Appunti di Misure Elettriche
Capitolo 2 - Parte I
Caratterizzazione di uno strumento

INTRODUZIONE: CARATTERISTICHE DI UNO STRUMENTO DI MISURA

Le **specifiche** di uno *strumento di misura* o, più in generale, di un **sistema**, in grado di caratterizzarne il funzionamento in determinate e diversificate condizioni, sono generalmente fornite direttamente dal costruttore. E' chiaro, d'altra parte, che i parametri caratteristici sono definiti entro certi limiti, detti **tolleranze**, che consentono di delimitare una fascia di errore per ogni caratteristica.

Nel definire tali specifiche, si può rappresentare lo strumento come un blocco in grado di trasferire all'uscita l'informazione e l'energia presenti in ingresso, eventualmente in forma invariata o convertita:

Il legame (generalmente espresso come rapporto) tra le quantità di uscita e di ingresso è la cosiddetta **caratteristica di trasferimento** dello strumento. Essa fornisce informazioni solo sul **comportamento statico** dello strumento, ossia sul comportamento in condizioni di funzionamento normale, quando il misurando subisce variazioni molto lente ed in assenza di urti, vibrazioni o accelerazioni.

Generalmente, è difficile ottenere con precisione tale caratteristica di trasferimento, per cui è necessario, per ottenerla, ricorrere a delle ipotesi semplificative.

Mentre la maggior parte delle prestazioni di uno strumento può essere riferita alla caratteristica statica di trasferimento, è opportuno conoscere anche il **comportamento dinamico** dello strumento stesso (che è definito dalla **funzione di trasferimento**), che indica la risposta del sistema alle variazioni con il tempo del misurando.

E' bene ora precisare che solo raramente la grandezza fisica di uscita Y è funzione della sola variabile in ingresso X (grandezza da misurare); in realtà, Y dipende, anche se in misura ridotta, da altre grandezze fisiche, dette **grandezze di influenza** (o anche *grandezze* o *fattori perturbanti*), le quali sono capaci di modificare, in modo più o meno rilevante e comunque indesiderato, la funzione Y(X).

Quando non è possibile trascurare gli effetti indesiderati nella risposta dello strumento, occorre introdurre delle **correzioni**, da effettuare tipicamente in fase di elaborazione del segnale in uscita dallo strumenti, noti che siano gli effetti su di esso dei fattori perturbanti. Per esempio, la temperatura è un parametro che è sempre presente nei fenomeni fisici, per cui, nella quasi totalità dei casi in cui si misura una certa grandezza, bisognerà tener conto dell'influenza della temperatura sullo strumento e quindi sulla funzione Y(X). Questa considerazione spiega perché quasi tutti i sistemi automatici di misura dispongono di un **sensore di temperatura**[1].

Per meglio caratterizzare il comportamento del generico strumento di misura, si introducono altri due tipi di caratteristiche:

[1] In effetti, è bene chiarire che la temperatura agisce sia sul misurando sia sul sensore; quindi, mentre la variazione del misurando in funzione di T è legata ad una proprietà del sistema sotto osservazione e rappresenta quindi qualcosa da rilevare, l'effetto di T sul sensore è indesiderato e va quindi eliminato l'errore derivante da tale effetto. In sostanza, per eseguire la correzione non è sufficiente misurare le variazioni di temperatura, ma è anche necessario conoscere con precisione la legge di dipendenza da T della caratteristica di trasferimento dello strumento.

- le **caratteristiche ambientali** si riferiscono al comportamento di uno strumento dopo l'applicazione (*caratteristiche ambientali non operative*) o durante l'applicazione (*caratteristiche ambientali operative*) di una o più grandezze di influenza;
- le **caratteristiche di affidabilità** sono invece relative alla vita operativa dello strumento ed alle possibili cause di malfunzionamento all'interno del sistema in cui esso è inserito.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

L'*evoluzione nel tempo di molti sistemi fisici può essere rappresentata da modelli matematici lineari stazionari.* In particolare, dato un **sistema lineare stazionario**, il suo modello matematico è rappresentato da una <u>equazione differenziale ordinaria, lineare e a coefficienti costanti</u>, del tipo

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 x$$

dove y(t) è la funzione (incognita) di uscita, x(t) la funzione (nota) di ingresso, a_k (k=0,...,n) i coefficienti delle derivate temporali della funzione di uscita (con a_n supposto NON nullo) e b_k (k=0,...,m) i coefficienti delle derivate temporali della funzione di ingresso.

L'intero *n* rappresenta l'ordine della equazione differenziale (vale a dire l'ordine massimo delle derivate della funzione incognita in essa presenti), mentre l'intero *m* rappresenta l'ordine massimo delle derivate della funzione di ingresso. E' noto che i sistemi fisici soddisfano sempre alla condizione $\boxed{m \leq n}$; infatti, questa condizione corrisponde alla **realizzabilità fisica** (o **causalità**) del modello adottato: se essa non fosse soddisfatta, il modello presenterebbe una risposta di ampiezza infinita a fronte di un segnale sinusoidale di ingresso di frequenza finita, il che non può certo corrispondere alla realtà fisica.

Per risolvere l'equazione differenziale prima indicata, ossia per determinare l'andamento della funzione y(t) nel generico intervallo di tempo [0,T], sono necessarie fondamentalmente due informazioni:

- le **condizioni iniziali**, rappresentate dai valori di y e delle sue derivate (fino a quella di ordine n-1) nell'istante $\mathbf{t=0^-}$;
- l'andamento del segnale di ingresso x(t) nell'intervallo di osservazione [0,T].

Spesso, l'estremo destro dell'intervallo di definizione delle funzioni x(t) e y(t) non viene specificato e, in tal caso, si assume che esso sia infinito.

*Per quanto riguarda la funzione di ingresso x(t), si suppone che essa sia limitata per ogni t finito e continua a tratti (*cioè presenti un numero finito di eventuali punti di discontinuità in ogni intervallo di tempo di lunghezza finita). Sotto queste ipotesi, le derivate che compaiono nell'equazione differenziale di prima sono delle **derivate generalizzate** e, inoltre, *l'equazione differenziale stessa ammette un'unica soluzione y(t), che risulta essere continua se m<n o continua a tratti se m=n.*

Per quanto riguarda il procedimento concreto con cui risolvere l'equazione differenziale, <u>*è possibile considerare separatamente il contributo delle condizioni iniziali e quello del segnale di ingresso;*</u> si può cioè ottenere la soluzione dell'equazione differenziale come somma di due funzioni ricavate separatamente, in base al seguente procedimento:

- in primo luogo, si suppone nullo il segnale di ingresso, in modo che l'equazione differenziale diventi omogenea:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = 0$$

  Si trova quindi la funzione $y_0(t)$, per $0 \le t \le T$, che soddisfa questa equazione con le condizioni iniziali specificate dal problema. Questa funzione $y_0(t)$ è la cosiddetta **evoluzione libera** del sistema;

- in secondo luogo, si suppongono nulle tutte le condizioni iniziali e si trova quella funzione $y_1(t)$, per $0 \le t \le T$, che soddisfa tali condizioni iniziali nulle e l'equazione differenziale completa

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = 0$$

  Questa funzione $y_1(t)$, è la cosiddetta **evoluzione forzata** del sistema;

- infine, si fa la somma dell'evoluzione libera e di quella forzata, in modo da ottenere la soluzione effettiva dell'equazione differenziale:

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t)$$

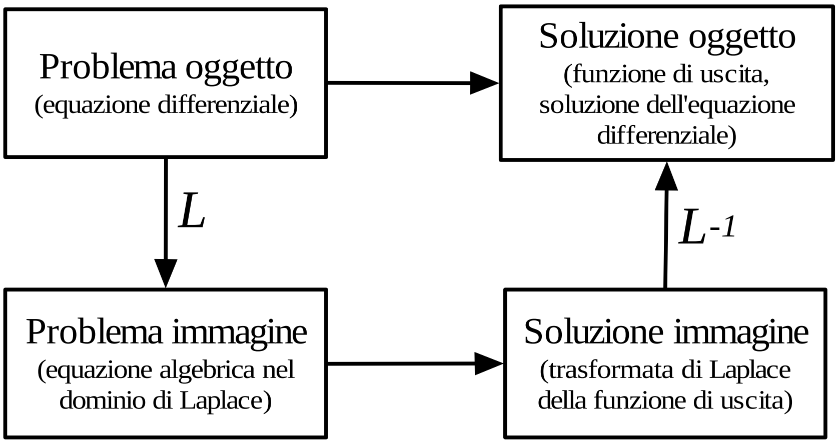
Questo è dunque il procedimento da seguire nel caso in cui i coefficienti dell'equazione differenziale sono costanti, il che corrisponde a dire che il sistema è **stazionario**. Se, invece, il sistema non fosse stazionario, i suddetti coefficienti sarebbero funzioni del tempo e quindi il procedimento appena illustrato non sarebbe più applicabile.

Inoltre, se il sistema possiede più ingressi e più uscite e se tra ciascuna coppia ingresso-uscita è possibile individuare un legame rappresentato da una equazione differenziale del tipo visto prima, allora l'evoluzione di ciascuna delle uscite si può dedurre facilmente applicando la proprietà di sovrapposizione degli effetti.

USO DELLA TRASFORMAZIONE DI LAPLACE

Per la soluzione delle equazioni differenziali sono di notevole utilità le **trasformazioni funzionali**, ossia le trasformazioni che associano funzioni a funzioni. In particolare, noi siamo interessati all'uso della **trasformata di Laplace**.

Le trasformazioni funzionali stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra **funzioni oggetto**, *normalmente funzioni del tempo, e* **funzioni immagine** *di diversa natura.* In questo modo, le operazioni eseguite sulle funzioni oggetto, come per esempio la derivazione o l'integrazione, corrispondono ad operazioni più semplici sulle funzioni immagine e, di conseguenza, al **problema oggetto** viene ad essere associato un **problema immagine** di più facile soluzione:



Una volta ricavata la soluzione del *problema immagine*, si passa alla soluzione del *problema oggetto* eseguendo, sulle funzioni immagine, l'operazione di **antitrasformazione** (o trasformazione inversa).

Per essere più chiari, quando c'è da risolvere una equazione differenziale o integro-differenziale (*problema oggetto*), è possibile procedere nel modo seguente:

- in primo luogo, si trasforma l'equazione differenziale in una equazione algebrica (*problema immagine*) mediante l'applicazione della trasformata di Laplace; in questo passaggio, che comporta essenzialmente l'applicazione delle proprietà di linearità, di derivazione nel tempo e di integrazione nel tempo, è importante fare attenzione alle condizioni iniziali, come vedremo tra poco;
- successivamente, si risolve l'equazione algebrica in modo da ottenere la soluzione immagine;
- a questo punto, è possibile risalire alla soluzione dell'equazione differenziale di partenza (cioè alla soluzione oggetto) applicando semplicemente l'antitrasformata di Laplace alla soluzione immagine.

Questo, dunque, in linea generale. Vediamo ora i dettagli matematici.

Il punto di partenza è dunque l'equazione differenziale generica caratteristica di un <u>sistema lineare stazionario</u>:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 x$$

Siamo interessati a conoscere la funzione di uscita y(t) che soddisfa questa equazione e le condizioni iniziali specificate, vale a dire i valori di y e delle sue derivate (fino a quella di ordine n-1) nell'istante $t=0^-$. Possiamo allora scomporre (in base al cosiddetto **teorema di separazione**) la soluzione generale y(t) nella somma della soluzione $y_0(t)$ dell'equazione omogenea e di quella $y_1(t)$ corrispondente a condizioni iniziali tutte nulle:

- l'equazione omogenea associata a quella completa è

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = 0$$

Applicando l'operatore trasformata di Laplace e tenendo conto delle condizioni iniziali sull'uscita (necessarie per l'applicazione del teorema di derivazione), essa diventa

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_0 Y(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^i \left.\frac{d^{k-i-1} y(t)}{dt}\right|_{t=0^-}$$

da cui si ricava che la **trasformata di Laplace della risposta libera** è

$$Y_0(s) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^i \left.\frac{d^{k-i-1} y(t)}{dt}\right|_{t=0^-}}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

- in modo analogo, applicando l'operatore trasformata di Laplace all'equazione completa, nell'ipotesi questa volta di condizioni iniziali nulle, otteniamo

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \ldots + b_0 X(s)$$

da cui si ricava che la **trasformata di Laplace della risposta forzata** è

$$Y_1(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} X(s)$$

A questo punto, possiamo sommare le due soluzioni, in modo da ottenere la trasformata di Laplace dell'uscita complessiva:

$$Y(s) = Y_0(s) + Y_1(s) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^i \left.\frac{d^{k-i-1} y(t)}{dt}\right|_{t=0^-} + \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0\right) X(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

Questa è dunque la <u>soluzione immagine del nostro problema</u>. Per ottenere la soluzione oggetto, ossia la funzione y(t), non dobbiamo far altro che applicare l'antitrasformazione di Laplace:

$$y(t) = L^{-1}\left[Y(s)\right]$$

Spesso, nell'ambito dei <u>sistemi di misura</u> (ma non solo), si fa riferimento a **sistemi inizialmente in quiete**, ossia con tutte le condizioni iniziali nulle. In questo caso, è evidente che $Y_0(s)=0$ e quindi che l'uscita del sistema si riduce all'**uscita forzata**:

$$Y(s) = Y_1(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} X(s) \longrightarrow y(t) = L^{-1}\left[Y_1(s)\right]$$

In base a questa relazione, la trasformata di Laplace del segnale di uscita si ottiene semplicemente moltiplicando la trasformata del segnale di ingresso per la seguente **funzione di trasferimento** del sistema:

$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

La funzione di trasferimento di un sistema è dunque una funzione della variabile s con la caratteristica che, moltiplicandola per la trasformata della funzione di ingresso, si ottiene la trasformata dell'evoluzione forzata.

