano in funzione di x ed avrà un certo andamento:



Fissiamo adesso un intervallo $[a,b]$ generico, con a e b che potrebbero anche essere infiniti; se noi andiamo a calcolare, mediante la *proprietà 3*, il valore di $P(a < X < b)$, non facciamo altro che misurare l'area della regione di piano compresa tra la curva di $p(x)$, l'asse delle ascisse ed i punti a e b. Questo dal punto di vista matematico; dal punto di vista probabilistico, con questo calcolo misuriamo il PESO dell'intervallo $[a,b]$ relativamente alla variabile aleatoria X presa in esame.

Osservazione: peso nullo dei singoli punti

Consideriamo una variabile aleatoria X continua e consideriamo un qualsiasi punto x di \mathbb{R}^k . Se X è continua, essa avrà una certa densità $p(x)$. Vogliamo calcolare la probabilità che per X si osservi il valore x, ossia vogliamo $P(X=x)$. Utilizzando la terza proprietà di $p(x)$, abbiamo che

$$P(X = x) = \int_{A=\{x\}} p(x) dx$$

dove abbiamo cioè posto l'insieme A pari semplicemente al valore x . Tuttavia, proprio per il fatto di essere costituito da 1 solo punto, è noto che ad A si assegna misura nulla ed un integrale esteso ad un insieme di misura nulla è sempre 0, quale che sia la funzione integranda. Quindi $P(X=x)=0$.

Questa è una proprietà fondamentale delle variabili aleatorie continue: *data una variabile aleatoria, ogni singolo punto del rango (cioè del codominio), che può essere \mathbb{R}^k o un suo sottoinsieme, ha peso 0.*

Apparentemente questo fatto può sembrare poco intuitivo: tuttavia, dobbiamo sempre tenere presente che, se assumiamo che X possa assumere tutti i valori di un determinato intervallo, dobbiamo da un lato dire che la probabilità che assuma un determinato valore sia 0, ma, contemporaneamente, dobbiamo anche ammettere che la probabilità uguale a zero non equivalga alla impossibilità.

In altre parole, nel caso di variabili aleatorie continue, il fatto che $P(A)=0$ NON implica necessariamente che A sia un insieme vuoto.

Distribuzione cumulativa di una variabile aleatoria continua

Supponiamo di avere una variabile aleatoria X continua e supponiamo che sia $p(x)$ la sua densità. Dato un qualsiasi punto x del codominio di X , calcoliamo la probabilità che la variabile X assuma un valore minore o al più uguale ad x : sfruttando la funzione densità, possiamo scrivere che

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{+x} p(x) dx$$

Si pone allora

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx$$

Questa funzione $F(x)$ è una funzione reale di variabile reale che non pesa ogni singolo punto ma pesa da $-\infty$ fino a quel punto. Essa gode della proprietà fondamentale per cui

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

ossia è una primitiva della funzione $p(x)$. Ma la funzione $F(x)$ gode anche di altre proprietà, che sono le seguenti:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$: infatti, è certo che $X \leq \infty$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$: infatti è impossibile che $X \leq -\infty$
3. $F(x)$ è una funzione continua
4. $F(x)$ è strettamente monotona (crescente o decrescente) sul rango di X , mentre al di fuori del rango, potrebbe anche essere costante.

Questa funzione $F(x)$ prende il nome di **distribuzione cumulativa** o **funzione di distribuzione** della variabile aleatoria X . E' evidente che la conoscenza di $F(x)$ equivale alla conoscenza di $p(x)$: infatti, in base alla relazione vista prima, basta derivare $F(x)$ per conoscere $p(x)$.

Vediamo una serie di altre proprietà di $F(x)$.

La prima è la seguente:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

La dimostrazione è immediata: infatti, dato che

$$P(X \leq x_2) = P(X \leq x_1 \cup x_1 \leq X \leq x_2) = P(X \leq x_1) + P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

è chiaro che

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$

Chiaramente, una conseguenza immediata di quest'ultima proprietà e della definizione di densità di probabilità è che

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$$

Sempre sulla falsa riga di quest'ultima e ricordando che $F(-\infty)=0$, è chiaro che

$$P(X \leq x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} p(x) dx = F(x_1)$$

Un'altra proprietà è la seguente:

$$\text{Se } x_1 \leq x_2 \Rightarrow \begin{cases} F(x) \text{ monotona crescente} \longrightarrow F(x_2) \leq F(x_1) \\ F(x) \text{ monotona decrescente} \longrightarrow F(x_2) \geq F(x_1) \end{cases}$$

VALORE ATTESO, COVARIANZA E CORRELAZIONE

Supponiamo di eseguire un gran numero di prove relative ad un dato fenomeno e indichiamo con X la variabile aleatoria discreta che indica il risultato di tali prove. Supponiamo inoltre che X abbia assunto il valore x_1 per n_1 volte, il valore x_2 per n_2 volte e così via fino al valore x_m per n_m volte. Se supponiamo che N sia le prove eseguite in totale (quindi $N=n_1+n_2+\dots+n_m$), possiamo calcolare la **media aritmetica** dei valori assunti da X : scriviamo che

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m x_i n_i = \frac{1}{N} (x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_m n_m) = \left(x_1 \frac{n_1}{N} + x_2 \frac{n_2}{N} + \dots + x_m \frac{n_m}{N} \right) = \sum_{i=1}^m x_i f_i$$

dove ovviamente $f_i=n_i/N$ è la **frequenza relativa** del risultato x_i . Tale frequenza relativa tende alla probabilità p_i del risultato x_i se il numero complessivo N di prove è abbastanza elevato: mettendoci quindi nell'ipotesi che $N \rightarrow \infty$, possiamo scrivere che

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^m x_i p_i$$

Abbiamo ottenuta una sorta di *idealizzazione* della media aritmetica: essa è infatti diventata una media pesata dei risultati possibili, dove i coefficienti di peso sono appunto le probabilità dei vari risultati. Non si tratta più, dunque, di una media aritmetica, per cui la chiamiamo **valore atteso** (oppure *aspettazione* oppure ancora *media statistica*) della variabile aleatoria X.

Nella maggior parte dei casi, il simbolo usato per rappresentare la media di X è **E[X]** oppure μ , per cui nel seguito adotteremo questa simbologia:

$$\mu = E[X] = \sum_{i=1}^m x_i p_i$$

E' opportuno sottolineare che la definizione appena fornita vale solo quando X è una variabile aleatoria discreta, ossia quando essa può assumere solo valori discreti x_1, x_2 e così via. Se invece X è una variabile aleatoria continua, con una certa densità di probabilità $p(z)$, allora la sua media (se esiste) è così definita:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) \cdot dx$$

Gli estremi di integrazione qui riportati sono i più generali; per ogni caso specifico, si tratterà del valore rispettivamente minimo e massimo assumibili da X.

