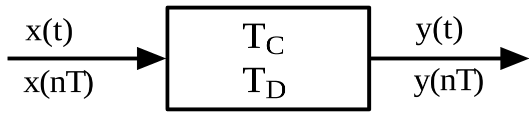
Appunti di Teoria dei segnali

Capitolo 5 - I sistemi lineari

DEFINIZIONI PRINCIPALI

Un **sistema** può essere visto come un *qualcosa* che, dato un ingresso x(t) continuo o x(nT) discreto, opera su di esso una **trasformazione** e genera una uscita y(t) continua o y(nT) discreta.

Schematicamente, possiamo indicare un sistema nel modo seguente:



dove evidentemente

$$y(t) = T_C[x(t)] \qquad \text{caso continuo}$$

$$y(nT) = T_D[x(nT)] \qquad \text{caso discreto}$$

<u>Def.</u> Un sistema si dice "**lineare**" quando possiamo applicare ad esso il *principio di sovrapposizione degli effetti*, ossia le proprietà di *additività* e di *omogeneità*.

Vediamo cosa significa questo nel **caso continuo**. Supponiamo di applicare due segnali in ingresso x(t) e g(t) e supponiamo che le rispettive risposte siano y(t) e z(t); supponiamo adesso di applicare un nuovo ingresso che sia combinazione lineare degli altri due, ossia $ax(t)+bg(t)$. Allora il sistema si dice **lineare** se la risposta a questo segnale è

$$ay(t)+bz(t)$$

ossia <u>una combinazione lineare, con gli stessi coefficienti, delle corrispondenti risposte</u>.

Ovviamente lo stesso accade nel caso discreto.

<u>Def.</u> Un sistema si dice "**invertibile**" quando possiamo ricavare l'ingresso conoscendo solo la corrispondente uscita.

<u>Def.</u> Un sistema si dice "**causale**" o anche "non-anticipativo" quando il valore dell'uscita ad un certo istante t dipende SOLO dai valori dell'ingresso relativi all'intervallo]-∞,t[.

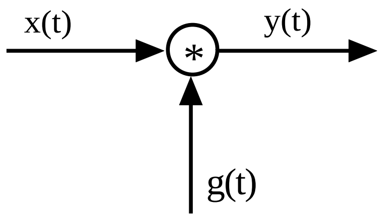
<u>Def.</u> Un sistema si dice "**stabile di tipo BIBO**" quando, applicando in ingresso un segnale limitato, noi otteniamo una uscita anch'essa limitata

<u>Def.</u> Un sistema si dice "**tempo-invariante**" quando, dati l'ingresso x(t) e la corrispondente uscita y(t), in corrispondenza di un nuovo ingresso $x(t-t_0)$ si ottiene una uscita $y(t-t_0)$

In pratica, quindi, diremo che un sistema è **tempo-invariante** se, traslando nel tempo a nostro piacimento l'ingresso x(t), otteniamo sempre la stessa uscita, anch'essa però traslata come l'ingresso.

Esempio: moltiplicatore

Consideriamo il sistema raffigurato qui di seguito:



Si tratta del cosiddetto **sistema moltiplicatore**: infatti, dato il generico ingresso x(t), l'uscita y(t) è il prodotto di x(t) per un'altra funzione g(t). In questo caso, supponiamo ad esempio che quest'altra funzione sia $g(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)$, per cui si ha, in generale, che

$$y(t) = x(t)A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)$$

Vogliamo vedere se questo sistema è lineare e tempo-invariante. Per farlo, dobbiamo ovviamente applicare le rispettive definizioni: consideriamo perciò due ingressi $x_1(t)$ e $x_2(t)$: le rispettive risposte saranno

$$y_1(t) = x_1(t)A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)$$
$$y_2(t) = x_2(t)A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)$$

Adesso applichiamo in ingresso il segnale $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ e valutiamo la risposta del sistema:

$$y(t) = x(t)A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right) = \left[ax_1(t) + bx_2(t)\right]A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)$$

Da qui si deduce evidentemente che $y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$, ossia che <u>il sistema è lineare</u>.