E' bene osservare che *non tutti i sistemi dinamici, anche se lineari e stazionari, sono caratterizzati da funzioni di trasferimento razionali fratte*. Un esempio tipico è il **ritardo puro**, la cui funzione di trasferimento è trascendente: infatti, se l'ingresso è x(t), l'uscita è y(t)=x(t-T) e, nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle, la funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{L[x(t-T)]}{L[x(t)]} = \frac{X(s)e^{-Ts}}{X(s)} = e^{-Ts}$$

FUNZIONE DI RISPOSTA ALL'IMPULSO

Nel dominio di Laplace, abbiamo visto poco fa che la risposta forzata del sistema ha la seguente espressione:

$$Y_1(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0} X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} X(s) = G(s)X(s)$$

In base a questa relazione, si osserva che la **funzione di trasferimento** G(s) è definita come la risposta del sistema quando X(s)=1: dato che l'antitrasformata di 1 è l'impulso di Dirac δ(t), deduciamo che *la funzione di trasferimento di un sistema non è altro che la trasformata di Laplace della risposta del sistema stesso quando in ingresso viene posto l'impulso di Dirac; tale risposta (nel dominio del tempo) prende perciò il nome di* ***risposta all'impulso*** *del sistema.*

Vediamo allora di ricavare l'uscita forzata y(t) per antitrasformazione della funzione $Y(s) = Y_1(s) = G(s)X(s)$: abbiamo intanto che

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s)X(s)]$$

Ricordando adesso che un prodotto nel dominio di Laplace equivale ad un prodotto di convoluzione nel dominio del tempo, possiamo scrivere che

$$\boxed{y(t) = g(t) * x(t) = \int_0^t g(t-T)x(T)dT = \int_0^t x(t-T)g(T)dT}$$

dove chiaramente $g(t) = L^{-1}[G(s)]$ è la risposta all'impulso prima citata.

FUNZIONAMENTO IN REGIME DINAMICO

Nel seguito del capitolo, faremo riferimento solo a strumenti di misura con ingresso ed uscita analogici ed useremo perciò sempre modelli continui.

Le **caratteristiche dinamiche** di uno strumento sono importanti in quanto aiutano a capire il comportamento dello strumento stesso in regime non stazionario. Esse aiutano anche, come si vedrà in seguito, a definire una funzione di trasferimento (il cosiddetto *errore dinamico*) che fornisce lo scostamento tra il **comportamento effettivo** dello strumento in condizioni transitorie e il **comportamento desiderabile**.

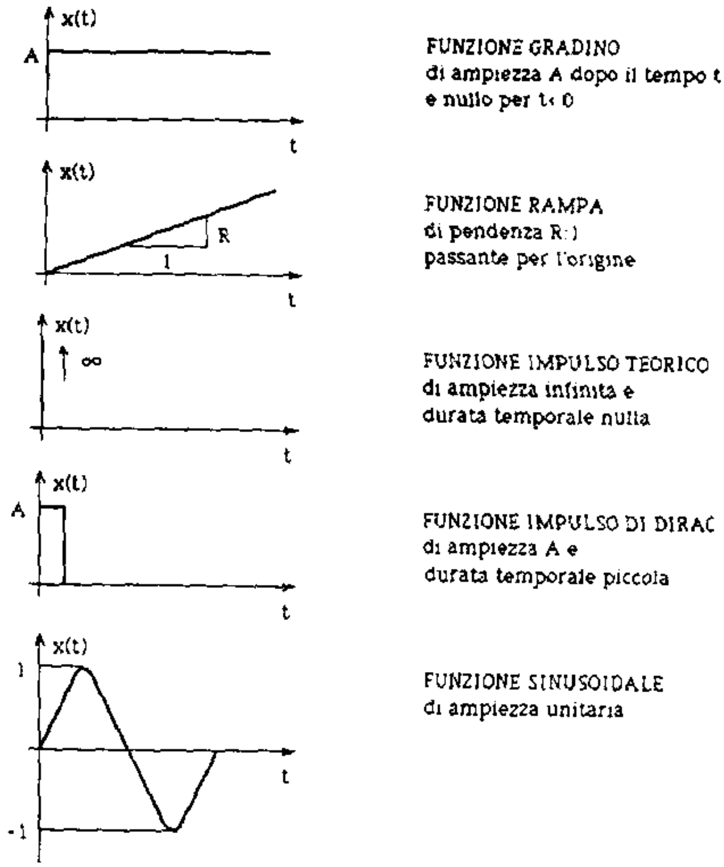
Utilizzeremo, per lo studio del funzionamento di uno strumento in regime dinamico, un modello matematico semplificato:

- è un modello a parametri concentrati;
- esso non tiene conto delle grandezze di influenza;
- si suppone che il sistema sia invariante nel tempo, il che significa ritenere costanti i suoi parametri;
- infine, si linearizzano le caratteristiche ingresso-uscita e quindi si rende applicabile il principio di sovrapposizione degli effetti.

Sappiamo che un sistema lineare stazionario a parametri costanti è caratterizzabile in termini di **funzione di trasferimento G(s)**, intesa come *trasformata di Laplace* della risposta impulsiva del sistema, oppure anche in termine di **risposta in frequenza G(jω)**, intesa come *trasformata di Fourier* della stessa risposta impulsiva (e calcolabile dalla funzione di trasferimento prendendo s=jω). Entrambe queste funzioni caratteristiche possono essere ottenute tramite il rapporto delle corrispondenti trasformate dell'uscita e dell'ingresso e sono, in generale, delle funzioni complesse rispettivamente di s e di ω (=2πf).

L'uso delle funzioni G(s) e G(jω) permette di caratterizzare un sistema dinamico mediante i **diagrammi a blocchi** e di determinare le caratteristiche complessive quando siano note le funzioni di trasferimento o di risposta in frequenza dei singoli blocchi, rappresentativi dei dispositivi costituenti il sistema di misura. In particolare, se il sistema è costituito da N blocchi, la G(s) totale e la G(jω) totale sono ottenibile come prodotto, rispettivamente, delle singole $G_i(s)$ e $G_i(j\omega)$. Tale prodotto corrisponde notoriamente a moltiplicare i moduli e sommare le fasi.

In un sistema di misura a più ingressi, i segnali che agiscono su uno o su diversi di questi ingressi prendono il nome di **ingressi forzanti** (o anche **funzioni di eccitazione**). Conviene sempre esaminare alcune funzioni forzanti tipiche, dette anche **segnali canonici**, che servono a studiare o provare uno o più stadi di uno strumento. La seguente tabella mostra i segnali canonici di maggiore importanza:



FUNZIONE DI TRASFERIMENTO ERRORE DINAMICO

Dato un generico sistema di misura, è intuitivo che il ritardo tra il segnale presente in uscita e quello applicato in ingresso (misurando) può provocare delle inaccuratezze di misura, specie in regime dinamico. L'entità di questo errore è generalmente variabile nel tempo. Si definisce allora una particolare funzione temporale **$y_E(t)$**, detta **errore dinamico**, che porta in conto questo errore.

Prima ancora di dare la definizione di $y_E(t)$, è bene sottolineare che ci stiamo riferendo solo agli errori deterministici (o sistematici), mentre invece non stiamo considerando gli errori stocastici (o accidentali), come per esempio quelli dovuti alla presenza di rumore. Di conseguenza, *il modello che stiamo per proporre è applicabile solo quando gli errori accidentali sono assenti o per lo meno trascurabili rispetto a quelli sistematici.*

Consideriamo dunque il generico sistema di misura, alimentato in ingresso dal segnale x(t), con trasformata di Laplace X(s); siano invece y(t) e $y_A(t)$ rispettivamente l'*uscita effettiva* del sistema e quella *attesa*[2], con rispettive trasformate Y(s) e $Y_A(s)$. Possiamo allora definire due distinte funzioni di trasferimento del sistema, con riferimento all'uscita effettiva ed a quella attesa:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \qquad\qquad G_A(s) = \frac{Y_A(s)}{X(s)}$$

[2] Generalmente, come **segnale di uscita atteso**, ai fini del calcolo dell'errore dinamico, si considera quello privo di ritardo.

A questo punto, la **funzione di trasferimento errore dinamico** è definita come differenza tra le due funzioni di trasferimento appena introdotte:

$$\boxed{G_E(s) = G(s) - G_A(s) = \frac{Y(s) - Y_A(s)}{X(s)}}$$

Da qui scaturisce che la trasformata di Laplace della funzione errore dinamico si ottiene nel modo seguente:

$$Y_E(s) = G_E(s)X(s) = Y(s) - Y_A(s)$$

Antitrasformando questa funzione, si ottiene la **funzione errore dinamico**, che è evidentemente la differenza tra l'uscita effettivamente ottenute e quella attesa:

$$y_E(t) = L^{-1}[Y_E(s)] = y(t) - y_A(t)$$

Sistemi di ordine zero

Un sistema di ordine zero è caratterizzato al fatto che l'uscita è legata banalmente all'ingresso tramite una costante di proporzionalità; l'equazione caratteristica del sistema è cioè nella forma

$$a_0 y(t) = x(t)$$

cui consegue evidentemente una funzione di trasferimento costante:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{a_0} = k$$

La costante $\mathbf{a_0}$ prende il nome di costante di conversione, mentre invece **k** è la sensibilità statica (o guadagno) del sistema.

In base a queste equazioni, è evidente che un sistema di ordine 0 non altera le caratteristiche temporali del segnale in ingresso, per cui non sono introdotte su di esso variazioni di fase o di frequenza oppure variazioni di ampiezza con la frequenza; c'è solo una attenuazione o amplificazione a seconda che, rispettivamente a_0 sia maggiore o minore di 1. Quindi, i sistemi di ordine zero sono dispositivi con **comportamento dinamico perfetto**. In altre parole, questo significa che la funzione di trasferimento attesa $G_A(s)$ coincide, in questo caso particolare, con quella effettiva G(s), per cui è nulla la funzione di trasferimento dell'errore dinamico:

$$G(s) = G_A(s) \longrightarrow G_E(s) = 0 \longrightarrow y_E(t) = 0$$

Sistemi di questo tipo, hanno dunque errore dinamico nullo per qualsiasi segnale posto in ingresso.

La funzione di trasferimento attesa $\boxed{G_A(s) = k}$ è quella che, idealmente, richiederemmo a qualsiasi sistema di misura, per cui sarà richiamata in seguito per valutare le caratteristiche dei sistemi di ordine maggiore di 0.

E' bene adesso fare una osservazione: anche se la risposta dinamica di un sistema di ordine 0 è perfetta, ciò non vuol dire che non ci siano cause di errore: infatti, c'è sempre la possibilità che la costante di conversione a_0 effettiva differisca da quella attesa a_A; se dovesse risultare $\mathbf{a_0 \neq a_A}$, ne risulterebbe un **errore sistematico in regime stazionario** sul misurando, che possiamo facilmente stimare: infatti, applicando la classica definizione di errore relativo sul misurando x, abbiamo che

$$e = \frac{x - A}{A} = \frac{a_0 - a_A}{a_A} \cong \frac{a_0 - a_A}{a_0}$$

dove A è il valore atteso del misurando.

Quello appena riportato è il cosiddetto **errore di rapporto** (o anche *di ampiezza*).

Sistemi del primo ordine

INTRODUZIONE

I sistemi del primo ordine sono molto importanti in quanto molti sensori possono essere caratterizzati tramite funzioni di trasferimento con un solo polo.

L'equazione caratteristica è in questo caso

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = x(t)$$

Rispetto ai sistemi di ordine 0, compare dunque un termine aggiuntivo $a_1 \frac{dy(t)}{dt}$ che lega la derivata dell'uscita all'ingresso.

La corrispondente funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{a_0}}{1 + \frac{a_1}{a_0} s} = \frac{k}{1 + t_1 s}$$

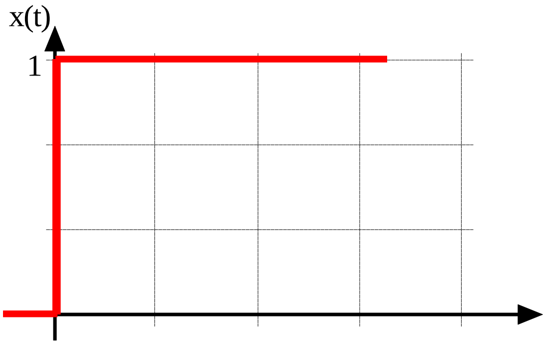
dove il rapporto $\mathbf{t_1 = a_1/a_0}$ prende il nome di **costante di tempo** del sistema (in quanto ha le dimensioni di un tempo).

Confrontando questa funzione di trasferimento con quella attesa, ossia $G_A(s) = k$, la differenza è evidentemente nella presenza proprio della costante di tempo. La corrispondente funzione di trasferimento errore dinamico è

$$G_E(s) = G(s) - G_A(s) = \frac{k}{1 + t_1 s} - k = k\left(\frac{1}{1 + t_1 s} - 1\right) = -\frac{k t_1 s}{1 + t_1 s}$$

RISPOSTA AL GRADINO UNITARIO

Abbiamo già detto in precedenza che, per studiare il comportamento dinamico di un sistema di ordine qualsiasi, lo si eccita mediante uno dei segnali canonici (gradino, impulso, rampa e rampa parabolica) precedentemente introdotti. Per esempio, supponiamo di porre in ingresso al sistema il **gradino unitario** x(t)=H(t):



La sua trasformata di Laplace è 1/s per cui, nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle, l'uscita (forzata) assume l'espressione

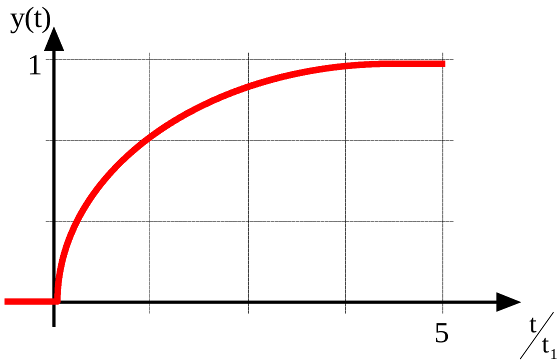
$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{k}{s(1+t_1 s)}$$

Antitrasformando questa funzione, otteniamo l'andamento dell'uscita (forzata) nel tempo:

$$Y(s) = \frac{k}{s(1+t_1 s)} = k\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{1+t_1 s}\right) = k\left(\frac{1}{s} + \frac{-t_1}{1+t_1 s}\right) \longrightarrow \boxed{y(t) = k\left(1 - e^{-\frac{t}{t_1}}\right)}$$

da cui si comprende il significato della costante di tempo t_1.