Possiamo ora ripetere, a proposito della deviazione media, della deviazione standard e della varianza, gli stessi discorsi fatti poco fa per il valore atteso: si tratta sostanzialmente di riprendere le stesse espressioni trovate in precedenza e sostituire le probabilità alle frequenze relative. Quindi, per una variabile aleatoria X discreta, scriviamo quanto segue:

- deviazione media: $\alpha = \sum_{i=1}^m p_i |X_i - \bar{X}|$
- deviazione standard: $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^m p_i (X_i - \bar{X})^2}$
- varianza: $\sigma^2 = \sum_{i=1}^m p_i (X_i - \bar{X})^2$

Se invece X è una variabile aleatoria continua, allora le definizioni diventano le seguenti (si tratta sostanzialmente di sostituire le sommatorie di prima con degli integrali estesi al dominio di $p(x)$):

- deviazione media: $\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cdot |x - \mu| \cdot dx$
- deviazione standard: $\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cdot (x - \mu)^2 \cdot dx}$
- varianza: $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cdot (x - \mu)^2 \cdot dx$

Notiamo subito che, nelle definizioni fornite in questo paragrafo, non abbiamo più usato il simbolo di "circa uguale", come invece avevamo fatto in precedenza. Il motivo è semplicemente nel fatto di aver sostituito le frequenze relative con le probabilità.

STIME NON DISTORTE, EFFICIENTI, CONSISTENTI

Abbiamo in precedenza osservato che, dopo aver fatto una serie di misure ripetute e dopo aver corretto gli errori sistematici che fossero correggibili, possiamo considerare la *media aritmetica* delle misure come una **stima** del valore V del misurando: abbiamo infatti trovato la relazione

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = V + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_{si}$$

dove X_i è il risultato della generica misura.

Facciamo subito notare che parliamo di *stima* in quanto \bar{X} è, di fatto, un numero, ottenuto come media aritmetica dei risultati numerici delle N prove eseguite.

Possiamo allora valutare la bontà di questa stima, sfruttando alcuni **principi statistici**.

Per prima cosa, dobbiamo necessariamente verificare che la stima non sia **distorta**: questo significa verificare che il valore atteso della stima \bar{X} coincida con $E[X]$, ossia con il valore atteso della variabile aleatoria X

$$E[\bar{X}] = E[X]$$

Potrebbe sembrare improprio parlare di valore atteso di \bar{X} , in quanto abbiamo detto poco fa che \bar{X} è un numero. In realtà, si tratta di una variabile aleatoria che assume un valore ben preciso laddove sia disponibile un campione di misura rappresentato dai risultati (X_1, X_2, \dots, X_N) delle prove eseguite. Essa si differenzia quindi da $E[X]$, che è una quantità puramente teorica.

Se la relazione $E[\bar{X}] = E[X]$ risulta verificata, si dice che \bar{X} è uno **stimatore non distorto** di $E[X]$.

Un altro parametro di rilievo è il cosiddetto *errore quadratico medio* della stima \bar{X} : considerando che l'**errore** commesso da tale stima è $\bar{X} - E[X]$, l'**errore quadratico medio** è definito come

$$e_{qm} = E\left[(\bar{X} - E[X])^2\right]$$

Si tratta quindi di calcolare il quadrato dell'errore $\bar{X} - E[X]$ e poi di calcolarne la media.

Diremo che la stima \bar{X} è **efficiente** quando il corrispondente errore quadratico medio risulta più piccolo di quello che si avrebbe considerando altre stime \bar{X}_j :

$$e_{qm} = E\left[(\bar{X} - E[X])^2\right] \leq e_{qm,j} = E\left[(\bar{X}_j - E[X])^2\right] \quad \forall j$$

Infine, si dice che la stima \bar{X} è **consistente** quando essa si approssima ad $E[X]$ con una probabilità tanto maggiore quanto maggiore è il numero N delle prove eseguite. In termini matematici, possiamo esprimerci dicendo che, fissata una quantità $\epsilon > 0$ piccola a piacere, risulta

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(|\bar{X} - E[X]| \geq \epsilon\right) = 0$$

dove ovviamente $P(|\bar{X} - E[X]| \geq \varepsilon)$ è la probabilità che si verifichi quanto indicato in parentesi, ossia che la differenza (in modulo) tra stima e valore atteso sia non inferiore all' ε prefissato.

Fin qui abbiamo dunque fornito semplicemente tre definizioni. Vediamo allora se \bar{X} soddisfa le tre proprietà appena definite. In particolare, mostriamo che \bar{X} è una stima non distorta di $E[X]$.

Per prima cosa, dobbiamo calcolare il valore atteso di \bar{X} : ricordando come \bar{X} è stato definito, abbiamo che

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right] = \frac{1}{N} E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[X_i] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[X] = E[X]$$

dove abbiamo tenuto conto che, per definizione, il valore atteso di ciascuna misura X_i coincide con il valore atteso di X .

Quindi, abbiamo ricavato che la stima ottenuta con \bar{X} è non distorta. Senza fare ulteriori dimostrazioni, possiamo affermare che la suddetta stima è anche efficiente e consistente.

MOMENTI CENTRALI E MOMENTI ASSOLUTI

Come vedremo meglio in seguito, risulta molto conveniente considerare la variabile aleatoria $X - E[X]$ ottenuta da X sottraendole il suo valore atteso. Essa permette di calcolare il cosiddetto **momento centrale q-esimo** di X , così definito:

$$E[(X - E[X])^q]$$

Si possono facilmente verificare due proprietà di questo *momento centrale*:

- se $q=0$, il momento centrale risulta uguale ad 1: infatti $E[(X - E[X])^0] = E[1] = 1$
- se $q=1$, il momento centrale risulta uguale a 0: infatti $E[(X - E[X])^1] = E[X] - E[E[X]] = E[X] - E[X] = 0$

Dato sempre $E[(X - E[X])^q]$, possiamo sostituire, al posto delle parentesi tonde, il valore assoluto, ottenendo il cosiddetto **momento assoluto q-esimo** di X :

$$E[|X - E[X]|^q]$$

A prescindere dall'uso o meno del valore assoluto, si definisce **varianza** di X (simbolo $V(X)$ oppure σ_X^2) ciò che si ottiene ponendo $q=2$:

$$\sigma_X^2 = V(X) = E[(X - E[X])^2]$$

La radice quadrata (positiva) della varianza prende infine il nome di **deviazione standard** di X :

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{E[(X - E[X])^2]}$$

Ricordiamo adesso che, in precedenza, abbiamo definito anche la varianza e la deviazione standard di un campione di misura:

- varianza del campione (X_1, X_2, \dots, X_N): $\sigma^2 \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2$
- deviazione standard del campione (X_1, X_2, \dots, X_N): $\sigma = \sqrt{\sigma^2} \cong \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}$

Vediamo allora se esiste qualche legame tra queste due quantità e, rispettivamente, la varianza e la deviazione standard di X . In effetti, si può dimostrare che s^2 è una stima distorta di σ_X^2 e, ovviamente, che s è una stima distorta di σ_X .