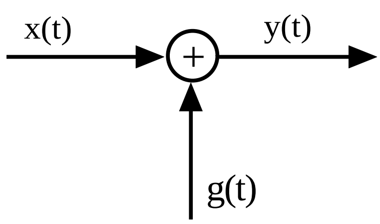
Passiamo a vedere se è anche tempo-invariante o meno. Dato sempre l'ingresso $x_1(t)$ e la risposta $y_1(t)$, vediamo quale è la risposta al segnale $x(t)=x_1(t-t_0)$:

$$y(t) = x(t)A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right) = x_1(t - t_0)A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)$$

Da qui si nota che $y(t) \neq y(t - t_0)$, il che ci dice che <u>il sistema non è tempo-invariante</u>.

Esempio: sommatore

Consideriamo adesso il sistema



che prende il nome di **sommatore** in quanto, dato il generico ingresso x(t), l'uscita y(t) è la somma di x(t) per un'altra funzione g(t). Supponiamo anche questa volta che sia $g(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$, per cui si ha, in generale, che

$$y(t) = x(t) + A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

Vediamo anche qui se il sistema è lineare e tempo-invariante. Cominciamo dalla linearità e consideriamo perciò due ingressi $x_1(t)$ e $x_2(t)$: le rispettive risposte saranno

$$y_1(t) = x_1(t) + A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$
$$y_2(t) = x_2(t) + A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

Applicando in ingresso il segnale $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$, la risposta del sistema è

$$y(t) = x(t) + A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = [ax_1(t) + bx_2(t)] + A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

e da qui si deduce evidentemente che $y(t) \neq ay_1(t) + by_2(t)$, cioè che <u>il sistema, questa volta, NON è lineare</u>.

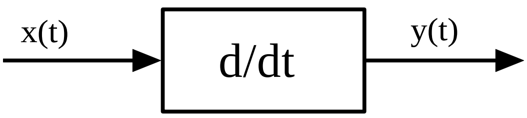
Passiamo a vedere se è tempo-invariante o meno. Dato sempre l'ingresso $x_1(t)$ e la risposta $y_1(t)$, vediamo quale è la risposta al segnale $x(t)=x_1(t-t_0)$:

$$y(t) = x(t) + A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = x_1(t - t_0) + A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

Si nota ancora una volta che $y(t) \neq y(t - t_0)$, per cui <u>il sistema non è nemmeno tempo-invariante</u>.

Esempio: derivatore

Consideriamo adesso il sistema seguente:



Si tratta questa volta del cosiddetto **derivatore**, in quanto l'uscita è la derivata rispetto al tempo dell'ingresso: quindi $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

Verifichiamo ancora una volta linearità e tempo-invarianza. Consideriamo due ingressi $x_1(t)$ e $x_2(t)$: le rispettive risposte saranno

$$y_1(t) = \frac{d}{dt}x_1(t)$$
$$y_2(t) = \frac{d}{dt}x_2(t)$$

Adesso applichiamo in ingresso il segnale $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$. La risposta del sistema è

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}[ax_1(t) + bx_2(t)]$$

ed è evidente che $y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$. Quindi, il derivatore è un sistema lineare.

Vediamo se è anche tempo-invariante o meno. Considerato sempre l'ingresso $x_1(t)$ e la risposta $y_1(t)$, vediamo quale è la risposta al segnale $x(t)=x_1(t-t_0)$:

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}[x_1(t-t_0)]$$

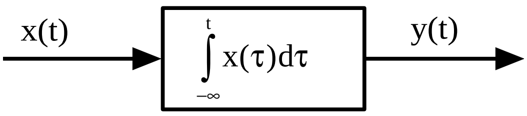
Perché il sistema sia tempo-invariante, deve accadere che $y(t) = y_1(t-t_0)$, dove $y(t)$ è quella calcolata prima. Effettivamente questo accade, in quanto, in base alla relazione generale che caratterizza il sistema, ossia $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, si ha che

$$y_1(t-t_0) = \frac{dx_1(t-t_0)}{dt}$$

Quindi, il derivatore è un esempio di **sistema lineare tempo-invariante**.