L'andamento nel tempo di y(t) è del tipo raffigurato nella figura seguente, dove la scala dei tempi (in ascisse) è stata normalizzata in rapporto alla costante di tempo t_1:



Quando $t=t_1$, la risposta assume un valore pari al 63.2% del valore finale di regime, che si raggiunge approssimativamente dopo 5 t_1; per t=2 t_1, il valore è pari all'86.5% del valore finale, mentre per t=3 t_1 si passa al 95% .

Si definisce **tempo di assestamento** (*settling time*) del sistema il tempo necessario perché y(t) rimanga entro una prefissata fascia di incertezza intorno al valore finale di regime. Ad esempio, se consideriamo una fascia di incertezza del 5% (valore tipico), analiticamente il tempo di assestamento corrisponde all'istante t_S che verifica la condizione

$$|y(\infty)-y(t_S)|=\frac{5}{100}$$

Nel nostro caso, sostituendo l'espressione di y(t), abbiamo quanto segue:

$$\begin{cases} y(\infty)=\lim_{t\to\infty}\left(1-e^{-\frac{t}{t_1}}\right)=1 \\ y(t_S)=1-e^{-\frac{t_S}{t_1}} \end{cases} \longrightarrow e^{-\frac{t_S}{t_1}}=\frac{5}{100}\longrightarrow t_S=3t_1$$

Abbiamo dunque trovato che il tempo di assestamento di un sistema del 1° ordine è pari a circa $3t_1$. Per $t=5\ t_1$, come detto, l'uscita raggiunge il 99.3% del valore di regime, mentre, per $t=7\ t_1$, si arriva al 99.91%.

E' interessante osservare che, se calcoliamo la quantità y'(t=0), otteniamo la *velocità con cui parte la risposta* (corrispondente alla tangente ad y(t) nell'origine):

$$y't=0)=\left[\frac{d}{dt}\left(1-e^{-\frac{t}{t_1}}\right)\right]_{t=0}=\left[\frac{1}{t_1}e^{-\frac{t}{t_1}}\right]_{t=0}=\frac{1}{t_1}$$

Quindi, la velocità con cui parte la risposta del sistema ad un gradino unitario è il reciproco della costante di tempo t_1 (e corrisponde dunque al valore assoluto del polo della funzione di trasferimento): ciò significa che la risposta parte tanto più velocemente quanto minore è t_1.

Andamento della funzione errore dinamico

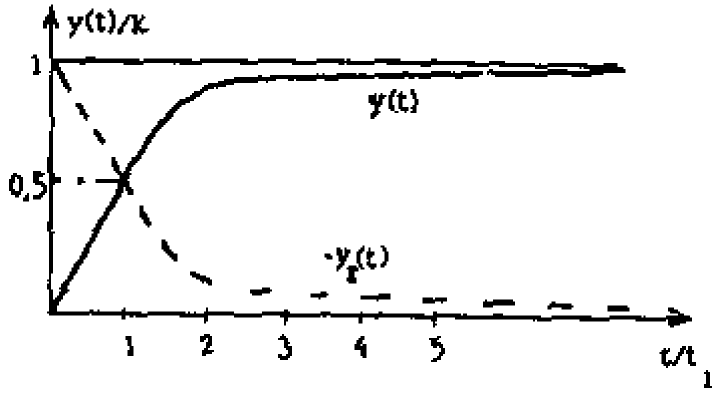
Adesso, sempre in presenza di un gradino unitario applicato in ingresso, calcoliamo la funzione errore dinamico: avendo detto che la funzione di trasferimento errore dinamico è $G_E(s)=-\frac{kt_1 s}{1+t_1 s}$, da cui scaturisce che la trasformata della funzione errore dinamico è

$$Y_E(s)=G_E(s)\cdot X(s)=-\frac{kt_1}{1+t_1 s}$$

Antitrasformando questa funzione, otteniamo facilmente che

$$\boxed{y_E(t)=-ke^{-\frac{t}{t_1}}}$$

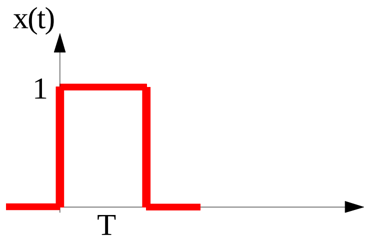
La figura seguente mostra l'andamento di $y_E(t)$ confrontato con quello (ricavato prima) dell'uscita effettiva y(t):



Si deduce che per minimizzare la funzione errore dinamico occorre in questo caso minimizzare la costante di tempo t_1.

RISPOSTA AD UN IMPULSO DI DURATA FINITA

Immaginiamo adesso di sollecitare il sistema con un impulso rettangolare di durata T e ampiezza unitaria:



Per calcolare la corrispondente risposta, ci basta osservare che x(t) è interpretabile come la composizione di due gradini, di uguale ampiezza ma di segno contrario, che si succedono in un tempo T. Possiamo allora ragionare velocemente nel modo seguente:

- nell'intervallo [0,T], il sistema si comporta come se fosse applicato in ingresso un gradino unitario, per cui abbiamo la stessa risposta vista nel precedente paragrafo:

$$y_1(t) = k\left(1 - e^{-\frac{t}{t_1}}\right)$$

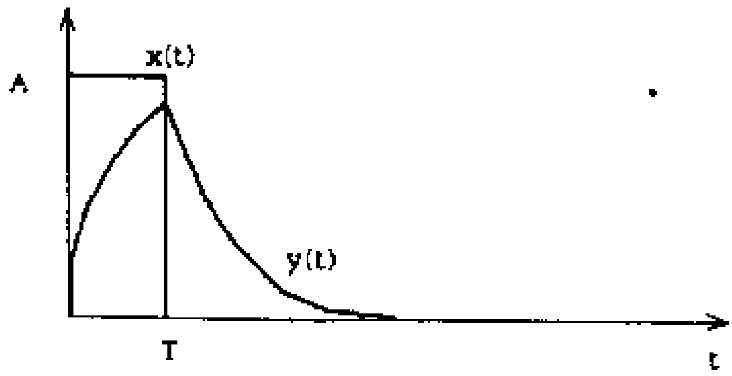
- a partire da t=T, invece, il sistema si comporta come se in ingresso fosse applicato un segnale nullo, per cui la risposta risulta essere

$$y_2(t) = Be^{-\frac{t}{t_1}}$$

  dove la costante B si ottiene imponendo la condizione che questa risposta e la precedente risultino uguali in t=T: si ottiene

$$k\left(1 - e^{-\frac{T}{t_1}}\right) = Be^{-\frac{T}{t_1}} \longrightarrow B = k\left(e^{\frac{T}{t_1}} - 1\right) \longrightarrow y_2(t) = k\left(e^{\frac{T}{t_1}} - 1\right)e^{-\frac{t}{t_1}}$$

Componendo le due risposte appena ricavate, si ottiene quanto segue:



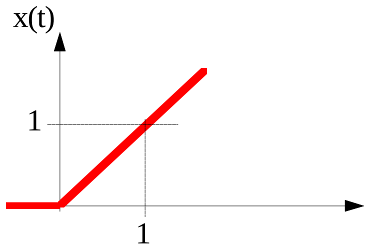
Se adesso volessimo ricavare la risposta del sistema ad un impulso ideale in ingresso, ci basterebbe calcolare il limite di $y_2(t)$ per $T \to 0$:

$$h(t) = \lim_{T\to 0} y_2(t) = \lim_{T\to 0} k\left(e^{\frac{T}{t_1}} - 1\right)e^{-\frac{t}{t_1}} = ke^{-\frac{t}{t_1}} \lim_{T\to 0}\left(e^{\frac{T}{t_1}} - 1\right) = ke^{-\frac{t}{t_1}}$$

Poiché la risposta ideale del sistema dovrebbe essere nulla immediatamente dopo l'impulso (che si verifica in t=0), deduciamo che quella appena calcolata è la $y_E(t)$ corrispondente ad un impulso in ingresso, il che ci conferma una volta di più *che un sistema del primo ordine presenta un errore dinamico tanto più piccolo quanto minore è la costante di tempo t_1.*

RISPOSTA ALLA RAMPA

Vediamo adesso cosa succede applicando in ingresso al sistema una **rampa unitaria** x(t)=r(t):



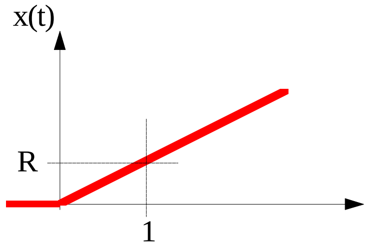
La sua trasformata di Laplace è $1/s^2$ per cui, sempre nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle, l'uscita (forzata) assume l'espressione

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{k}{s^2(1 + t_1 s)}$$

Antitrasformando questa funzione, otteniamo l'andamento dell'uscita (forzata) nel tempo. Per effettuare l'antitrasformazione possiamo procedere sia mediante l'espansione in fratti semplici sia mediante l'applicazione della proprietà di integrazione nel tempo (visto che r(t) non è altro che l'integrale del gradino unitario): seguendo quest'ultima strada, basta ricordare che la risposta al gradino era $k\left(1-e^{-\frac{t}{t_1}}\right)$ per scrivere che la risposta alla rampa è

$$y(t)=k\int_0^t\left(1-e^{-\frac{t}{t_1}}\right)dT=k\int_0^t dT-k\int_0^t e^{-\frac{t}{t_1}}dT \longrightarrow y(t)=kt-kt_1\left(1-e^{-\frac{t}{t_1}}\right)$$

Possiamo anche prendere una rampa con pendenza R non unitaria:



In questo caso, è evidente che l'uscita risulta essere

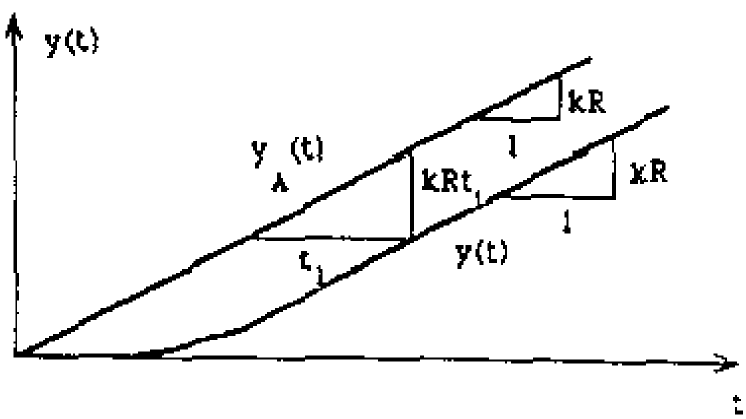
$$\boxed{y(t)=kR\left(t+t_1e^{-\frac{t}{t_1}}-t_1\right)}$$

A fronte di questa uscita effettiva, l'uscita attesa è invece $y_A(t)=kRt$, ossia semplicemente una ulteriore rampa con pendenza diminuita o aumentata del fattore k. Deduciamo che la funzione errore dinamico vale in questo caso

$$y_E(t)=y(t)-y_A(t)=kRt_1\left(e^{-\frac{t}{t_1}}-1\right)$$

La funzione errore dinamico risulta dunque somma di due termini, uno costante e l'altro transitorio, con decadimento esponenziale. In accordo a quanto visto in precedenza, ambedue questi termini di errore si riducono se t_1 tende a 0.

La figura seguente riporta le uscite attesa ed effettiva in risposta alla rampa, in modo da evidenziare sia l'errore stazionario sia il ritardo temporale:



Da notare che l'errore stazionario kRt_1 aumenta con l'aumentare della pendenza R della rampa.

L'errore transitorio, dal canto suo, dipende anch'esso da R, ma comunque si esaurisce dopo il solito tempo di 4-5 costanti di tempo.

RISPOSTA IN FREQUENZA

E' noto che tutti i segnali complessi stazionari possono essere ricondotti a somme di segnali sinusoidali. Di conseguenza, dato un qualsiasi sistemi, diventa importante studiare la risposta ad ingresso sinusoidale nella forma

$$x(t) = A \,\mathrm{sen}\,\omega t$$

Esistono vari approcci per calcolare la risposta ad un simile segnale. Scegliamo allora la stessa strada seguita nei precedenti paragrafi.

In primo luogo, calcoliamo la trasformata di Laplace dell'ingresso:

$$X(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Moltiplicando per la funzione di trasferimento del sistema, otteniamo la corrispondente uscita:

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{k}{1+t_1 s}\frac{A\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{kA}{t_1}\frac{\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)\left(s+\frac{1}{t_1}\right)}$$

Con opportuni passaggi, è possibile antitrasformare questa funzione, ottenendo l'andamento temporale della risposta (forzata) all'ingresso considerato:

$$y(t) = \frac{kAt_1\omega}{1+t_1^2\omega^2}e^{-\frac{t}{t_1}} + \frac{kA}{\sqrt{1+t_1^2\omega^2}}\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \qquad \text{dove } \varphi = \arctan(-\omega t_1)$$

Abbiamo dunque trovato la somma di un termine sinusoidale, che quindi "segue" l'ingresso, e del solito termine transitorio con decadimento esponenziale (tanto più rapido quanto più piccola è la costante di tempo t_1).