Consideriamo ad esempio la varianza σ^2 . Applicando la definizione fornita prima di *stima distorta*, dobbiamo calcolare il valor medio di σ^2 e verificare se esso coincide o meno con σ_X^2 : cominciamo allora a scrivere che

$$E[\sigma^2] = E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{N} E\left[\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[(X_i - \bar{X})^2]$$

Conviene a questo punto aggiungere e sottrarre μ (= valore atteso di X) all'interno delle parentesi tonde, in modo da fare i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} E[\sigma^2] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[(X_i - \bar{X} + \mu - \mu)^2] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[(X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)(X_i - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[(X_i - \mu)^2] - 2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[(\bar{X} - \mu)(X_i - \mu)] + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[(\bar{X} - \mu)^2] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[(X_i - \mu)^2] - 2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[(\bar{X} - \mu)(X_i - \mu)] + E[(\bar{X} - \mu)^2] \end{aligned}$$

La prima quantità a secondo membro è proprio la varianza di X ; per quanto riguarda la seconda quantità, invece, possiamo scrivere che

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[(\bar{X} - \mu)(X_i - \mu)] = E\left[(\bar{X} - \mu) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)\right] = E[(\bar{X} - \mu) \cdot (\bar{X} - \mu)] = E[(\bar{X} - \mu)^2]$$

Tornando all'uguaglianza generale, abbiamo dunque che

$$E[\sigma^2] = \sigma_X^2 - E[(\bar{X} - \mu)^2]$$

In base a questa relazione, il valore atteso di σ^2 non coincide con σ_X^2 , ma differisce da essa per la quantità $E[(\bar{X} - \mu)^2]$. Dobbiamo allora indagare sul valore di questa quantità.

A tal fine, si definisce **coefficiente di correlazione mutua** tra due misure X_i ed X_j la seguente quantità:

$$C_{ij} = E[(X_i - \mu)(X_j - \mu)]$$

Le due misure si dicono **incorrelate** quanto il loro coefficiente di correlazione mutua è nullo:

$$C_{ij} = 0$$

Diremo inoltre che le misure X_i sono **mutuamente incorrelate** quando risulta

$$C_{ij} = E[(X_i - \mu)(X_j - \mu)] = 0 \quad \forall \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \text{ con } i \neq j$$

Sulla base di queste definizioni, andiamo a sviluppare esplicitamente il termine $E[(\bar{X} - \mu)^2]$:

$$\begin{aligned} E[(\bar{X} - \mu)^2] &= E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - \mu\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)\right)^2\right] = \\ &= E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)\right) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)\right)\right] = \frac{1}{N} E\left[\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)\right) \left(\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)\right)\right] \end{aligned}$$

Se supponiamo che le misure siano mutuamente incorrelate, si intuisce che quel prodotto di sommatorie (identiche) si può ridurre ad una sola sommatoria con argomento elevato al quadrato:

$$E[(\bar{X} - \mu)^2] = \frac{1}{N} E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2\right]$$

A questo punto, si vede come quella media non sia altro che la varianza di X , per cui scriviamo che

$$E[(\bar{X} - \mu)^2] = \frac{1}{N} \sigma_X^2$$

Tornando allora alla relazione $E[\sigma^2] = \sigma_X^2 - E[(\bar{X} - \mu)^2]$, scriviamo che

$$E[\sigma^2] = \sigma_X^2 - \frac{1}{N} \sigma_X^2 = \frac{N-1}{N} \sigma_X^2$$

Questa relazione ci conferma quanto anticipato in precedenza, ossia che la varianza σ^2 del generico campione di misura è una stima distorta della varianza σ_X^2 di X . L'entità della *distorsione* è data da $\frac{1}{N} \sigma_X^2$ ed è perciò tanto minore quanto maggiore è il numero N delle misure eseguite.

In effetti, quanto appena ricavato suggerisce quale possa essere una stima non distorta di σ_X^2 : basta infatti considerare la quantità

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2$$

che quindi differisce da σ^2 per il termine $(N-1)$ a denominatore.

Ripetendo gli stessi conti di prima, verifichiamo che questa quantità è una stima non distorta di σ_X^2 :

$$\begin{aligned}
 E[s^2] &= E\left[\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=1}^N E[(X_i - \bar{X})^2] \right] = \dots(\text{come prima})\dots = \\
 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N E[(X_i - \mu)^2] - 2 \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N E[(\bar{X} - \mu)(X_i - \mu)] + \frac{N}{N-1} E[(\bar{X} - \mu)^2] = \\
 &= \frac{N}{N-1} \sigma_x^2 - 2 \frac{N}{N-1} E[(\bar{X} - \mu)^2] + \frac{N}{N-1} E[(\bar{X} - \mu)^2] = \frac{N}{N-1} \sigma_x^2 - \frac{N}{N-1} E[(\bar{X} - \mu)^2] = \\
 &= \frac{N}{N-1} \sigma_x^2 - \frac{N}{N-1} \cdot \frac{1}{N} \sigma_x^2 = \sigma_x^2
 \end{aligned}$$

Facendo un discorso perfettamente analogo, uno stimatore non distorto per la deviazione standard di X sarà il seguente:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}$$

Si può inoltre dimostrare che le stime **s** ed **s²** sono anche efficienti e consistenti. Esse sono note come **stime corrette di Bessel**.

Da notare che la sostituzione di N con (N-1) non ha importanza pratica, in quanto stiamo comunque supponendo N molto grande.

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

Consideriamo adesso una funzione $Y=g(X)$, dove X è una variabile aleatoria continua con funzione densità di probabilità p(x). E' chiaro che anche Y è una variabile aleatoria. Si può allora dimostrare che il valore atteso di Y si calcola nel modo seguente:

$$E[Y] = \int g(x)p(x)dx$$

Il **valore atteso** di X è invece dato notoriamente da

$$\mu_x = E[X] = \int xp(x)dx$$

Quest'ultima relazione può essere vista come una conseguenza della precedente: basta prendere $g(X)=X$.