Esempio: integratore

Consideriamo adesso il cosiddetto **integratore**:



La relazione tra ingresso ed uscita è cioè

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

Verifichiamo sempre una volta linearità e tempo-invarianza. Consideriamo due ingressi $x_1(t)$ e $x_2(t)$: le rispettive risposte saranno

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau$$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)d\tau$$

Adesso applichiamo in ingresso il segnale $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$. La risposta del sistema è

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} [ax_1(\tau) + bx_2(\tau)]d\tau$$

Sfruttando la proprietà di linearità degli integrali, è chiaro che $y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$, per cui l'integratore è un sistema lineare. Vediamo se è anche tempo-invariante o meno. Considerato sempre l'ingresso $x_1(t)$ e la risposta $y_1(t)$, dobbiamo verificare se la risposta al segnale $x(t)=x_1(t-t_0)$ è

$$y(t) = y_1(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x_1(\tau)d\tau$$

Vediamo allora quanto vale tale risposta:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau - t_0)d\tau$$

Operando il cambio di variabile $s=\tau-t_0$, abbiamo che

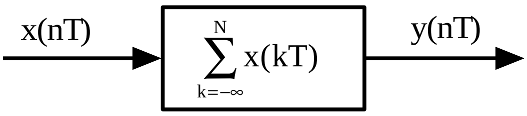
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x_1(s)ds$$

e il secondo membro non è altro che $y_1(t-t_0)$.

Quindi, dopo il derivatore, abbiamo ottenuto che anche l'integratore è un sistema **lineare tempo-invariante**.

Esempio: sommatoria discreta

Fino ad ora abbiamo esaminato solo esempi di **sistemi tempo-continui**, ossia di sistemi in cui ad ingressi continui corrispondono uscite continue. Vediamo ora un esempio di **sistema tempo-discreto** e precisamente il seguente:



per il quale cioè il legame ingresso-uscita è

$$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{N} x(kT)$$

Vediamo se questo sistema (che è, ovviamente, l'analogo dell'integratore nel caso discreto) è lineare e tempo-invariante.

Controlliamo per prima la linearità: dati due ingressi $x_1(nT)$ e $x_2(nT)$, le rispettive risposte saranno

$$y_1(nT) = \sum_{k=-\infty}^{N} x_1(kT)$$

$$y_2(nT) = \sum_{k=-\infty}^{N} x_2(kT)$$

Adesso applichiamo in ingresso il segnale $x(nT) = ax_1(nT) + bx_2(nT)$. La risposta del sistema è

$$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{N} x(kT) = \sum_{k=-\infty}^{N} \left[ax_1(kT) + bx_2(kT) \right]$$

Sfruttando la proprietà di linearità dell'operatore sommatoria, è chiaro che $y(nT) = ay_1(nT) + by_2(nT)$, per cui <u>la sommatoria è un sistema (discreto) lineare</u>. Vediamo se è anche tempo-invariante o meno. Considerato sempre l'ingresso $x_1(nT)$ e la corrispondente risposta $y_1(nT)$, dobbiamo verificare se la risposta al segnale $x(nT) = x_1(nT - n_0T)$ è

$$y(nT) = y_1(nT - n_0T) = \sum_{k=-\infty}^{N-n_0} x_1(kT)$$

Vediamo allora quanto vale tale risposta:

$$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{N} x(kT) = \sum_{k=-\infty}^{N} x_1(kT - n_0T)$$

Operando il cambio di variabile $i=k-n_0$, abbiamo che

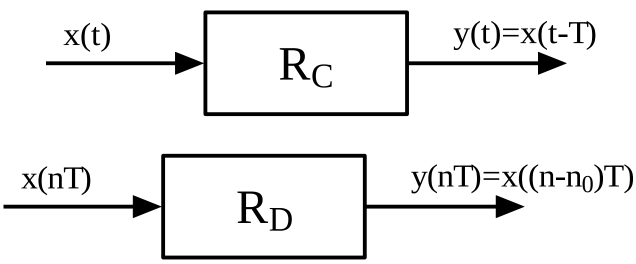
$$y(nT) = \sum_{i=-\infty}^{N-n_0} x_1(iT)$$

e il secondo membro non è altro che $y_1(t-t_0)$.