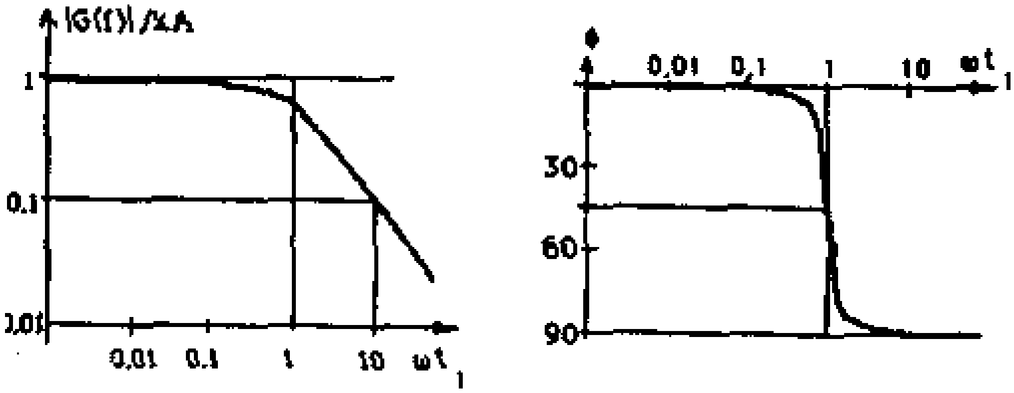
La funzione di uscita attesa è ovviamente una versione semplicemente scalata dell'ingresso, ossia $y_A(t) = kx(t) = kA\,\mathrm{sen}\,\omega t$, per cui la funzione errore dinamico è la seguente:

$$y_E(t) = y(t) - y_A(t) = \frac{kAt_1\omega}{1+t_1^2\omega^2}e^{-\frac{t}{t_1}} + kA\left[\frac{1}{\sqrt{1+t_1^2\omega^2}}\mathrm{sen}(\omega t+\varphi) - \mathrm{sen}(\omega t)\right]$$

Il modulo e la fase del termine sinusoidale che compare nell'espressione di y(t) sono, per definizione, quelli della risposta in frequenza del sistema: infatti, se prendiamo la funzione di trasferimento G(s) e poniamo s=jω, otteniamo

$$\boxed{G(j\omega) = \frac{k}{1+t_1 \cdot j\omega} = \frac{k}{\sqrt{1+t_1^2\omega^2}}e^{-j\arctan(-\omega t_1)}}$$

Questa funzione ci dice come si comporta il sistema, una volta raggiunte le condizioni di regime, nei riguardi dei segnali sinusoidali applicati in ingresso, come si deduce chiaramente dalla figura seguente, che mostra il modulo e la fase di G(jω):



Dalle formule e dalle figure appena riportate deduciamo che un sistema del primo ordine non altera la frequenza del segnale in ingresso, ma ne attenua l'ampiezza e ne varia la fase, ritardandola di una quantità non superiore a 90°. A livello quantitativo, l'entità dell'attenuazione e dello sfasamento dipendono dal prodotto tra la costante di tempo del sistema e la pulsazione del segnale in ingresso. In particolare, quando risulta $\boldsymbol{\omega t_1 << 1}$, il sistema ha un comportamento praticamente coincidente con quello atteso, dato che lo sfasamento φ tende a zero e la quantità $\sqrt{1+t_1^2\omega^2}$ tende ad 1 (da cui consegue che anche l'errore dinamico $y_E(t)$ tende a 0).

Quindi, per sistemi del primo ordine con piccola costante di tempo e con misurandi sinusoidali aventi periodo molto maggiore di tale costante di tempo, l'errore dinamico risulta piccolo. Tra l'altro, le formule appena ricavate permettono anche di effettuare la correzione di ampiezza e di fase sul segnale di uscita (ovviamente in condizioni stazionarie), noti che siano t_1 e ω.

Nel caso il segnale in ingresso fosse costituito da una combinazione di più sinusoidi a diversa frequenza, è ovvio che la correzione diventa più difficile; in questi casi, è conveniente fare in modo che la costante di tempo del sistema sia sufficientemente inferiore al periodo della componente sinusoidale di massima frequenza.

Sistemi del secondo ordine

INTRODUZIONE: FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Si definisce **sistema (elementare) del secondo ordine** un sistema che sia caratterizzato da una equazione caratteristica nella forma seguente:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = x(t)$$

Rispetto ai sistemi precedenti, è stato dunque aggiunto un termine che lega la derivata temporale seconda dell'uscita all'ingresso applicato.

Questa equazione si può anche riscrivere nella forma seguente:

$$\frac{a_2}{a_0} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{a_1}{a_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{1}{a_0} x(t)$$

Facciamo adesso le seguenti posizioni:

$$\frac{a_2}{a_0} = t_1 t_2 \qquad \frac{a_1}{a_0} = t_1 + t_2 \qquad k = \frac{1}{a_0}$$

Con queste posizioni, l'equazione diventa

$$t_1 t_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (t_1 + t_2) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$$

Applicando adesso la trasformata di Laplace e facendo poi il rapporto tra la trasformata dell'uscita e quella dell'ingresso, si ottiene facilmente la seguente funzione di trasferimento per il sistema:

$$G(s) = \frac{k}{(1+t_1 s)(1+t_2 s)}$$

Evidentemente, t_1 e t_2 rappresentano le costanti di tempo del sistema.

Nota la funzione di trasferimento effettiva G(s) e ricordando che quella attesa (cioè quella ideale) è $G_A(s)=k$, troviamo evidentemente che la **funzione di trasferimento errore dinamico** è

$$G_E(s) = G(s) - G_A(s) = \frac{k}{(1+t_1 s)(1+t_2 s)} - k = -ks(t_1 + t_2) \frac{1 + \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} s}{(1+t_1 s)(1+t_2 s)}$$

Si tratta evidentemente di una funzione di trasferimento avente gli stessi poli della G(s), ed in più due zeri, di cui uno nell'origine.

Generalmente, per studiare i sistemi del secondo ordine si introducono i seguenti due parametri:

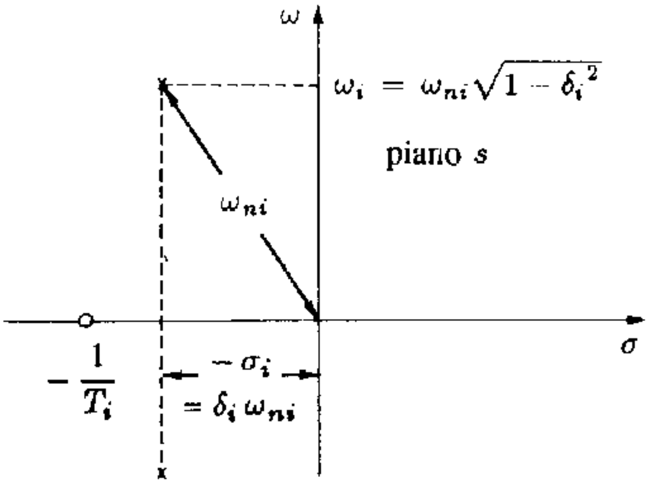
$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{t_1 t_2}} = \sqrt{\frac{a_2}{a_2}} \qquad \delta = \frac{t_1 + t_2}{2\sqrt{t_1 t_2}} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$$

Così facendo, la funzione di trasferimento passa nella forma

$$G(s) = \frac{k\omega_m^2}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}$$

Si tratta cioè di una funzione razionale avente denominatore di 2° grado e numeratore di grado 0.

I 2 importanti parametri introdotti sono il **coefficiente di smorzamento** δ e la **pulsazione naturale** ω_m. Il valore di questi parametri influenza evidentemente la posizione dei due poli della funzione di trasferimento, in accordo a quanto illustrato nella figura seguente:



Le espressioni analitiche dei due poli si ottengono evidentemente ponendo =0 il denominatore di G(s) e trovando le due soluzioni della corrispondente equazione:

$$p_{1/2} = -\delta\omega_m \pm j\omega_m\sqrt{1-\delta^2}$$

Abbiamo cioè, in generale due poli complessi e coniugati. I casi possibili, al variare di ω_m e δ, sono i seguenti:

- il primo caso è quello in cui **δ=0**: si ha in questo caso che $p_{1/2} = \pm j\omega_m$, ossia che i due poli sono puramente complessi ed hanno modulo pari alla pulsazione naturale;

- il secondo caso è quello in cui **0<δ<1**: si ha che genericamente che $p_{1/2} = -\delta\omega_m \pm j\omega_m\sqrt{1-\delta^2}$, dal che si deduce che i poli sono complessi (coniugati) e che il loro modulo è ω_m^2, ossia una quantità costante pari al quadrato della pulsazione naturale;

- il terzo caso è quello in cui **δ=1**: si ha questa volta che $p_{1/2} = -\omega_m$, ossia due poli reali coincidenti negativi di valore assoluto pari alla pulsazione naturale;

- il quarto ed ultimo caso è quello in cui **δ>1**: in questo caso, la quantità 1-δ^2 è negativa, per cui i due poli possono essere espressi nella forma $p_{1/2} = -\delta\omega_m \pm \omega_m\sqrt{\delta^2 - 1}$; si tratta dunque di due poli reali situati simmetricamente rispetto all'origine.

RISPOSTA AL GRADINO UNITARIO

Cominciamo adesso ad esaminare il comportamento di un sistema del secondo ordine. Supponiamo, in particolare, di porre in ingresso al sistema il gradino unitario x(t)=H(t): la trasformata della risposta (forzata) del sistema a quella sollecitazione assume l'espressione

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{k\omega_m^2}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}\frac{1}{s}$$

Espandendo in fratti semplici questa funzione otteniamo

$$Y(s) = \frac{k\omega_m^2}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}$$

Possiamo subito calcolare il residuo A:

$$A = [Y(s)s]_{s=0} = \left[\frac{k\omega_m^2}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}\right]_{s=0} = k \longrightarrow Y(s) = \frac{k}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}$$

Per il calcolo dei coefficienti B e C possiamo invece utilizzare il *metodo del riporto a primo membro*: sostituendo l'espressione di Y(s) al primo membro e portando anche il termine 1/s a primo membro, otteniamo

$$\frac{k\omega_m^2}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}\frac{1}{s} - \frac{k}{s} = \frac{Bs+C}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2} \longrightarrow k\frac{-s - 2\delta\omega_m}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2} = \frac{Bs+C}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2} \longrightarrow \begin{cases} B = -k \\ C = -2k\delta\omega_m \end{cases}$$

Possiamo dunque concludere che l'espansione in fratti semplici dell'uscita (forzata) del sistema ha l'espressione

$$Y(s) = \frac{k}{s} - k\frac{s + 2\delta\omega_m}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}$$

Dobbiamo adesso antitrasformare questa funzione ed i maggiori problemi vengono chiaramente dal secondo termine a secondo membro. Possiamo allora porre $\omega_d = \omega_m\sqrt{1 - \delta^2}$, in modo da poter scrivere il denominatore di quella frazione nella forma

$$s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2 = \left(s + \delta\omega_m\right)^2 + \omega_d^2$$

Con questa posizione, possiamo effettuare alcuni semplici passaggi per giungere all'espressione

$$Y(s) = k\left[\frac{1}{s} - \frac{s+2\delta\omega_m}{(s+\delta\omega_m)^2+\omega_d^2} - \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\frac{\omega_d}{(s+\delta\omega_m)^2+\omega_d^2}\right]$$

Possiamo adesso antitrasformare:

$$y(t) = kH(t) - ke^{-\delta\omega_m t}\left[\cos(\omega_d t) + \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\sin(\omega_d t)\right]$$

Possiamo anche fare qualche manipolazione algebrica su questa funzione:

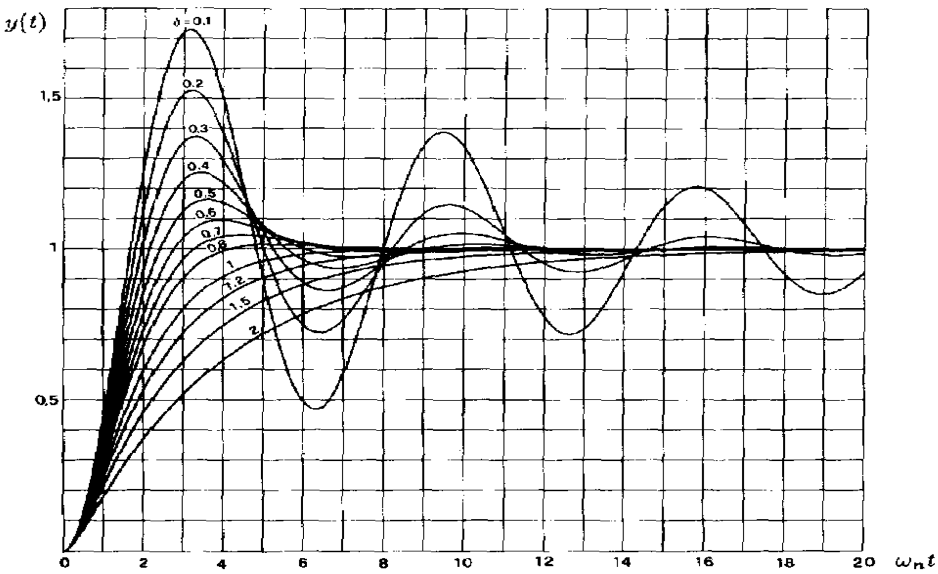
$$y(t) = kH(t) - \frac{ke^{-\delta\omega_m t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\left[\sqrt{1-\delta^2}\cos(\omega_d t) + \delta\sin(\omega_d t)\right] =$$
$$= kH(t) - \frac{ke^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi}\left[\sin\varphi\cos(\omega_d t) + \cos\varphi\sin(\omega_d t)\right] = kH(t) - \frac{ke^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi}\sin(\omega_d t + \varphi)$$

Considerando dunque un angolo φ tale che $\begin{cases}\sqrt{1-\delta^2} = \sin\varphi \\ \delta = \cos\varphi\end{cases}$, abbiamo concluso che l'andamento nel tempo dell'uscita forzata del sistema ha la seguente espressione:

$$y(t) = kH(t) - \frac{ke^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi}\sin(\omega_d t + \varphi)$$

Data la presenza del "solito" esponenziale smorzato, si individua anche questa volta una **costante di tempo**, che è chiaramente $\boxed{\tau = 1/\delta\omega_m}$. Questa costante di tempo caratterizza il termine esponenziale $e^{-\delta\omega_m t}$, il quale smorza o amplifica il termine sinusoidale $\sin(\omega_d t + \varphi)$ a seconda che il segno del coefficiente di smorzamento δ sia >0 o <0: quando δ>0, il termine sinusoidale si smorza e y(t) tende asintoticamente ad H(t), mentre, quando H(t)<0, l'oscillazione sinusoidale assume ampiezza sempre crescente e quindi y(t) diverge da H(t).