E' possibile stimare il valore atteso di X mediante la seguente stima:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Si tratta sostanzialmente di eseguire N osservazioni indipendenti x_i della variabile aleatoria X e poi di farne la media aritmetica.

In modo analogo, osservando che la **varianza** di X ha l'espressione

$$\sigma_X^2 = \int (x - \mu_X)^2 p(x) dx$$

la si può stimare tramite la seguente stima:

$$s_X^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

Se, d'altra parte, fosse noto il valore atteso μ_X della variabile aleatoria X, allora lo si potrebbe tranquillamente sostituire, in quest'ultima espressione, al posto della sua stima, sostituendo anche N-1 con N:

$$s_X^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)^2$$

Si definisce **covarianza** di due variabili aleatorie X ed Y la seguente quantità:

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X) = E[(Y - \mu_Y)(X - \mu_X)]$$

Essa è una misura della loro dipendenza mutua. Applicando la proprietà vista prima circa la media di una funzione di variabile aleatoria⁹, si può scrivere che

$$\text{cov}(X, Y) = \int (x - \mu_X)(y - \mu_Y) p(x, y) dx dy = \int x \cdot y \cdot p(x, y) dx dy - \mu_X \mu_Y$$

dove $p(x, y)$ è la **funzione di densità di probabilità congiunta** delle variabili X ed Y. Questa funzione gode della proprietà per cui le due variabili X ed Y sono tra loro indipendenti se e solo se risulta **$p(x, y) = g(x)h(y)$** , dove $g(x)$ è la densità di probabilità di X e $h(y)$ è la densità di probabilità di Y.

Anche per la covarianza è possibile effettuare una stima basata su N osservazioni indipendenti:

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

dove \bar{x} è una stima del valore medio di X e \bar{y} è una stima del valor medio di Y.

Si definisce **coefficiente di correlazione** di X ed Y la seguente quantità:

$$\rho(X, Y) = \rho(Y, X) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}}$$

⁹ In effetti, in questo caso bisogna tener conto che la funzione $g(X, Y)$ di cui calcolare la media è una funzione di due variabili aleatorie

Per stimare questo parametro, è possibile usare la seguente quantità:

$$r(X, Y) = r(Y, X) = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_X s_Y} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{s_X^2 s_Y^2}}$$

Il coefficiente di correlazione è un numero compreso tra -1 e +1. Esso vale 0 quando è nulla la correlazione tra X ed Y. In questo senso, il coefficiente di correlazione indica sostanzialmente il grado di dipendenza mutua relativa tra X ed Y.

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

Consideriamo una variabile X con distribuzione cosiddetta **binomiale**. Questo significa che X può assumere solo valori interi positivi o nulli (0,1,2,...,∞) e che la probabilità che assuma valore generico k è

$$P(X = k) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k}$$

Osserviamo dunque che tale distribuzione è caratterizzata da 2 parametri, **N** e **p**. Il significato di questi parametri è il seguente:

- il parametro **N** è il numero di prove (indipendenti) che sono state eseguite (relativamente ad un determinato **evento A**);
- il parametro **p** è invece la probabilità che, nella generica prova, l'evento A considerato si sia verificato.

In tal modo, X rappresenta il numero di volte, su N prove, in cui l'evento A si è verificato. Quindi, P(X=k) è la probabilità che, su N prove, l'evento A si sia verificato k volte.

Spesso, si pone q=1-p, per cui quella probabilità si trova scritta nella forma

$$P(X = k) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot q^{N-k}$$

Si può verificare che la media (o momento del primo ordine) ed il momento del secondo ordine di X sono

$$E[X] = Np$$

$$E[X^2] = Np^2 + Npq$$

da cui scaturisce che la varianza di X è $\sigma_X^2 = E[X^2] - E^2[X] = Npq$.

DISTRIBUZIONE DI POISSON

Una variabile aleatoria discreta X è detta **di Poisson** se può assumere solo valori interi positivi o nulli $(0,1,2,\dots,\infty)$ e se la probabilità che assuma valore generico k è

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Il parametro λ è quello che caratterizza questo tipo di variabile e si assume noto.

Segnaliamo che *la distribuzione di Poisson può essere usata per approssimare la distribuzione binomiale* esaminata nel paragrafo precedente: in particolare, l'approssimazione si rivela buona quando, con riferimento alla distribuzione binomiale, la probabilità p del verificarsi dell'evento A è molto piccola mentre il numero N di prove è molto elevato.

Si può verificare facilmente che la media di una variabile di Poisson è $E[X]=\lambda$ e che il momento del secondo ordine è $E[X^2]=\lambda+\lambda^2$, da cui si ricava evidentemente che anche la varianza è pari a λ .

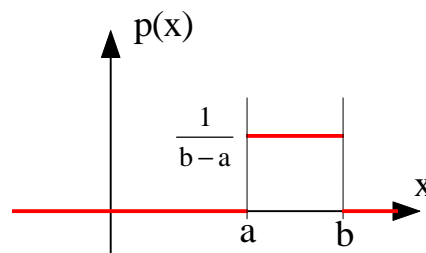
DISTRIBUZIONE UNIFORME

Fissiamo un certo intervallo $[a,b]$ e consideriamo una variabile aleatoria monodimensionale continua X il cui rango $X(S)$ coincida proprio con tale intervallo.

Consideriamo adesso la funzione reale

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } x \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

il cui andamento in funzione x è il seguente:



Vogliamo intanto vedere se si tratta di una funzione densità, ossia se verifica le prime 2 proprietà: assume sempre valori positivi o al più nulli ed inoltre, calcolandone l'integrale esteso ad $[a,b]$, esso è pari ad 1. Quindi si tratta di una funzione densità.

Prendiamo adesso un sottoinsieme A di \mathbb{R} e, sfruttando la terza proprietà, calcoliamo la probabilità che il rango di X sia contenuto in A , ossia calcoliamo $P(X \in A)$:

$$P(X \in A) = \int_A p(x) dx$$

Dato che la funzione f assume valori nulli all'esterno di $[a,b]$, anche il suo integrale esteso a punti esterni a tale intervallo sarà nullo, per cui noi possiamo scrivere

$$P(X \in A) = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = 1$$

Si dice allora che la variabile aleatoria X è **distribuita uniformemente su [a,b]**.