Quindi, così come l'integratore nel caso continuo, anche <u>la sommatoria è un **sistema (discreto) lineare tempo-invariante**</u>.

Esempio: ritardo

L'ultimo esempio (ovviamente per adesso) che consideriamo è il sistema cosiddetto **ritardo**, ossia un sistema che, sia nel caso continuo sia in quello discreto, opera semplicemente una *traslazione del tempo dell'ingresso*. Possiamo schematizzare tale sistema, nei due casi, nel modo seguente:



E' facile verificare come <u>anche questi due sistemi siano lineari e tempo-invarianti</u>.

Funzione risposta all'impulso

DEFINIZIONE

Quando abbiamo introdotto il concetto di "sistema", abbiamo detto che si tratta di un "qualcosa" che, dato un ingresso x(t) continuo (o x(nT) discreto), opera su di esso una trasformazione e genera una uscita y(t) continua (o y(nT) discreta). Visto in questo modo, possiamo caratterizzare il sistema mediante la relazione

$$y(t) = T_C[x(t)] \qquad \text{caso continuo}$$
$$y(nT) = T_D[x(nT)] \qquad \text{caso discreto}$$

Vogliamo adesso introdurre una nuova funzione che consenta di caratterizzare ancora meglio i <u>sistemi LINEARI TEMPO-INVARIANTI</u>, in quanto consente di legare direttamente ingresso ed uscita e consente anche di dedurre alcune importanti proprietà sul sistema stesso.

<u>Def.</u> Si definisce "**risposta all'impulso**" di un sistema (lineare tempo-invariante) l'uscita prodotta dal sistema stesso quando in ingresso viene applicato l'impulso unitario

La risposta all'impulso si indica generalmente con **h(t)** nel caso continuo e con **h(nT)** in quello discreto: in base a come l'abbiamo definita, essa soddisfa la relazione

$$h(t) = T_C[\delta(t)] \qquad \text{caso continuo}$$
$$h(nT) = T_D[\delta(nT)] \qquad \text{caso discreto}$$

E' ovvio anche che, il sistema è tempo-invariante, vale anche la relazione

$$h(t-t_0) = T_C[\delta(t-t_0)] \qquad \text{caso continuo}$$
$$h(nT-n_0T) = T_D[\delta(nT-n_0T)] \qquad \text{caso discreto}$$

IMPORTANZA DELLA RISPOSTA ALL'IMPULSO

Esaminiamo adesso solo il caso continuo, riservando per dopo quello discreto (che comunque è formalmente identico).

L'importanza fondamentale della funzione h(t) sta nel fatto per cui essa soddisfa la seguente: relazione

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)}$$

Questa relazione dice che, <u>nota la risposta in frequenza del nostro sistema e noto un qualsiasi ingresso x(t) ad esso applicato, possiamo conoscere (dal punto di vista analitico) la risposta y(t) a tale ingresso semplicemente effettuando la convoluzione tra x(t) e h(t)</u>.

Vediamo allora di dimostrare quella relazione. Per farlo, ci ricordiamo di una proprietà della funzione **δ(t)** secondo la quale $x(t) = x(t) * \delta(t)$. Usando questa proprietà possiamo scrivere che

$$y(t) = T_C\left[x(t)\right] = T_C\left[x(t) * \delta(t)\right]$$

Esplicitando l'espressione di quel prodotto di convoluzione, abbiamo che

$$y(t) = T_C\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]$$

Noi stiamo supponendo che il sistema sia LINEARE, il che significa che è lineare la trasformazione T_C: questo ci consente di passarla sotto il segno di integrale, ottenendo

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_C\left[x(\tau)\delta(t-\tau)\right]d\tau$$

Per definizione di integrale, la quantità $x(\tau)$ è una costante, in quanto τ si suppone fissato: data sempre la linearità di T_C, possiamo tirar fuori tale costante e scrivere che

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)T_C\left[\delta(t-\tau)\right]d\tau$$

Abbiamo inoltre visto prima che $h(t-t_0) = T_C\left[\delta(t-t_0)\right]$, per cui

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

e questo era quello che volevamo trovare.