La figura seguente mostra l'andamento di y(t) per vari valori del coefficiente di smorzamento δ e con scala dei tempi normalizzata in rapporto all'inverso della pulsazione naturale ω_m:



Un caso assolutamente particolare è quello in cui δ=1: in questo caso, infatti, risulta

$$Y(s)=k\left[\frac{1}{s}-\frac{s+2\omega_m}{(s+\omega_m)^2}\right]=k\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\omega_m}-\frac{\omega_m}{(s+\omega_m)^2}\right]=\frac{k}{s}-\frac{k}{s+\omega_m}-\frac{k\omega_m}{(s-(-\omega_m))^2}$$

e quindi, antitrasformando, si ottiene

$$y(t)=k\left[H(t)-H(t)e^{-\omega_m t}-\omega_m H(t)te^{-\omega_m t}\right]=kH(t)-kH(t)(1-\omega_m t)e^{-\omega_m t}$$

In base a questa espressione, non si ha dunque alcuna **sovraelongazione** (intesa come differenza positiva tra il valore raggiunto dall'uscita ed il valore finale di regime), visto che non c'è più il termine sinusoidale: y(t) tende asintoticamente al valore finale kH(t) senza mai superarlo.

Massima sovraelongazione

Può adesso interessare la relazione esatta tra il coefficiente di smorzamento δ ed il valore della **massima sovraelongazione**, ossia la differenza tra il massimo raggiunto dall'uscita ed il valore finale. Per ricavare questa relazione, troviamo i punti in cui y(t) raggiunge i suoi valori massimi e minimi:

$$\frac{dy}{dt}=0\longrightarrow\frac{dy(t)}{dt}=0-\left[-\delta\omega_m\frac{e^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi}\sin(\omega_d t+\varphi)+\omega_d\frac{e^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi}\cos(\omega_d t+\varphi)\right]=$$

$$=\delta\omega_m\frac{e^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi}\sin(\omega_d t+\varphi)-\omega_d\frac{e^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi}\cos(\omega_d t+\varphi)=0\longrightarrow tg(\omega_d t+\varphi)=\frac{\omega_d}{\delta\omega_m}=\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$$

Abbiamo dunque trovato che i punti di massimo e di minimo sono quelli che soddisfano l'equazione

$$tg(\omega_d t+\varphi)=\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$$

Ricordando adesso che $\begin{cases}\sqrt{1-\delta^2}=\sin\varphi\\ \delta=\cos\varphi\end{cases}$, deduciamo che $tg\varphi=\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$ e quindi anche che l'equazione dei punti di massimo è soddisfatta dai valori

$$t_k=\frac{n\pi}{\omega_d}\qquad n=1,2,....$$

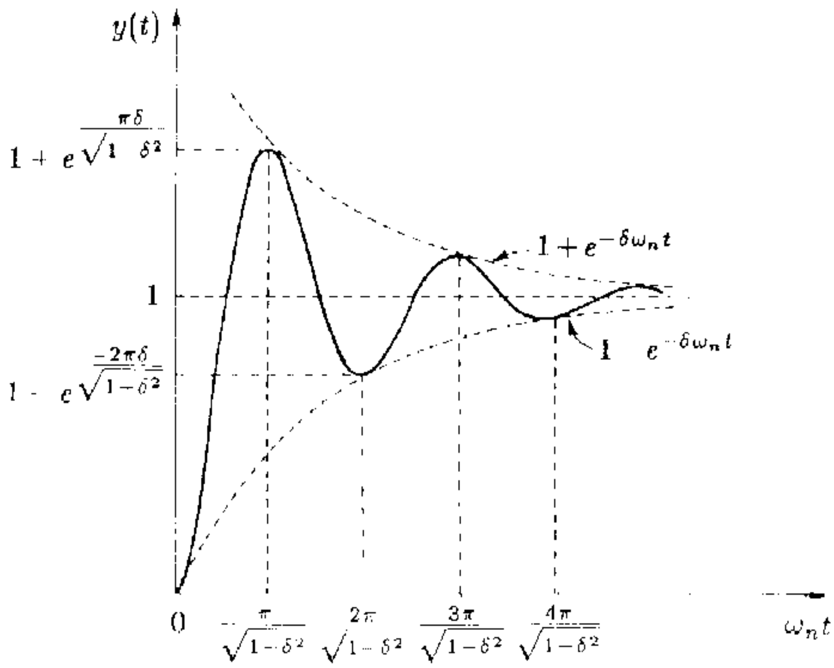
L'istante in cui si ha il 1° punto di massimo prende il nome di **tempo di picco**:

$$k=1\longrightarrow t_{MAX,1}=t_P=\frac{\pi}{\omega_d}$$

Andando adesso a sostituire il generico t_k nell'espressione di y(t), otteniamo i valori massimi e minimi di y(t) stessa al variare di k:

$$y_{MAX,MIN} = y(t_k) = k - \frac{ke^{-\delta\omega_m \frac{n\pi}{\omega_d}}}{\sin\varphi}\sin\left(\omega_d \frac{n\pi}{\omega_d} + \varphi\right) = k - \frac{ke^{-\delta\frac{n\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}}{\sin\varphi}\sin(n\pi + \varphi) = k\left(1 \pm e^{-\delta\frac{n\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}\right)$$

La figura seguente mostra graficamente i risultati ottenuti in questi ultimi passaggi:



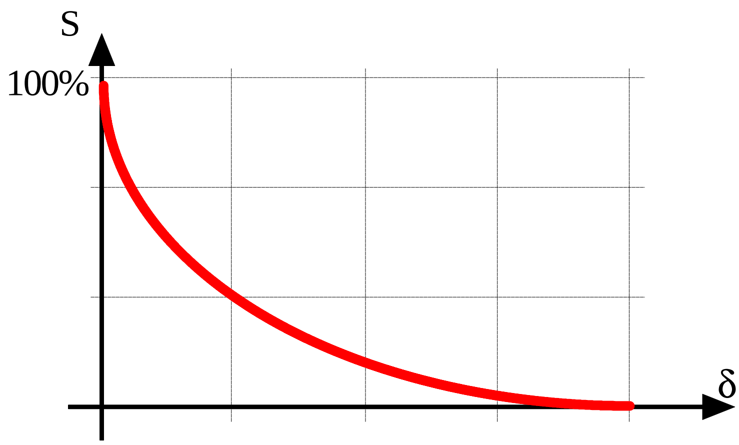
Si definisce, a questo punto, **massima sovraelongazione percentuale** la seguente quantità:

$$S = \frac{y(t_P) - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100$$

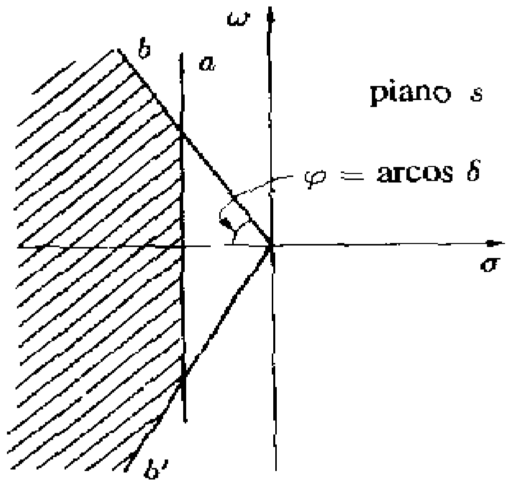
Sostituendo le rispettive espressioni, abbiamo che

$$\begin{cases} y(t_P) = k\left(1 + e^{-\delta\frac{\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}\right) \\ y(\infty) = k \end{cases} \longrightarrow \boxed{S = e^{-\delta\frac{\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \cdot 100}$$

il che significa che *la massima sovraelongazione percentuale è funzione univocamente del valore del coefficiente di smorzamento (mentre non dipende da* w_m*) ed è uguale al 100% quando d=0:*



Talvolta, viene imposta una specifica sul valore della massima sovraelongazione, nel senso che, ad esempio, si chiede che S non superi un certo massimo assegnato. In questo caso, è necessario che i 2 poli del sistema (cioè della funzione di trasferimento del sistema) si trovino nel settore delimitato dalle rette b e b' della figura seguente:



Le suddette rette b e b' rappresentano luoghi di poli corrispondenti ad un dato valore del coefficiente di smorzamento.

Funzione errore dinamico

Adesso, sempre supponendo di alimentare il sistema con un gradino unitario in ingresso, calcoliamo la trasformata della funzione errore dinamico: avendo trovato prima che la funzione di trasferimento errore dinamico è

$$G_E(s) = -ks(t_1 + t_2)\frac{1 + \dfrac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}s}{(1 + t_1 s)(1 + t_2 s)}$$

abbiamo che

$$Y_E(s) = G_E(s)X(s) = -k(t_1 + t_2)\frac{1 + \dfrac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}s}{(1 + t_1 s)(1 + t_2 s)}$$

L'antitrasformata di questa funzione ci dà l'andamento temporale dell'errore dinamico: senza fare troppi passaggi, ci basta ricordare che, nel dominio del tempo, risulta $y_E(t) = y(t) - y_A(t)$, per cui scriviamo che

$$y_E(t) = kH(t) - \frac{ke^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi}\sin(\omega_d t + \varphi) - kH(t) = -\frac{ke^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi}\sin(\omega_d t + \varphi)$$

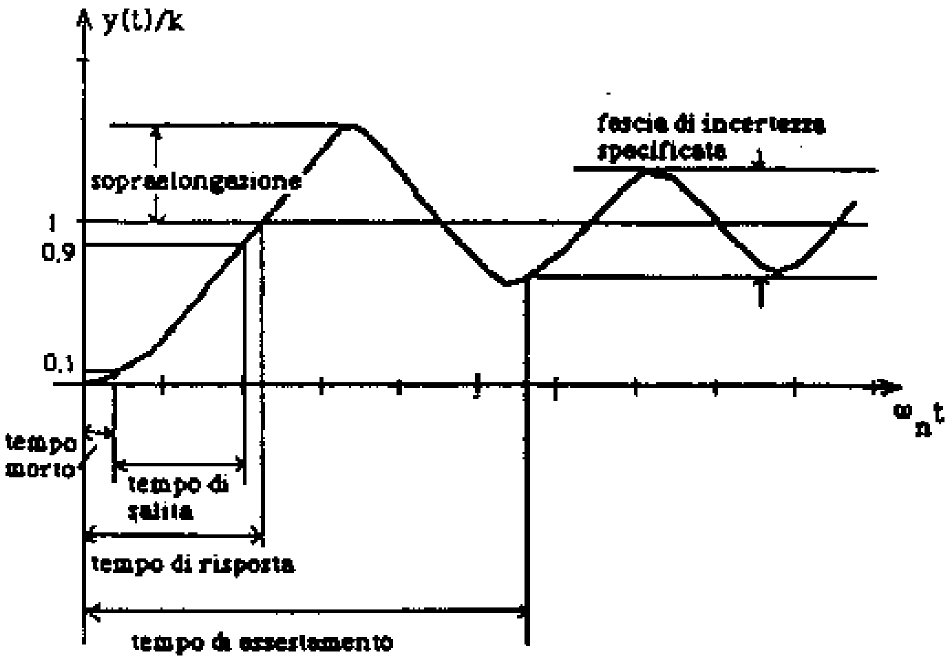
In accordo a quanto visto prima circa l'andamento di y(t), ci accorgiamo che, all'aumentare del coefficiente di smorzamento δ, la $y_E(t)$ ha delle oscillazioni che tendono a smorzarsi più rapidamente.

Tempo di assestamento

Una delle migliori indicazioni sulla velocità di risposta del sistema è data dal **tempo di assestamento**, la cui definizione è stata già fornita nel caso dei sistemi del primo ordine: è il tempo necessario perché y(t) rimanga entro una prefissata fascia di incertezza intorno al valore finale di regime. Quando minore è il tempo di assestamento, tanto più rapidamente la funzione errore dinamico si porta a zero.

Se consideriamo una fascia di incertezza del 5% (valore tipico), si trova che un valore di δ compreso tra 0.7 e 0.8 dà luogo ad un tempo di assestamento più breve.

Altri parametri caratterizzanti la risposta al gradino di un sistema del secondo ordine sono illustrati nella figura seguente:

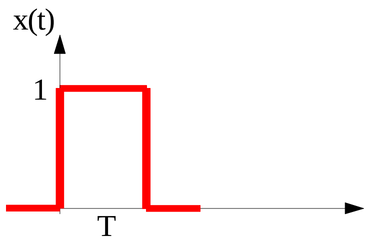


- **massima sovraelongazione S** (o anche *massimo sorpasso*): differenza tra il valore massimo raggiunto dall'uscita ed il valore finale di regime: normalmente si dà in percentuale del valore finale, per cui si parla di <u>massima sovraelongazione percentuale</u>;
- **tempo morto**: tempo necessario affinché l'uscita raggiunga l'1% del valore finale;
- **tempo di ritardo T_r**: tempo necessario affinché l'uscita raggiunga il 50% del valore finale;
- **tempo di salita T_S** (in inglese *t-rise*): tempo necessario affinché l'uscita passi dal 10% al 90% del valore finale;

- **tempo di assestamento T_a**: tempo necessario affinché l'uscita rimanga entro il ±5% del valore finale;
- **tempo di risposta**: tempo necessario affinché l'uscita raggiunga il valore finale;
- **istante di massima sovraelongazione T_m**: istante al quale si presenta la massima sovraelongazione.