Accertato che p(x) è una funzione densità di probabilità, possiamo utilizzarla per calcolare la media e la varianza di X, che si ottengono applicando le definizioni:

$$\mu_x = E[X] = \int xp(x)dx \qquad \sigma_x^2 = \int (x - \mu_x)^2 p(x)dx$$

Facendo i conti, si ricava che

$$\mu_x = \frac{a+b}{2}$$

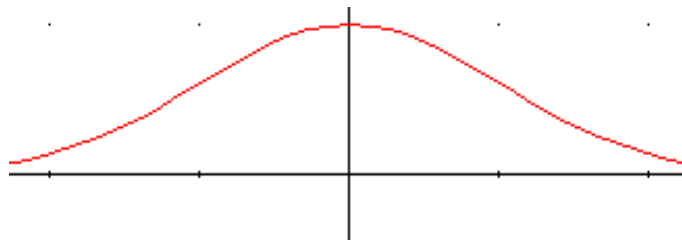
$$\sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

DISTRIBUZIONE DI GAUSS (O DISTRIBUZIONE NORMALE)

Si dice che una variabile aleatoria continua X ha una **distribuzione gaussiana con media μ e deviazione standard σ** quando la sua funzione densità di probabilità è

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

L'andamento grafico di questa funzione è quello di una *campana* centrata sul valore μ . Ad esempio, se $\mu=0$, si ha quanto segue:



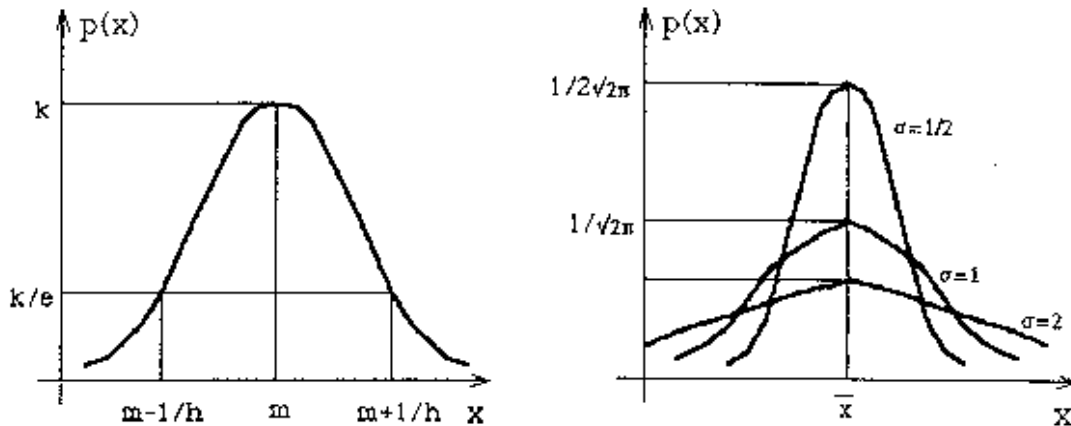
Questa *campana* è tanto più larga quanto maggiore è la varianza: quindi, una piccola varianza corrisponde ad una curva appuntita con un picco pronunciato, mentre invece una grande varianza dà luogo ad una curva più piatta, cioè con una maggiore dispersione dei valori rispetto al valore medio.

Un modo più compatto di esprimere una densità di probabilità di tipo gaussiano è il seguente:

$$p(x) = ke^{-h^2(x-\mu)^2}$$

In questo caso, la costante k indica il valore massimo di p(x), ottenuto in corrispondenza di $x=\mu$, mentre la costante h (detta **costante di precisione**), essendo inversamente proporzionale alla

varianza, fornisce le indicazioni circa la maggiore o minore larghezza della curva: un alto valore di h corrisponde ad una curva appuntita mentre un basso valore di h corrisponde ad una curva più piatta, come illustrato nella prossima figura:



L'espressione $p(x) = ke^{-h^2(x-\mu)^2}$ è quella più comoda per verificare che μ è effettivamente la media di X e per calcolare l'espressione della varianza. Cominciamo per esempio dal calcolo della media, effettuato in base alla semplice definizione:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xke^{-h^2(x-\mu)^2} dx = k \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-h^2(x-\mu)^2} dx = k \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{z}{h} + \mu\right) e^{-z^2} \frac{1}{h} dz = \\ &= \frac{k}{h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} ze^{-z^2} dz + \frac{k\mu}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = 0 + \frac{k\mu}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{k\mu}{h} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Si tratta ora di trovare le espressioni delle costanti k ed h . In realtà, è sufficiente trovare l'espressione di k . Infatti, affinché la funzione $p(x) = ke^{-h^2(x-\mu)^2}$ sia una densità di probabilità, il suo integrale tra $-\infty$ a $+\infty$ deve essere unitario:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-h^2(x-\mu)^2} dx = 1$$

E' facile verificare che questa condizione è verificata se solo se risulta $k = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$.

Sostituendo questa espressione in quella ottenuta per $E[X]$, si trova evidentemente che $E[X]=\mu$. Calcoliamo adesso la varianza di X , applicando sempre la definizione:

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot ke^{-h^2(x-\mu)^2} \cdot dx = k \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot e^{-h^2(x-\mu)^2} \cdot dx = \\ &= k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2}{h^2} \cdot e^{-z^2} \cdot \frac{1}{h} dz = \frac{k}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \cdot e^{-z^2} \cdot dz = \frac{k}{h^3} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{h}{h^3 \sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2h^2} \end{aligned}$$

da cui chiaramente scaturisce che

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$$

Un'altra grandezza facile da calcolare è la deviazione media di X: infatti, ricordando che quest'ultima è data, per definizione, da

$$\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cdot |x - \mu| \cdot dx$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_{-\infty}^{+\infty} k e^{-h^2(x-\mu)^2} \cdot |x - \mu| \cdot dx = k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(x-\mu)^2} \cdot |x - \mu| \cdot dx = k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2y^2} \cdot y \cdot dy = 2k \int_0^{+\infty} e^{-h^2y^2} \cdot y \cdot dy = \\ &= 2k \int_0^{+\infty} e^{-z} \cdot y \cdot \frac{dz}{2h^2y} = \frac{k}{h^2} \int_0^{+\infty} e^{-z} dz = \frac{k}{h^2} = \frac{h/\sqrt{\pi}}{h^2} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sigma \cong \frac{4}{5} \sigma \end{aligned}$$

Abbiamo dunque trovato che la deviazione media di X è circa i 4/5 della deviazione standard di X stessa. Questa relazione tra deviazione media α e deviazione standard σ è molto utile nella pratica, per due ragioni:

- supponiamo di aver effettuato una serie di misure e di aver trovato che gli errori accidentali sono distribuiti secondo una distribuzione di Gauss; in questo caso, per calcolare σ , possiamo evitare di calcolare il quadrato degli scarti e possiamo invece calcolare prima α e poi moltiplicare per 5/4; è bene però precisare che questo discorso vale solo per la distribuzione di Gauss;
- in secondo luogo, se non si è certi a priori che gli errori accidentali sono distribuiti con legge di Gauss, si può andare a calcolare α e σ e poi verificare che il loro rapporto sia pari a 4/5. In seguito vedremo che esiste la cosiddetta **prova del chi-quadro** che consente di effettuare tale verifica in modo migliore.