Vediamo adesso cosa accade quando il sistema considerato è discreto. In questo caso, la risposta all'impulso h(nT) è la risposta del sistema all'impulso unitario discreto, ossia il segnale

$$\delta(nT) = \begin{cases} \dfrac{1}{T} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Facciamo vedere che

$$\boxed{y(nT) = x(nT) * h(nT)}$$

La dimostrazione è analoga a prima: si parte dal ricordare la proprietà secondo cui

$$x(nT) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Tx(mT)\delta(nT-mT) = x(nT) * \delta(nT)$$

In base a tale proprietà, abbiamo che

$$y(nT) = T_D\left[x(nT)\right] = T_C\left[x(nT) * \delta(nT)\right] = T_C\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} Tx(mT)\delta(nT - mT)\right]$$

Data la linearità del sistema (e quindi di T_D) abbiamo poi che

$$y(nT) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} TT_C\left[x(mT)\delta(nT - mT)\right] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Tx(mT)T_C\left[\delta(nT - mT)\right]$$

Ma abbiamo detto che $h(nT - n_0T) = T_D\left[\delta(nT - n_0T)\right]$, per cui concludiamo che

$$y(nT) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Tx(mT)h(nT - mT) = x(nT) * h(nT)$$

> N.B. Le due dimostrazioni mettono in evidenza come le due relazioni dimostrare valgano <u>SOLO per i sistemi lineari tempo-invarianti</u>

Stabilità (BIBO) di un sistema lineare tempo-invariante

PREMESSA

Abbiamo in precedenza già dato la definizione di sistema **stabile di tipo BIBO**: un sistema è tale quando, in corrispondenza di un ingresso limitato, si ottiene una uscita anch'essa limitata. Vogliamo adesso vedere quali vincoli vengono imposti alla risposta impulsiva dal fatto che il sistema è stabile. Ovviamente, ci riferiamo a <u>sistemi lineari tempo-invarianti</u>, sia continui sia discreti, in quanto solo per essi vale il concetto di risposta all'impulso e solo per essi valgono inoltre le relazioni

$$y(t) = x(t) * h(t) \qquad \text{caso continuo}$$

$$y(nT) = x(nT) * h(nT) \qquad \text{caso discreto}$$

CASO CONTINUO

Cominciamo dal caso continuo. Intendiamo dimostrare il seguente risultato:

Teorema *- Un sistema continuo (lineare tempo-invariante) è stabile SE E SOLO SE la risposta all'impulso h(t) è una funzione assolutamente integrabile*

Detto in altri termini, condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia stabile è che valga la relazione

$$0 < \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

(dove naturalmente la scrittura >0 è superflua in quanto la funzione integranda è certamente positiva).

<u>Dimostrazione</u>

Per dimostrare questo risultato, dobbiamo dimostrare evidentemente due implicazioni. Dimostriamo per prima quella secondo cui, nell'ipotesi di h(t) assolutamente integrabile, il sistema risulta stabile. Le ipotesi sono dunque le seguenti: il sistema è lineare tempo-invariante; h(t) è assolutamente integrabile; l'ingresso x(t) applicato al sistema è limitato. Dobbiamo dimostrare che anche y(t), risposta del sistema, è limitata.