RISPOSTA AD UNA FUNZIONE IMPULSIVA

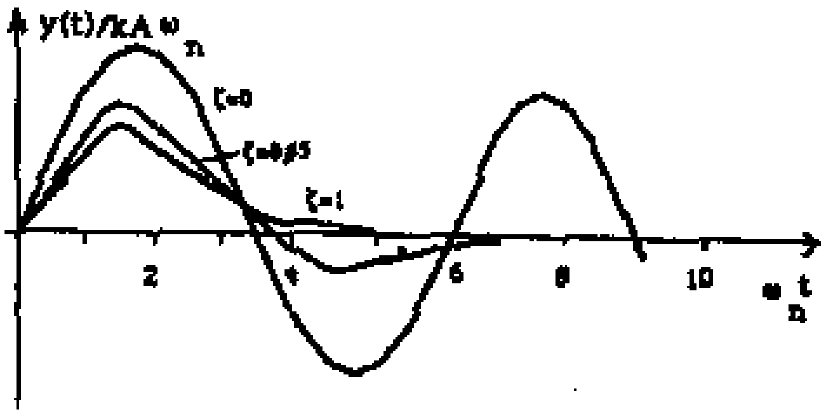
Così come abbiamo già fatto per i sistemi del primo ordine, vogliamo adesso ricavare la risposta di un sistema del secondo ordine ad un impulso rettangolare di durata finita e di ampiezza unitaria:



L'analisi da seguire è del tutto analoga a quella dei precedenti paragrafi, per cui non ci soffermiamo sui dettagli, riportando solo l'espressione finale, ossia l'andamento temporale della risposta:

$$y(t) = \frac{k\omega_n}{2\sqrt{\delta^2 - 1}}\left[e^{\frac{\omega_n t}{\delta - \sqrt{\delta^2-1}}} - e^{\frac{\omega_n t}{\delta + \sqrt{\delta^2-1}}} \right]$$

L'andamento di questa funzione è riportato nella figura seguente, dove si considerano i valori δ=0, δ=0.65 e δ=1 per il coefficiente di smorzamento:



Per δ=1, abbiamo un sistema con **smorzamento critico**: l'attenuazione delle oscillazioni avviene molto rapidamente.

Per δ<1, il sistema è **sottosmorzato** (in particolare, il valore δ=0.65 è quello che fornisce il minore tempo di assestamento) mentre per δ>1 il sistema è **sovrasmorzato**.

RISPOSTA ALLA RAMPA

Supponiamo adesso che l'ingresso al nostro sistema sia una rampa di pendenza R, ossia una funzione **x(t)=Rt**, la cui trasformata di Laplace è $X(s)=R/s^2$. Ricordando che la funzione di trasferimento dell'errore dinamico è

$$G_E(s) = -ks(t_1+t_2)\frac{1+\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}s}{(1+t_1s)(1+t_2s)}$$

abbiamo che la funzione errore dinamico vale in questo caso

$$Y_E(s) = G_E(s)X(s) = -ks(t_1+t_2)\frac{1+\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}s}{(1+t_1s)(1+t_2s)}\cdot\frac{R}{s^2} = -k\frac{t_1+t_2+st_1t_2}{s(1+t_1s)(1+t_2s)}$$

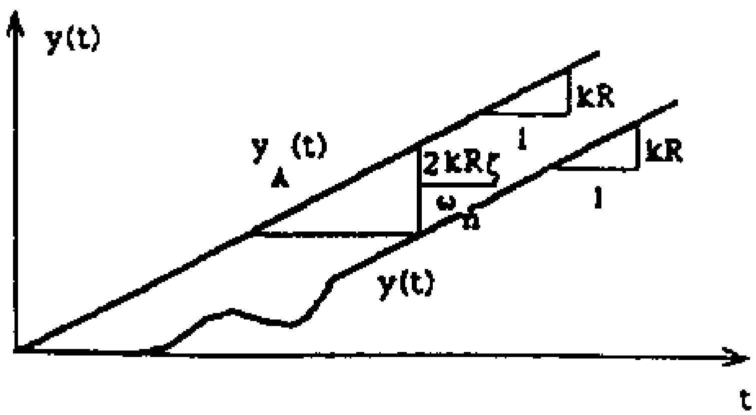
L'antitrasformata di questa funzione è molto semplice, in quanto basta considerare una espansione in fratti semplici: si trova facilmente che

$$y_E(t) = -kR(t_1+t_2)+\left[\frac{t_1^2}{t_1-t_2}e^{-\frac{t}{t_1}} - \frac{t_2^2}{t_1-t_2}e^{-\frac{t}{t_2}}\right]$$

Questa espressione ci fa comodo in quanto, per definizione, ci basta sommare la **risposta attesa $y_A(t)=kRt$** (ossia la risposta alla rampa Rt prodotta da un sistema di ordine zero) per ottenere la risposta effettiva del sistema:

$$y(t) = y_E(t)+y_A(t) = -kR(t_1+t_2-t)+\left[\frac{t_1^2}{t_1-t_2}e^{-\frac{t}{t_1}} - \frac{t_2^2}{t_1-t_2}e^{-\frac{t}{t_2}}\right]$$

Naturalmente, se sostituissimo le costanti di tempo t_1 e t_2 con le rispettive espressioni in funzione del coefficiente di smorzamento e della pulsazione naturale, otterremo una funzione in forma analoga a quella usata nei precedenti paragrafi. Tuttavia, evitiamo di riportare i dettagli di tale espressione, mentre riportiamo nella figura seguente l'andamento sia di $y_A(t)$ sia di y(t), al fine di evidenziare lo scostamento del sistema dal comportamento ideale:



Questa figura mette dunque in evidenza che, al pari di quanto accadeva per i sistemi del primo ordine, <u>l'errore è somma di due contributi</u>, di cui uno **transitorio** e l'altro **stazionario**. quest'ultimo è dovuto al ritardo t_1+t_2 con cui il sistema segue l'ingresso dopo la fase transitoria.

Per ridurre l'errore stazionario, che risulta pari a $2kR\delta/\omega_n$, è evidentemente necessario ridurre δ oppure aumentare ω_n. Tuttavia, sappiamo che la riduzione del coefficiente di smorzamento potrebbe comportare oscillazioni troppo ampie da parte del sistema durante la risposta transitoria. Si tratta perciò di trovare il solito compromesso: generalmente, si adottano valori di δ compresi tra 0.6 e 0.7.

RISPOSTA IN FREQUENZA

Come ultimo aspetto, per l'analisi di un sistema del secondo ordine, ci occupiamo della descrizione della sua risposta in frequenza. Il procedimento da seguire è quello classico: data la funzione di trasferimento G(s) del sistema, ci basta sostituire s=jω, in modo da ottenere

$$G(j\omega) = \frac{k\omega_m^2}{-\omega^2 + 2\delta\omega_m(j\omega) + \omega_m^2}$$

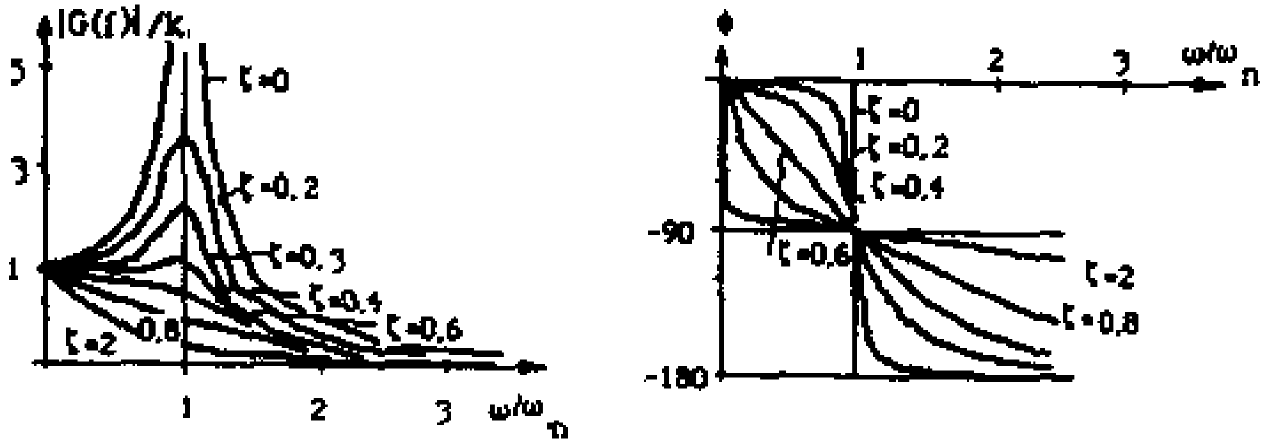
Solitamente, questa funzione è scritta nella forma seguente:

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\dfrac{2\delta}{\omega_m}\omega - \dfrac{\omega^2}{\omega_m^2}}$$

Il modulo e la fase di questa funzione si ricavano con facili passaggi:

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_m^2}\right)^2 + \left(2\delta - \dfrac{\omega}{\omega_m}\right)^2}} \qquad \phi(\omega) = \arctan\frac{2\delta}{\dfrac{\omega}{\omega_m} - \dfrac{\omega_m}{\omega}}$$

La figura seguente mostra gli andamenti di queste due funzioni:



Evidentemente, l'ampiezza e la fase della risposta del sistema ad un eccitazione sinusoidale in ingresso dipendono dai valori del coefficiente di smorzamento e della pulsazione naturale.

A livello puramente teorico, quando δ=0 e la sinusoide in ingresso ha pulsazione $\omega=\omega_n$, l'ampiezza dell'uscita è infinita e la fase è di -90°. Nella pratica, non potremo avere certo una risposta di ampiezza infinita, ma è comunque presente un fenomeno di risonanza.

Dal punto di vista delle misure, *essendo opportuno avere un modulo della funzione di trasferimento il più possibile piatto e un andamento della fase il più possibile lineare, ci si rende conto che i valori ottimali del coefficiente di smorzamento sono quelli compresi tra **0.6** e **0.7**.*

Quanto detto vale, però, in generale quando l'interesse principale è quello di misurare il segnale in ingresso con la minima incertezza: in questo caso, i valori di δ compresi tra 0.6 e 0.7 garantiscono una riproduzione abbastanza fedele del segnale al prezzo semplicemente di un ritardo temporale (determinato appunto da una fase non nulla, ma linearmente decrescete, della funzione di risposta armonica). Al contrario, laddove si desiderassero caratteristiche selettive in frequenza (come ad esempio in alcuni strumenti rivelatori di zero in un ristretto campo di frequenza), allora bisognerebbe prendere valori molto piccoli di δ, in modo da avere una risposta armonica quanto più possibile stretta attorno al valore della pulsazione naturale ω_n; ovviamente, si dovrà poi fare in modo che tale pulsazione naturale si approssimi il più possibile alla frequenza ω che si desidera esaltare. A tal proposito, il grado di esaltazione dell'ampiezza dell'ingresso è legato alla cosiddetta **cifra di merito** del sistema, definita nel modo seguente:

$$Q = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$$

Quando δ è piccolo (<<1), questa cifra di merito si approssima evidentemente a $1/2\delta$.

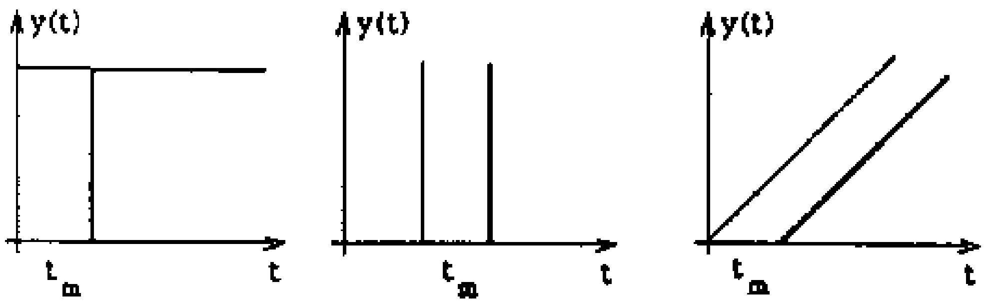
Sistemi a tempo morto

DESCRIZIONE

Ci sono alcuni componenti, usati nei sistemi di misura, che consentono di avere segnali in uscita praticamente della stessa forma dell'ingresso, ma con un ritardo temporale $\mathbf{t_m}$ detto **tempo morto** (*dead time*): analiticamente, possiamo cioè scrivere che, a fronte di un ingresso generico x(t), un **sistema a tempo morto** risponde con una uscita nella forma

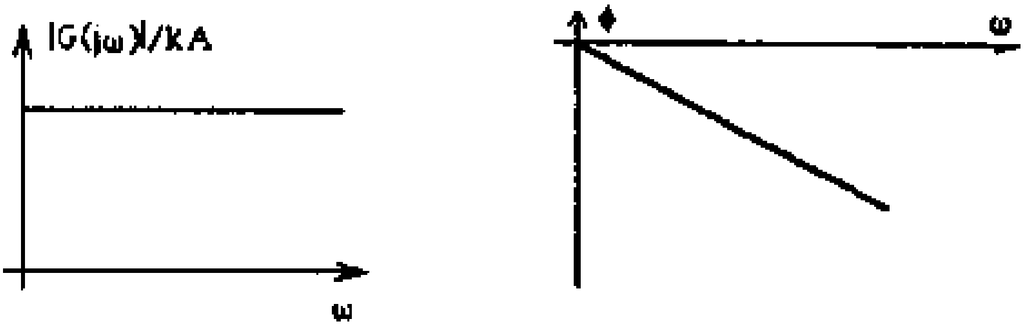
$$y(t) = k \cdot x(t - t_m)$$

Questi componenti prendono anche il nome di ritardatori puri (per evidenti motivi). Per essi, è chiaramente molto facile determinare le risposte ai segnali canonici. Senza addentrarci nei passaggi, ci limitiamo allora a riportare nella figura seguente le risposte a tali segnali canonici (in particolare al gradino, all'impulso ideale ed alla rampa) confrontate con le risposte attese:



La differenza tra risposta effettiva y(t) e risposta attesa $y_A(t)$ è ovviamente la funzione errore dinamico, che quindi è molto facile da ricavare in questo caso.

Infine, la figura seguente mostra il modulo e la fase della funzione di risposta armonica del sistema:



Come era ovvio che fosse, il modulo è perfettamente costante con la frequenza, a testimonianza del fatto che l'uscita riproduce fedelmente l'ingresso. La fase è invece rigorosamente lineare (a valori negativi), a testimonianza del ritardo temporale imposto dal sistema sull'ingresso.