Calcolo della distribuzione cumulativa per una variabile di Gauss

Abbiamo in precedenza definito come *distribuzione cumulativa* di una variabile aleatoria X continua la seguente funzione:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx$$

Vogliamo calcolare questa funzione nel caso che X sia una variabile di Gauss. Sostituendo semplicemente l'espressione di p(x), otteniamo

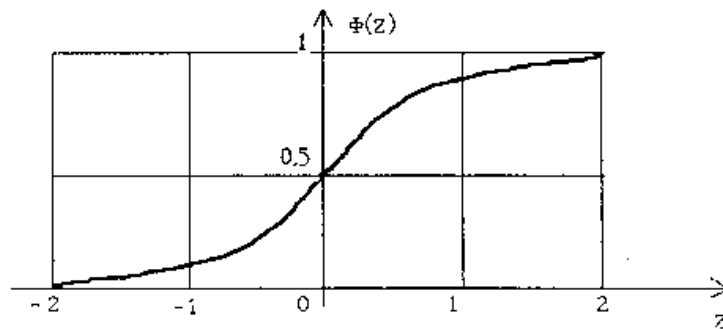
$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Tutto sta a calcolare quell'integrale. Il problema è che esso non può essere calcolato con i metodi elementari, per cui bisogna seguire qualche altra strada.

In particolare, si può verificare che quell'integrale può essere espresso come differenza tra due funzioni del tipo seguente:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

La funzione qui riportata è la cosiddetta **distribuzione normale standard**, ossia la distribuzione normale avente media $\mu=0$ e varianza $\sigma=1$. La particolarità di questa funzione è che il suo valore, al variare di z , è stato calcolato e tabellato sfruttando opportuni metodi numerici. L'andamento grafico di $\Phi(z)$ in funzione di z è riportato nella figura seguente:



Una delle particolarità di questa funzione è nella seguente proprietà:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

Vediamo allora come è possibile sfruttare la funzione $\Phi(z)$ per calcolare la funzione $F(x)$. In base ad una nota proprietà della funzione di distribuzione cumulativa, possiamo scrivere che

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

dove ovviamente

$$F(x_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad F(x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Se, in questi ultimi due integrali, poniamo $z=(x-\mu)/\sigma$, è evidente che risulta

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

Adesso supponiamo che sia $x_1=\mu-k\sigma$ e $x_2=\mu+k\sigma$, dove k è una costante arbitraria. E' evidente che risulta $z_1=-k$ e $z_2=k$, per cui possiamo riscrivere l'ultima uguaglianza nella forma

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = F(\mu - k\sigma) - F(\mu + k\sigma) = \Phi(k) - \Phi(-k)$$

Avendo detto prima che risulta $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, possiamo concludere che

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = F(\mu - k\sigma) - F(\mu + k\sigma) = 2\Phi(k) - 1$$

Quindi, fissate la media μ e la deviazione standard σ della distribuzione, i valori della probabilità a primo membro si ottengono semplicemente fissando k e andando a leggere, sulle tabelle citate prima, il corrispondente valore di $\Phi(k)$. Andiamo allora a calcolare alcune probabilità di particolare interesse:

$$k=1 \rightarrow P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 2\Phi(1) - 1 = 0.683$$

$$k=2 \rightarrow P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 2\Phi(2) - 1 = 0.954$$

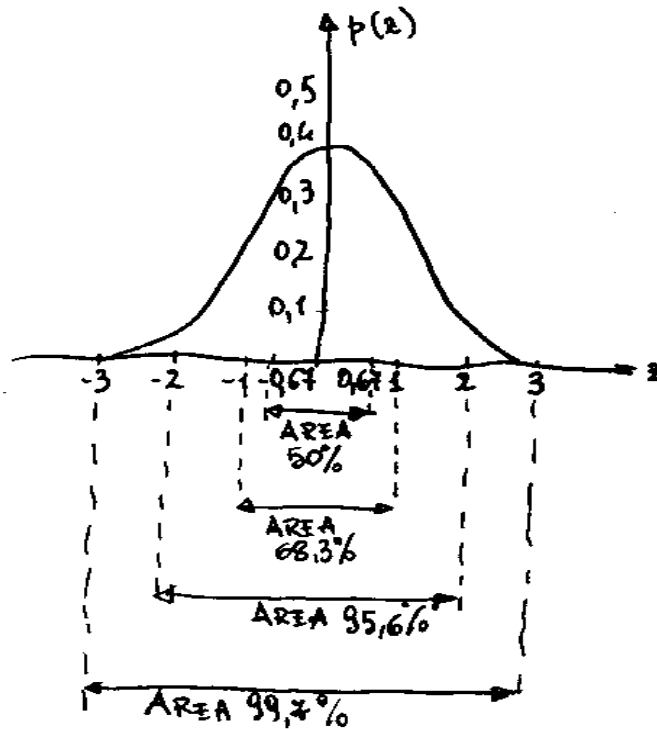
$$k=3 \rightarrow P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 2\phi(3) - 1 = 0.997$$

Queste probabilità dicono quanto segue:

- la probabilità che X cada nell'intervallo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ è pari al 68,3%;
- la probabilità che X cada nell'intervallo $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ è pari al 95,4%;
- la probabilità che X cada nell'intervallo $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ è pari al 99,7%.

Gli intervalli qui riportati (tutti centrati sul valore medio μ) sono detti **intervalli di confidenza**, mentre le corrispondenti probabilità sono dette **livelli (o coefficienti) di confidenza**.

La figura seguente mostra una sorta di interpretazione grafica di questi risultati:



Non dobbiamo infatti dimenticare che

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$$

ossia che le probabilità calcolate prima non sono altro che aree sottese dalla campana gaussiana $p(x)$ e dalle ascisse x_1 ed x_2 di volta in volta specificate.