Il punto di partenza è la relazione

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Passando ai moduli, abbiamo che

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right|$$

In base ad una nota proprietà degli integrali, possiamo passare il modulo all'interno dell'integrale e scrivere che

$$|y(t)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau) h(t-\tau)| d\tau \le \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)| |h(t-\tau)| d\tau$$

Ora, dire che l'ingresso $x(\tau)$ è limitato significa dire che $|x(\tau)| \le M \qquad \forall \tau$, per cui abbiamo che

$$|y(t)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} M |h(t-\tau)| d\tau = M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau$$

Essendo M un numero reale positivo e avendo supposto che h(t) è assolutamente integrabile, ossia che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = N$$

è evidente che anche y(t) è limitata, ossia che

$$|y(t)| \le MN = M'$$

Passiamo adesso alla implicazione inversa: nell'ipotesi che il sistema sia stabile, dobbiamo far vedere che la risposta all'impulso è assolutamente integrabile.

Supporre il sistema stabile significa dire che, dato un qualsiasi ingresso limitato, la risposta a tale ingresso è anch'essa limitata. Consideriamo allora come ingresso limitato il seguente segnale:

$$x(\tau) = \mathrm{sgn}[h(t_1 - \tau)]$$

Si tratta cioè del segnale che, in ogni istante τ, fornisce il segno (cioè +1 o -1) del segnale $h(\tau)$ all'istante t_1-τ. La risposta a tale segnale sarà

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sgn}[h(t_1 - \tau)]h(t-\tau)d\tau$$

Valutiamo in particolare questa risposta per $t=t_1$:

$$y(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sgn}[h(t_1 - \tau)]h(t_1-\tau)d\tau$$

La funzione integranda è costituita dal prodotto della funzione $h(t_1 - \tau)$ per il suo segno: tale prodotto è evidentemente uguale al modulo della funzione stessa, per cui

$$y(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t_1 - \tau)| d\tau$$

Ora supponiamo per assurdo che la tesi non sia vera, ossia che, nonostante il sistema sia stabile, la funzione h(t) non sia assolutamente integrabile: ciò significa che il valore dell'ultimo integrale ricavato non è finito, ossia che non è finito nemmeno il valore di $y(t_1)$. Ma $y(t_1)$ è il valore della risposta, valutata all'istante t_1, all'ingresso x(t): dato che stiamo supponendo che il sistema sia stabile e che x(t) sia un ingresso limitato, $y(t_1)$ NON può essere infinito, per cui la tesi deve essere necessariamente vera.

CASO DISCRETO

Il teorema appena dimostrato per il caso continuo, vale anche per quello discreto:

Teorema - *Un sistema discreto (lineare tempo-invariante) è stabile SE E SOLO SE la risposta all'impulso h(nT) è una funzione assolutamente sommabile*

Detto in altri termini, condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema discreto sia stabile è che valga la relazione

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(nT)| < \infty$$

Dimostrazione

Dimostriamo anche questo risultato, partendo dalla seconda implicazione: supponiamo cioè che il sistema sia lineare tempo-invariante, che h(nT) sia assolutamente sommabile e che l'ingresso x(nT) applicato al sistema sia limitato e facciamo vedere che anche y(nT), risposta del sistema, è limitata.

Si parte anche qui dalla relazione

$$y(nT) = x(nT) * h(nT) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Tx(mT)h(nT - mT)$$

Passando ai moduli si ha che

$$|y(nT)| = \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Tx(mT)h(nT - mT) \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |Tx(mT)h(nT - mT)| \leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T|x(mT)||h(nT - mT)|$$

Ora, dire che l'ingresso x(nT) è limitato significa dire che $|x(nT)| \leq M \quad \forall n$, per cui abbiamo che

$$|y(nT)| \leq M \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T|h(nT - mT)|$$

Essendo M un numero reale positivo e avendo supposto che h(nT) è assolutamente sommabile, è chiaro che anche y(nT) risulta limitata, ossia $|y(nT)| \leq M'$.

Passiamo adesso alla implicazione inversa: nell'ipotesi che il sistema sia stabile, dobbiamo far vedere che la risposta all'impulso è assolutamente integrabile.