Affidabilità dei sistemi di misura

INTRODUZIONE

Gli **errori** nella risposta di un **sistema di misura** possono derivare da numerosi fattori, tra cui citiamo:

- *limitazioni e difetti* nella progettazione e realizzazione delle singole parti;
- *deterioramenti* legati all'uso intenso o a condizioni operative anomale;
- influenza delle *condizioni ambientali*.

Per studiare l'influenza di questi fattori sul funzionamento di un sistema e sulle sue caratteristiche nel tempo, è stato introdotto (abbastanza di recente) il concetto di **affidabilità**[3]. L'affidabilità, che sarà definita rigorosamente tra poco, consente essenzialmente di quantificare i tempi durante il quale è garantito il corretto funzionamento di uno strumento.

Per quantificare l'affidabilità, sono necessarie una serie di **prove di affidabilità**, tese a evidenziare l'insorgere di guasti o di malfunzionamenti al di fuori delle specifiche. I costruttori più seri specificano sempre, tra i dati tecnici dello strumento (o in generale di un sistema), i valori di affidabilità o comunque di parametri ad essa legati.

In modo rigoroso, *per **affidabilità** si intende la probabilità che il sistema esplichi la funzione richiesta in condizioni stabilite e per un periodo di tempo specificato.* Chiaramente, una affidabilità nulla indica che il sistema è

[3] A tale concetto è legata anche la procedura (che recentemente ha acquisito notevole importanza) del **controllo di qualità**: con il termine **qualità** di un prodotto si intende lo stato, in un particolare istante della sua vita, delle sue specifiche tecniche.

guasto o comunque non funzionante secondo le specifiche. Viceversa, una alta affidabilità (cioè sostanzialmente una probabilità molto prossima ad 1) indica che un guasto del sistema è una evenienza molto improbabile.

Un'altra definizione è importante è quella del cosiddetto **tempo di vita** di un sistema, inteso come *il tempo totale tra la nascita e la morte del sistema quando esso operi nelle condizioni definite da uno specificato schema di manutenzione, prefissato a priori.*

E' importante chiarire che l'affidabilità è una quantità temporale. A tal fine, supponiamo di avere in esame N componenti, con N molto elevato, e supponiamo di provarne il funzionamento per un tempo t. Indichiamo con $\mathbf{N_S}$ il numero di componenti che, durante il periodo di prova, non hanno subito guasti, mentre invece indichiamo con $\mathbf{N_f}$ il numero di componenti che, nello stesso periodo, hanno subito guasti. Ovviamente, risulta $\mathbf{N=N_S+N_f}$. Si definisce allora **affidabilità** la seguente quantità:

$$\boxed{R(t) = \frac{N_S}{N}}$$

In base a questa definizione, l'affidabilità è funzione del tempo nel senso che N_S può essere più o meno grande a seconda di cosa accade agli strumenti durante il periodo di prova. La quantità R(t) varia evidentemente dal valore 1, che si ha all'inizio della prova (t=0) in quanto i componenti si suppongono inizialmente integri, fino a 0, quando cioè tutti i componenti hanno subito un guasto. Naturalmente, non è detto che il valore 0 si ottenga esattamente alla fine del periodo di prova (o, quantomeno, si spera che ciò non avvenga!).

Analogamente, si definisce allora **affidabilità** la seguente quantità:

$$Q(t) = \frac{N_f}{N}$$

Naturalmente, essendo $N=N_S+N_f$, è ovvio che risulti anche **R(t)+Q(t)=1**.

A proposito dei guasti che possono causare una affidabilità non unitaria, possiamo distinguere fondamentalmente due categorie:

- i **guasti catastrofici** sono quelli improvvisi e completi ed impediscono completamente il funzionamento del componente;
- i **guasti marginali** sono invece sia graduali sia parziali e impediscono semplicemente il funzionamento pienamente rispondente alle specifiche; questo tipo di guasti, che sono gli unici di nostro interesse, sono dovuti generalmente a starature ed a degradazione dei materiali che costituiscono il sistema o parti di esso. Sono tra l'altro i guasti più temibili, in quanto possono dar luogo ad errori difficilmente rilevabili e valutabili.

Concludiamo sottolineando che *l'affidabilità richiesta ad uno strumento dipende molto dall'uso che se ne intende fare:* per capirci, è ovvio che l'affidabilità richiesta ad un sensore usato in ambito aerospaziale o in ambito biomedico è sicuramente elevata e comporta evidentemente costi elevati.

MTTF, MTBF E DISPONIBILITÀ

In un generico sistema (o strumento o componente) si possono distinguere alcune parti che, dopo un certo tempo, devono essere sostituite ed altre parti che invece richiedono semplicemente una periodica manutenzione per assicurare prestazioni prefissate. Inoltre, ci sono parti che, in caso di guasto, devono necessariamente sostituite, mentre altre che possono essere semplicemente riparate. Si comprende allora come la manutenzione possa essere molto facilitata se si conoscono i tempi medi entro i quali occorre intervenire, per sostituire o riparare, in modo da assicurare il corretto funzionamento di uno strumento.

Concentriamoci inizialmente sulle **parti non riparabili**. Si definisce **MTTF** (*Mean Time To Failure*, ossia **tempo medio di guasto**) la misura del tempo medio di guasto di un gran numero di componenti uguali che operano tutti nelle stesse condizioni operative ed ambientali. Questa definizione si può tradurre molto facilmente in termini matematici: supponendo di avere **N** componenti (uguali) in prova e supponendo che sia $\mathbf{t_k}$ il tempo necessario affinché il componente k-simo subisca un guasto, avremo che

$$\boxed{MTTF = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} t_k}$$

E' interessante mettere in relazione questa quantità con l'affidabilità $R(t) = \frac{N_S}{N}$: infatti, essendo R(t) la frazione di componenti che, nel tempo t, non subiscono guasti, la sua integrazione su un tempo infinito ci dà proprio MTTF. Scriviamo quindi che

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t)dt$$

Abbastanza problematica è la misura dell' MTTF: infatti, anche volendo condurre la misura su un numero N piccolo di componenti, potrebbe comunque essere necessario un tempo troppo lungo. si procede allora nel modo seguente: si considera un numero abbastanza grande di componenti, ma li si prova per un periodo più piccolo. In particolare, indichiamo con $\mathbf{N_p}$ il numero di componenti provati e con $\mathbf{t_p}$ il tempo di prova per ciascuno di essi; il tempo totale di prova (detto **tempo cumulativo**) è evidentemente $\mathbf{t_C=N_p t_p}$; nell'ipotesi che, nel tempo t_C, ci siano stati N_f componenti che hanno subito guasti, si ha che

$$MTTF = \frac{t_C}{N_f} = \frac{t_p N_p}{N_f}$$

Naturalmente, questa è solo una stima dell'MTTF effettivo. Ad essa sono allora associati un intervallo di confidenza ed un corrispondente livello di confidenza, fissati in funzione di N_p e t_p. Perché si abbia una elevata confidenza, il numero N_f di componenti che subiscono guasti deve essere elevato.

Passiamo adesso alle **parti riparabili**. In questo caso, pur conservando lo stesso metodo di calcolo dell'MTTF, si parla di **MTBF** (*Mean Time Between Failure*, ossia **tempo medio tra guasti**), per sottolineare appunto il fatto che i guasti non comportano la necessità di sostituzione dei componenti. L'MTBF è chiaramente legato alle condizioni operative e ambientali cui è soggetto il sistema.

Talvolta, insieme all’MTBF si forniscono anche l’**MTTFF** (*Mean Time To First Failure*, ossia **tempo medio per il primo guasto**) e l’**MTTR** (*Mean Time To Repair*, ossia **tempo medio per la riparazione**), con evidenti significati[4].

Sulla base di queste quantità, per le parti riparabili si definisce **disponibilità** il seguente rapporto:

$$D = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR}$$

Molti utilizzatori richiedono ai componenti una elevata disponibilità: infatti, a volte, anche poche ore in cui i componenti non vengono usati (perché in riparazione) possono comportare rilevanti danni alla produzione; quindi, anche se un dispositivo presenta elevata affidabilità (cioè bassa probabilità di subire guasti), è necessario che abbia anche una alta disponibilità, in quanto, in caso contrario, il più piccolo guasto potrebbe comportare inaccettabili tempi di non utilizzo (causa appunto riparazione).

Tipici sistemi con elevata disponibilità sono i cosiddetti **strumenti intelligenti**, dotati di *autodiagnosi*: in questo caso, è quasi immediata la localizzazione del guasto.

TASSO DI GUASTO

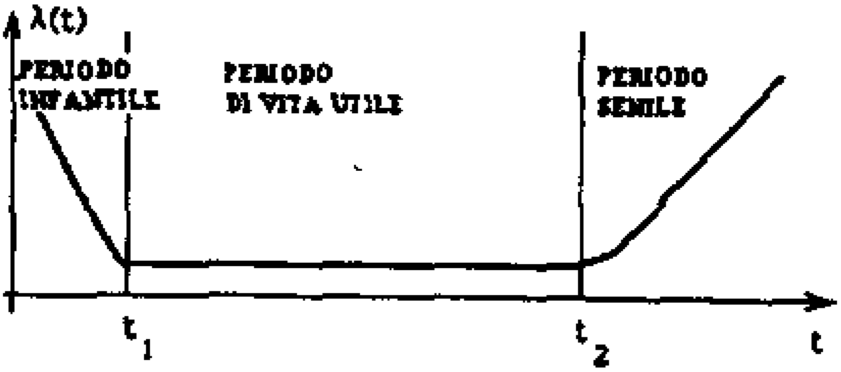
Un altro parametro utile per lo studio dell’affidabilità di un sistema è il cosiddetto *tasso di guasto*, che ha la seguente definizione: indichiamo con ΔNf il numero di guasti, sui soliti N componenti uguali, che si verificano in un tempo Δt; si definisce **tasso di guasto** la quantità

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{N_S} \frac{\Delta N_f}{\Delta t} = \frac{1}{N_S} \frac{dN_f}{dt}$$

La variazione di $\lambda(t)$ è influenzata da

- *parametri costruttivi* (ad esempio gli eventuali difetti in parti del sistema);
- *parametri operativi* (condizioni anomale di funzionamento del sistema);
- *parametri ambientali* (ad esempio particolari condizioni termiche o di umidità o di salinità e così via).

In ogni caso, l’andamento di $\lambda(t)$ è generalmente del tipo seguente:



[4] In particolare, è opportuno dire che l’MTTR include il tempo per la diagnosi, il tempo per la localizzazione del guasto ed il tempo materiale della riparazione meccanica

Si distinguono evidentemente 3 fasi nella vita di un dispositivo:

- la prima fase, da t=0 a $t=t_1$, è detta **periodo infantile**: essa è caratterizzata dai guasti in molti componenti essenzialmente a causa di materiali difettosi o di imperfezioni nel processo di lavorazione;
- terminata questa fase, ne segue una seconda, da $t=t_1$ fino a $t=t_2$, detta **periodo di vita utile**: essa è caratterizzata da un tasso di guasto basso e soprattutto costante ed è quindi quella in cui il dispositivo è impiegato al meglio, in quanto è bassa la probabilità che esso subisca dei guasti; questi possono essere dovuti quasi esclusivamente a fortuite combinazioni di parametri operativi che danno luogo a pericolose sollecitazioni;
- la terza ed ultima fase inizia in $t=t_2$ e prende il nome di **periodo senile**: a seguito del prolungato utilizzo, il tasso di guasto è crescente in questo periodo, fino alla "morte" del dispositivo.

E' ovvio che, nel periodo senile, diminuisce la disponibilità D, in quanto aumentano sia il tempo medio tra guasti (MTBF) sia il tempo medio di riparazione (MTTR):

$$D = \frac{1}{1 + \frac{MTTR}{MTBF}}$$

Per aumentare la disponibilità in questo periodo, occorre intervenire nel periodo di vita utile, provvedendo ad una accurata manutenzione e sostituendo i componenti più facilmente deteriorabili con l'uso.

Nel periodo di vita utile esiste una interessante relazione tra il tasso di guasto (costante) e l'affidabilità. Vediamo di che si tratta.

In base alla definizione $\lambda(t) = \frac{1}{N_S}\frac{dN_f}{dt}$, se noi integriamo il tasso di guasto tra 0 e t (=tempo in cui si sono verificati N_f guasti), otteniamo

$$\int_0^t \lambda(t)dt = \int_0^t \frac{1}{N_S}\frac{dN_f}{dt}dt = \int_0^t \frac{1}{N-N_f}\frac{dN_f}{dt}dt = \int_0^{N_f} \frac{1}{N-N_f}dN_f = -\ln(N-N_f) + \ln N = \ln\frac{N}{N-N_f}$$

D'altra parte, dato che stiamo considerando il periodo di vita utile, il tasso di guasto è costante, per cui l'integrale a primo membro vale semplicemente λt: quindi

$$\lambda t = \ln\frac{N}{N-N_f}$$

Se cambiamo di segno ambo i membri e poi calcoliamo l'esponenziale di ambo i membri, otteniamo

$$e^{-\lambda t} = 1 - \frac{N_f}{N} = 1 - Q(t) = R(t)$$

Abbiamo quindi concluso che $\boxed{R(t) = e^{-\lambda t}}$: *possiamo dunque sfruttare questa relazione per calcolare l'affidabilità di un dispositivo durante la sua vita utile, conoscendo a priori il tasso di guasto (costante).*

Facciamo notare che, nei discorsi appena conclusi, abbiamo indicato con N_f sia il numero di dispositivi che hanno subito guasti (prima definizione) sia il numero di guasti nel singolo dispositivo (definizione usata per legare R(t) a λ). Questo è lecito in quanto, essendo λ costante, risulta del tutto indifferente provare un solo componente per t_0 ore oppure N componenti uguali per t_0/N ore, in quanto la probabilità di guasto in un tempo prefissato è sicuramente la stessa.