Quindi, in conclusione, *sfruttando la funzione $f(z)$ ed i suoi valori tabellati, abbiamo informazioni molto precise, una volta note m e s , sui livelli di confidenza di X .*

Funzione densità di probabilità congiunta

Supponiamo adesso che X ed Y siano due variabili aleatorie continue, entrambe con distribuzione gaussiana, la prima con media μ_X e varianza σ_X^2 e la seconda con media μ_Y e varianza σ_Y^2 . E'

possibile dimostrare che la **funzione densità di probabilità congiunta** di tali variabili aleatorie è la seguente:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]}$$

dove $\rho = \frac{E[(X-E(X))(Y-E(Y))]}{\sigma_X\sigma_Y}$ è il **coefficiente di correlazione** di X ed Y.

E' subito ovvio che quella espressione si semplifica notevolmente quando sia X sia Y hanno media nulla e deviazione standard unitaria, ossia quando sono entrambe delle *distribuzioni normali*: infatti, ponendo

$$\begin{cases} \mu_X = \mu_Y = 0 \\ \sigma_X = \sigma_Y = 1 \end{cases}$$

si ottiene

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[x^2+y^2-2\rho xy]}$$

Indipendenza di due variabili aleatorie con distribuzione gaussiana

Sappiamo che due generiche variabili aleatorie continue X ed Y, con funzione densità rispettivamente p(x) e g(y), si dicono **indipendenti** quando la funzione di densità congiunta è pari al prodotto delle funzioni densità:

$$f_{XY}(x,y) = p(x) \cdot g(y)$$

E' possibile dimostrare che, se X ed Y hanno entrambe distribuzione gaussiana, quella condizione avviene quando $\rho=0$, ossia quando le due variabili sono *incorrelate*.

Ricordiamo che il coefficiente di correlazione ρ tra X ed Y è definito nel modo seguente:

$$\rho = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sqrt{E[(X-E(X))^2]E[(Y-E(Y))^2]}}$$

E' cioè il rapporto tra la covarianza delle due variabili ed il prodotto delle rispettive varianze. Quando le due variabili sono tra loro indipendenti, dato che $E[XY]=E[X]E[Y]$ risulta evidentemente $\rho=0$.

In pratica, mentre l'indipendenza tra X ed Y impone che risulti $\rho=0$, nel caso di X ed Y con distribuzione gaussiana vale anche il contrario: se $\rho=0$, allora le due variabili sono anche indipendenti. In poche parole, *date X ed Y con distribuzione gaussiana, la loro incorrelazione equivale alla loro indipendenza, mentre invece, in generale, non è così* (in quanto l'indipendenza garantisce l'incorrelazione ma non è necessariamente vero il contrario).

Funzione densità di probabilità condizionata

Siano X ed Y due variabili aleatorie generiche. Si definisce **funzione densità di probabilità condizionata** la funzione

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{d}{dx} F_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

dove

$$F_{X|Y}(x, y) = F_X(X \leq x | Y = y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} F_X(X \leq x | y \leq Y \leq y + \Delta y)$$

Allora, è possibile dimostrare che, se X ed Y sono entrambe con distribuzione gaussiana, anche la variabile aleatoria $Z = X|Y$, la cui funzione densità è $f_{X|Y}(x, y)$, ha distribuzione gaussiana.

Anzi, se μ_X e σ_X^2 sono media e varianza di X e μ_Y e σ_Y^2 sono media e varianza di Y, è possibile dimostrare che la media e la varianza di Z sono le seguenti:

$$\begin{cases} \mu_Z = \mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (y - \mu_Y) \\ \sigma_Z = \sigma_X \sqrt{1 - \rho^2} \end{cases}$$

Combinazione lineare di variabili aleatorie con distribuzione gaussiana

Sia X una variabile aleatoria continua avente distribuzione gaussiana con media μ_X e varianza σ_X^2 . Consideriamo inoltre la variabile aleatoria $Y = aX + b$, dove a e b sono due qualsiasi numeri reali.

Si può facilmente dimostrare che, se Y è definita in quel modo, la sua funzione densità di probabilità, a prescindere dalla natura di X, è

$$g(y) = \frac{1}{|a|} \cdot p\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

In questo caso particolare, questa formula ci dice che, essendo X gaussiana, anche Y risulta essere gaussiana: anzi, sapendo che la densità di probabilità di X è

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

possiamo subito scrivere che

$$g(y) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a} - \mu_X\right)^2}{2\sigma_X^2}}$$

Conseguenza importante di questa proprietà è che, se X ed Y sono due variabili aleatorie entrambe con distribuzione gaussiana, risulta gaussiana

anche la variabile aleatoria $Z = aX + bY$, ossia una qualsiasi combinazione lineare delle due.

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

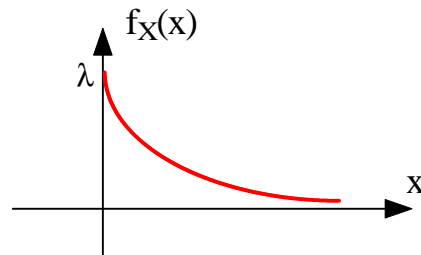
Consideriamo una variabile aleatoria X continua, la cui distribuzione cumulativa sia

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Vogliamo la densità di X : ci basta effettuare una derivazione rispetto ad x , dalla quale otteniamo

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

L'andamento di questa funzione è il seguente:



La caratteristica di questa distribuzione è che il 36,8% dei dati della popolazione risultano maggiori del valore medio $1/\lambda$, mentre il rimanente 63,2% dei dati risulta inferiore ad $1/\lambda$.

Una variabile aleatoria X che abbia una funzione densità di probabilità così fatta si dice che ha una **distribuzione esponenziale con parametro λ** .