Supporre il sistema stabile significa dire che, dato un qualsiasi ingresso limitato, la risposta a tale ingresso è anch'essa limitata. Consideriamo allora come ingresso limitato il seguente segnale:

$$x(nT) = \mathrm{sgn}[h(-nT)]$$

La risposta a tale segnale sarà

$$y(nT) = x(nT) * h(nT) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Tx(mT)h(nT - mT) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T\,\mathrm{sgn}[h(-mT)]h(nT - mT)$$

Valutiamo in particolare questa risposta per n=0:

$$y(0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T\,\mathrm{sgn}[h(-mT)]h(-mT)$$

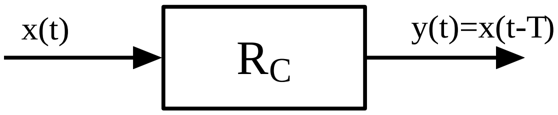
La funzione all'interno della sommatoria è costituita dal prodotto di una funzione per il suo segno, per cui è pari ancora una volta al modulo della funzione stessa: quindi

$$y(0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T|h(-mT)|$$

A questo punto, in modo analogo a quanto fatto nel caso continuo, supponiamo per assurdo che la tesi non sia vera, ossia che, nonostante il sistema sia stabile, la funzione h(nT) non sia assolutamente sommabile: ciò significa che il valore di quella sommatoria non è finito, ossia che non è finito nemmeno il valore di y(0). Ma y(0) è il valore della risposta, valutata all'istante t=0, all'ingresso x(nT): dato che stiamo supponendo che il sistema sia stabile e che x(nT) sia un ingresso limitato, y(0) NON può essere infinito, per cui la tesi deve essere necessariamente vera.

ESEMPIO: RITARDO

Esaminiamo adesso alcuni esempi di sistemi stabili e altri di sistemi non stabili. Il primo che consideriamo è il sistema continuo che abbiamo denominato "ritardo puro":



Questo sistema (che sappiamo essere lineare tempo-invariante) riceve dunque in ingresso il segnale x(t) e fornisce in uscita lo stesso segnale, ma traslato di una quantità T (>0). Vediamo quanto vale la risposta impulsiva di questo segnale, cioè la risposta fornita dal sistema quando in ingresso c'è l'impulso unitario: è ovvio che

$$h(t) = x(t-T) = \delta(t-T)$$

Vediamo allora se h(t) è assolutamente integrabile, al fine di stabilire se il sistema è stabile o meno:

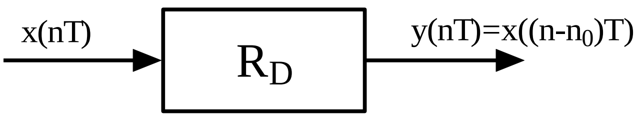
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(t-T)| dt$$

In base ad una nota proprietà della funzione δ(t), si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(t-T)| dt = 1$$

il che ci dice che, effettivamente, il nostro sistema è stabile.

E' intuitivo immaginare come anche il ritardo nel caso discreto sia un sistema stabile: in questo caso, il sistema è



La sua risposta impulsiva è

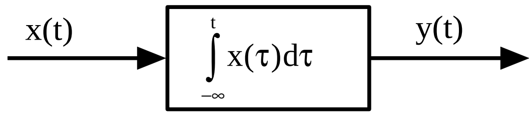
$$h(nT) = x(nT - n_0 T) = \delta(nT - n_0 T)$$

e, in base ad una proprietà della funzione impulso nel caso discreto, si ha che

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(nT)| = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\delta(nT - n_0 T)| = 1$$

ESEMPIO: INTEGRATORE

Un altro sistema lineare tempo-invariante esaminato in precedenza è l'integratore:



La relazione tra ingresso ed uscita è $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$.

Valutiamo anche qui la risposta impulsiva: per definizione, abbiamo intanto che

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

La funzione integranda è l'impulso unitario applicato in τ=0; allora, in base alle proprietà della funzione $\delta(t)$, quell'integrale vale 0 quando t<0 mentre vale 1 quando t≥0:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Si nota dunque che h(t) risulta essere il gradino unitario u(t), che è evidentemente una funzione NON assolutamente integrabile. Di conseguenza, l'integratore NON è un sistema stabile: se noi applichiamo un ingresso limitato, è possibile che l'uscita non sia limitata.