Da queste considerazioni scaturisce, in modo intuitivo, che il tasso di guasto costante (che ha evidentemente le dimensioni del reciproco di un tempo) coincide con 1/MTTF per i componenti non riparabili e con 1/MTBF per quelli riparabili:

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{1}{MTTF} & \text{parti non riparabili} \\ \dfrac{1}{MTBF} & \text{parti riparabili} \end{cases}$$

D'altra parte, si può arrivare a questa stessa conclusione anche in modo matematico: scriviamo infatti, riprendendo quanto vista in precedenza, che

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}$$

dove ricordiamo che la definizione dell'MTTF è identica a quella dell'MTBF, salvo a considerare componenti non riparabili nel primo caso e riparabili nel secondo.

TASSO DI RIPARAZIONE

Si definisce **tasso di riparazione** la frequenza con la quale si effettuano le operazioni di riparazione: esso si indica con μ e si esprime generalmente come l'inverso di un certo numero di ore. In base a quanto visto in precedenza per le parti riparabili, si intuisce che

$$\mu = \frac{1}{MTTR}$$

CATENE DI COMPONENTI

Abbiamo prima visto che l'affidabilità ha legge di distribuzione esponenziale durante la vita utile del dispositivo:

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

Questa legge è particolarmente utile quando si esaminano sistemi costituiti da **catene di componenti**, posti tra loro in serie: questo collegamento *in serie* indica in pratica che il guasto su un componente non dipende dalle operazioni svolte da altri componenti, ma compromette ugualmente il funzionamento dell'intero sistema.

Per i sistemi in serie, l'affidabilità complessiva $\mathbf{R_S(t)}$ è data dal prodotto delle affidabilità $\mathbf{R_i(t)}$ dei singoli componenti: scriviamo quindi che essa vale

$$R_S = \prod_{i=1}^{N} R_i(t)$$

Considerando una distribuzione esponenziale, abbiamo che

$$R_S = \prod_{i=1}^{N} e^{-\lambda_i t} = e^{-\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\right)t} = e^{-\lambda t} \longrightarrow \boxed{\lambda = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i}$$

Evidentemente, applicando la definizione abbiamo ottenuto che *il tasso di guasto l dell'intero sistema è la somma dei tassi di guasto dei singoli componenti.*

Un metodo spesso usato per migliorare l'affidabilità di un sistema con componenti in serie è quello della cosiddetta **ridondanza**: si tratta in pratica di aggiungere in parallelo, a ciascun dispositivo, un dispositivo gemello, in modo che, in caso di guasto del primo, possa immediatamente subentrare in funzione il secondo. In questo modo, il guasto non comporta l'andata fuori servizio del sistema. Per quanto riguarda l'affidabilità, il discorso è allora diverso da prima: bisogna infatti moltiplicare, in questo caso, le inaffidabilità, ottenendo che

$$Q_S = \prod_{i=1}^{N} Q_i(t)$$

Quindi, riepilogando, *nel caso di componenti in serie dobbiamo moltiplicare le singole affidabilità, mentre nel caso di componenti in parallelo dobbiamo moltiplicare le singole inaffidabilità.*

E' ovvio infine che la disponibilità di componenti gemelli in parallelo aumenta notevolmente la disponibilità del sistema.

FATTORI CHE INFLUENZANO L'AFFIDABILITÀ

I fattori che influenzano l'affidabilità possono essere così classificati:

- **fattori costruttivi**, legati al progetto dello strumento (ad esempio gli attriti);
- **fattori operativi**, legati al funzionamento dello strumento (ad esempio, variazioni delle caratteristiche dei componenti, dovute a deterioramento fisico o chimico dei materiali);
- **fattori ambientali**, che sono spesso i più temibili, in quanto annoverano, per esempio, i forti gradienti di temperatura oppure l'alta umidità (fattori entrambi che hanno una influenza deleteria sui materiali.

Si deduce dunque l'importanza di operare un buon progetto ed una buona realizzazione dello strumento (al fine di ridurre l'influenza del fattori costruttivi), di operare frequenti opere di manutenzione e taratura (al fine di ridurre l'influenza del fattori operativi) e di far funzionare lo strumento in condizioni ambientali ottimali (al fine di ridurre l'influenza del fattori ambientali).

Caratteristiche metrologiche

CARATTERISTICHE METROLOGICHE IN REGIME STAZIONARIO

Per stabilire in modo completo quale il valore del segnale in uscita da uno strumento, in condizioni di regime stazionario del misurando, è necessario conoscere una serie di parametri che definiscono le cosiddette **caratteristiche metrologiche statiche**.

Uno strumento ideale presenta una relazione, tra ingresso ed uscita, ben definita da una curva teorica, che indichiamo con **y=f(x)**. Questa curva teorica può essere fornita dal costruttore sia direttamente in forma grafica sia in forma di equazione matematica o di tabella di valori.

Nella pratica, invece, il segnale in uscita da uno strumento è legato al comportamento effettivo del sistema, con variazioni del misurando rispetto al suo valore vero o atteso o teorico.

L'errore che ne deriva determina una **fascia di incertezza**, detta anche *banda di errore*, alla cui ampiezza contribuiscono una serie di errori, alcuni dei quali descritti nei prossimi paragrafi. La conoscenza degli effetti di queste cause di errore può consentire di correggere i dati finali e quindi di aumentare l'accuratezza dei risultati.

In generale, si è interessati soprattutto al massimo errore possibile sull'intero campo di misura. Questo errore massimo può essere espresso in vari modi: in unità assolute, in unità percentuali o in percentuale del valore di fondo scala (% FSO o **%FSR**).

Taratura (o calibrazione)

La **taratura** (o **calibrazione**) di uno strumento è una prova in cui vengono applicati <u>valori noti</u> del misurando in ingresso allo strumento e si registrano le corrispondenti uscite. Questa prova serve a ricavare la cosiddetta **curva di taratura**, che pone in relazione ogni valore della grandezza di uscita con il corrispondente valore da assegnare al punto centrale della fascia di valore relativa al misurando.

Isteresi

L'**isteresi** è la massima differenza tra i valori della grandezza in uscita, corrispondenti allo stesso misurando, quando la misura è eseguita procedendo per valori prima crescenti e poi decrescenti del misurando stesso (ovviamente nell'ambito del suo campo di variazione normale).

Generalmente, l'isteresi è espressa in % FSR: essa è presente in diversi sistemi ed è causata essenzialmente dal ritardo con cui un elementi risponde alla sollecitazione in ingresso.

La massima isteresi si ha quando il misurando varia dall'inizio della scala fino al fondo scala e viceversa.

Un errore analogo a quello causato dall'isteresi è il cosiddetto **errore di frizione**: è un errore tipico, per esempio, dei potenziometri, in cui una spazzola scorre su delle spire.

Ripetibilità

La **ripetibilità** è la capacità dello strumento di riprodurre le letture in uscita quando lo stesso valore del misurando è applicato ad esso consecutivamente, nelle stesse condizioni e nello stesso modo.

Anche la ripetibilità è espressa come % FSR e determina i limiti di impiego dello strumento. Al costruttore, infatti, si richiede di assicurare la ripetibilità durante tutta la vita utile dello strumento, quali che siano le grandezze di influenza agenti su di esso.

Tra le grandezze di influenza, una delle più importanti è ovviamente il tempo: in questo caso, anziché parlare di ripetibilità si parla di **stabilità**, intesa come capacità dello strumento di conservare inalterate le sue caratteristiche di funzionamento in un certo intervallo di tempo.

Linearità

La linearità è una indicazione di quanto la curva di taratura si discosti dall'andamento rettilineo. E' espressa in funzione del valore massimo dello scostamento registrato tra i singoli punti della curva di taratura ed una retta di riferimento opportunamente definita. Proprio la scelta di tale retta di riferimento differenzia i vari tipi di linearità:

- **linearità riferita alla retta teorica**: si considera in questo caso la retta che passa per alcuni punti prefissati tra loro zero ed il 100% del fondo scala sia del misurando sia del segnale di uscita dello strumento; non si fa dunque alcun riferimento ai valori misurati (da cui l'aggettivo "teorica");
    - **linearità terminale**: rientra nella linearità riferita alla retta teorica ed è il caso particolare in cui si considerano lo 0 ed il 100% del fondo scala del misurando e dell'uscita;
- **lineari riferita agli estremi**: in questo caso, la retta di riferimento è ottenuta congiungendo i punti estremi ottenuti durante la taratura del dispositivo; in tal caso spesso si richiede la conoscenza delle tolleranze con cui sono stati ottenuti tali punti estremi;
- **linearità indipendente**: in questo caso, si considera la linea media tra due rette parallele disposte il più vicine possibile tra loro ed in grado di avere al loro interno tutti i valori misurati nel corso della taratura;
- **linearità secondo i minimi quadrati**: si considera in questo caso la retta ottenuta applicando il noto metodo dei minimi quadrati, ossia minimizzando la somma dei quadrati degli scostamenti.

Risoluzione

La **risoluzione** è la minima variazione del misurando che dà luogo, in uscita, ad una variazione del segnale superiore o uguale all'incertezza dello strumento. La si può esprimere come valore assoluto o come valore percentuale riferito al fondo scala.

Soglia e piedistallo

Per **soglia** intendiamo il minimo segnale da applicare all'ingresso dello strumento per ottenere in uscita un segnale comunque misurabile.

Al contrario, il **piedistallo** è il segnale presente in uscita anche in assenza di segnale in ingresso (dovuto ad esempio al rumore oppure ai segnali di polarizzazione dei dispositivi attivi come i transistor).

Sensibilità

La sensibilità è il rapporto tra la variazione Δy del segnale in uscita e la variazione Δx del segnale in ingresso che l'ha provocata. Essa è legata alla pendenza della curva di taratura.

CARATTERISTICHE METROLOGICHE IN REGIME DINAMICO

Quando si usa uno strumento per misure su misurandi che variano nel tempo in modo più o meno rapido oppure in modo discontinuo, è necessario avere informazioni sulle caratteristiche dinamiche dello strumento.

Una delle caratteristiche più importanti, come si è visto in precedenza, è la **risposta in frequenza** del sistema, espressa in termini di modulo e fase. Si definisce campo di frequenza utile dello strumento quello in cui non si ha distorsione sul segnale in ingresso, ossia in cui il modulo della risposta armonica non esce da una fascia di tolleranza prefissata.

Un'altra caratteristica molto importante è la risposta al gradino, con tutti i parametri ad essa legati (ad esempio sovraelongazione massima, fattore di smorzamento, tempo di salita e così via).

Citiamo inoltre i seguenti due parametri:

- il **limite di velocità** è la massima velocità di variazione del misurando che può essere rilevata in uscita: se il misurando dovesse variare con velocità più alta, il segnale di uscita non riuscirebbe a seguire tale variazione con la stessa velocità;
- il **tempo di recupero** è quello necessario allo strumento per riprendere a funzionare secondo le caratteristiche specificate, dopo il verificarsi di un determinato evento.

CARATTERISTICHE METROLOGICHE AMBIENTALI

Abbiamo sottolineato più volte come `le condizioni ambientali possano alterare il funzionamento di uno strumento, sia al chiuso sia all'aperto.` Allora, quando è previsto che lo strumento possa funzionare in condizioni diverse da quelle in cui è stato tarato (dette **condizioni ambientali operative**), è necessario conoscere gli effetti causati dalle grandezze di influenza, in modo da poter stabilire opportune tolleranze delle caratteristiche oppure dei fattori di correzione sui risultati ottenuti.

Gli effetti che ci interessano sono i seguenti:

- **effetto di temperatura**: è noto e portato in tutti gli strumenti; generalmente, gli effetti termici sono stabiliti in termini di *scostamento termico dallo zero* delle curva di taratura e come *variazione termica della sensibilità*. La conoscenza di questi errori serve laddove si vogliano *correggere* i dati finali. In alternativa, si definisce talvolta una *fascia di incertezza di temperatura*, che si aggiunge alla banda di incertezza in condizioni stazionarie, allargandola. Molti strumenti prevedono inoltre meccanismi di *compensazione degli effetti termici*;
- **effetti di accelerazione**: sono effetti presenti essenzialmente negli strumenti meccanici in cui ci sono <u>equipaggi in rotazione</u>; i movimenti di tali equipaggi possono causare errori nel segnale di uscita. Si definisce *errore di accelerazione* la massima differenza (per ogni valore misurato) tra i valori misurati in uscita in presenza ed in assenza di prefissate costanti di accelerazione. questo errore viene talvolta definito in termini di *sensibilità all'accelerazione*;
- **effetti di vibrazione**: le vibrazioni influiscono sul segnale di uscita così come le accelerazioni di cui al punto precedente. Gli effetti più gravi si hanno in corrispondenza delle

frequenze di vibrazione. Anche in questo caso, si può ragionare in termini di fascia di incertezza dovuta alle vibrazioni. Si definisce *errore di vibrazione* la massima variazione dell'uscita (variabile con il valore dell'ingresso) quando si applicano allo strumento determinati livelli di vibrazione (di ampiezza e frequenza prefissati);

- **effetti della pressione ambientale**: questi effetti si possono manifestare quando si usa, a grandi altitudini (per esempio negli aeromobili o nelle navicelle spaziali) o a grandi profondità sottomarine, uno strumento progettato invece per funzionare alla pressione atmosferica del livello del mare. In queste particolari condizioni, lo strumento può funzionare diversamente a causa delle deformazioni del contenitore o delle variazioni della geometria interno dello strumento. Si definisce errore di pressione ambientale la massima variazione dell'uscita (variabile con il valore dell'ingresso) quando la pressione dell'ambiente viene fatta variare, tra valori specificati, rispetto a quella di progetto.

CARATTERISTICHE METROLOGICHE DI AFFIDABILITÀ

Le caratteristiche metrologiche di affidabilità di uno strumento sono essenzialmente quelle relative alla vita utile dello strumento. Quest'ultima può essere specificata in modi diversi:

- la **vita operativa** (o *tempo di funzionamento*) è il minimo intervallo di tempo nel quale lo strumento opera, in modo continuativo o intermittente, con cicli di lavoro prefissati, senza variazioni nelle sue caratteristiche di funzionamento che superino tolleranze prefissate;
- il **numero di cicli** è il numero di escursioni del misurando, da un estremo all'altro del campo di misura oppure tra due limiti diversamente specificati, cui si sottopone lo strumento senza che si presentino variazioni nelle sue caratteristiche di funzionamento che superino tolleranze prefissate.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1