Una caratteristica molto importante di una variabile aleatoria X che abbia questa distribuzione è quella di essere **senza memoria**: ciò significa, in termini formali, che vale la relazione

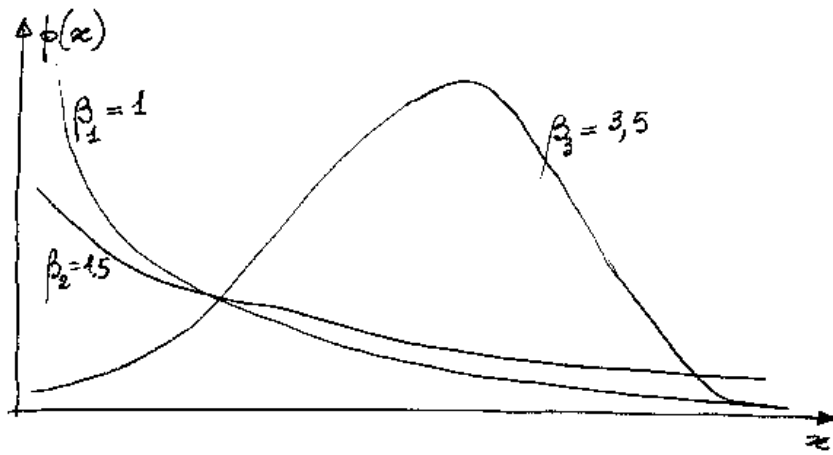
$$P(X > T + s | X > T) = P(X > s)$$

DISTRIBUZIONE DI WEIBULL

Un'altra distribuzione, relativamente a variabili aleatorie continue, è la **distribuzione di Weibull**, caratterizzata dalla seguente densità di probabilità:

$$p(x) = \alpha \cdot \beta \cdot (x - \gamma)^{\beta-1} \cdot e^{-\alpha\beta(x-\gamma)}$$

Compaiono qui 3 parametri: α è detto **fattore di scala**, β è detto **fattore di forma** ed infine γ è detto **fattore di posizione**. Come indica il nome, il valore del fattore di forma β determina la forma della curva che rappresenta la distribuzione di Weibull. Nella figura seguente sono riportati 3 casi importanti:



Come si vede, per $\beta=1$ si ottiene la distribuzione esponenziale, mentre per $\beta=3,5$ si ottiene la distribuzione di Gauss.

Nei casi pratici, il parametro β varia tra 0,3 e 5.

DISTRIBUZIONE GAMMA

Ancora nell'ambito delle distribuzione continue, la **distribuzione gamma** è caratterizzata dalla seguente densità di probabilità:

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0$$

Come si nota, si tratta di una variabile aleatoria che assume solo valori positivi ($x > 0$). Integrando $p(x)$ rispetto ad x , si ottiene la distribuzione cumulativa:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx = \int_0^x \frac{x^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = \frac{1}{\lambda^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^x x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = \frac{1}{\lambda^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{x/\lambda} z^{\alpha-1} e^{-z} dz$$

Si può verificare che la media di una variabile aleatoria con distribuzione gamma è $\mu = \alpha\lambda$, mentre la varianza è $\sigma^2 = \alpha\lambda^2$. In entrambe le quantità, come si vede, compare un termine moltiplicativo α , che deve risultare non intero.

Il termine "gamma" deriva evidentemente dalla presenza della funzione $\Gamma(\alpha)$, che è così definita:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Questa funzione gode di alcune interessanti proprietà:

- in primo luogo, si verifica immediatamente che $\Gamma(1) = 1$: infatti, se $\alpha=1$, il termine $x^{\alpha-1}$ diventa unitario, per cui resta da calcolare l'integrale tra 0 ed ∞ di un esponenziale e tale integrale è notoriamente unitario;

- in secondo luogo, se risolviamo quell'integrale per parti, otteniamo

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = -\left[x^{\alpha-1} e^{-x} \right]_0^{\infty} - (\alpha-1) \int_0^{\infty} x^{\alpha-2} (-e^{-x}) dx = (\alpha-1) \int_0^{\infty} x^{\alpha-2} e^{-x} dx = (\alpha-1) \Gamma(\alpha-1)$$

In generale, vale cioè la proprietà per cui $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Non solo, ma se applichiamo ripetutamente questa proprietà partendo da $\alpha=1$ e teniamo conto che $\Gamma(1)=1$, si ottiene evidentemente che $\Gamma(\alpha+1) = \alpha!$. Per questo motivo, la funzione $\Gamma(\alpha)$ è nota anche come **funzione fattoriale**;

- una ulteriore proprietà di interesse è quella per cui, prendendo $\alpha=1$, la distribuzione gamma coincide con la distribuzione esponenziale di media λ : infatti, per $\alpha=1$ si ottiene

$$p(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad x > 0, \lambda > 0$$

Distribuzione chi quadro

Un altro caso particolare della distribuzione gamma si ottiene ponendo $\lambda=2$ e introducendo il parametro $\nu=2\alpha$ al posto del parametro α :

$$p(x) = \frac{x^{\frac{\nu}{2}-1}}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} \quad x > 0, \nu > 0$$

Si ottiene così la cosiddetta **distribuzione chi quadro**, sulla quale torneremo meglio anche in seguito.

Il parametro ν è il **numero di gradi di libertà** della distribuzione.

DISTRIBUZIONE T (O DI STUDENT)

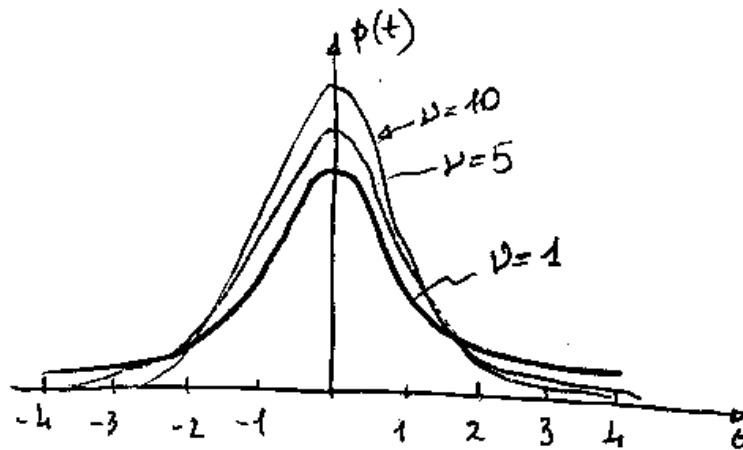
L'ultima distribuzione di probabilità di cui ci occupiamo è detta **distribuzione t** (o anche **distribuzione di Student**) ed è caratterizzata dalla seguente densità di probabilità:

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

Ancora una volta, Γ è la **funzione gamma** introdotta con la distribuzione gamma, mentre $\nu > 0$ rappresenta i **gradi di libertà**.

Quando $\nu \rightarrow \infty$, la funzione $p(t)$ tende a diventare una gaussiana con valor medio $\mu=0$ e deviazione standard $\sigma=1$, ossia una distribuzione normale standard.

La figura seguente mostra l'andamento di $p(t)$ al variare del parametro v :



Come si nota, l'andamento di $p(t)$ è molto simile a quello della campana gaussiana a valor medio nullo: in particolare, si nota che all'aumentare dei gradi di libertà la funzione si innalza e si addensa intorno alla media.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: <http://users.iol.it/sandry>
succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>