Sistemi causali

DEFINIZIONE

La definizione di **sistema causale** è stata già data: un sistema continuo è causale quando, dato l'ingresso x(t) , il valore della risposta all'istante t dipende SOLO dai valori di x(t) compresi nell'intervallo di tempo]-∞,t] (analoga definizione per i sistemi discreti). Al pari di quanto fatto per la stabilità, vediamo anche qui quali vincoli la causalità impone sulla risposta impulsiva. Ovviamente, supponiamo che i sistemi considerati siano lineari tempo-invarianti.

CASO CONTINUO

Cominciamo dal caso continuo, per cui partiamo dalla relazione generale

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Per definizione di causalità, y(t) non può dipendere dai valori di x(t) successivi all'istante t, per cui l'estremo superiore di integrazione non può che essere t:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Quindi, la causalità impone che valga la relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Quando accade questo?. L'integrale a primo membro può essere spezzato in due pezzi nel modo seguente:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{t}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Da qui si ricava evidentemente che

$$\int_{t}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$$

ossia che questa è la condizione cui deve soddisfare $h(\tau)$ quando il sistema è causale. Ora, quell'integrale risulta certamente nullo quando $h(t-\tau) = 0 \qquad \tau > t$, ossia, anche, quando

$$h(t-\tau) = 0 \qquad t - \tau < 0$$

ossia anche, ponendo α=t-τ, quando

$$\boxed{h(\alpha) = 0 \qquad \alpha < 0}$$

Quindi, abbiamo trovato che *un sistema è certamente causale se la sua funzione di risposta all'impulso è nulla negli istanti precedenti allo zero.*

CASO DISCRETO

Il discorso è analogo nel caso discreto. La relazione generale è

$$y(nT) = x(nT) * h(nT) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Tx(mT)h(nT - mT)$$

Il sistema è causale se l'estremo superiore della sommatoria diventa n, ossia se accade che

$$\sum_{m=n}^{+\infty} Tx(mT)h(nT - mT) = 0$$

ossia se $h(nT-mT)=0 \quad m>n+1$, ossia, infine, ponendo k=n-m, se

$$\boxed{h(kT)=0 \qquad k<0}$$

In base a questa relazione, ci sono alcune importanti definizioni circa i sistemi discreti:

- quando esiste solo un numero finito di valori di k per i quali h(kT)≠0, il sistema (discreto) si dice di tipo "**FIR**";
- quando, invece, esistono infiniti valori di k per cui h(kT)≠0, il sistema si dice di tipo "**IIR**".

Sistemi FIR causali

Consideriamo in particolare un sistema discreto (lineare tempo-invariante), di tipo FIR che sia anche causale. Dire che il sistema è causale significa dire che

$$h(kT)=0 \qquad k<0$$

Dire, poi, che è di tipo FIR significa dire che quei pochi valori di k per i quali h(kT)≠0 sono tutti positivi.

In base alla causalità, possiamo dunque scrivere che

$$y(nT)=x(nT)*h(nT)=\sum_{m=-\infty}^{t} Tx(mT)h(nT-mT)$$

Sviluppiamo questa sommatoria:

$$y(nT)=...+\underbrace{Tx(-2T)h(nT+2T)}_{m=-2}+\underbrace{Tx(-T)h(nT+T)}_{m=-1}+\underbrace{Tx(0)h(nT)}_{m=0}+\underbrace{Tx(T)h(nT-T)}_{m=1}+\underbrace{Tx(2T)h(nT-2T)}_{m=2}+...$$

Essendo il sistema di tipo FIR, supponiamo che il numero di valori (positivi) di k per i quali h(kT)≠0 sia L e, in particolare, supponiamo che

$$\begin{aligned} &h(0T)=\alpha_0\\ &h(1T)=\alpha_1\\ &h(2T)=\alpha_2\\ &\dots\\ &h(Lt)=\alpha_L \end{aligned}$$

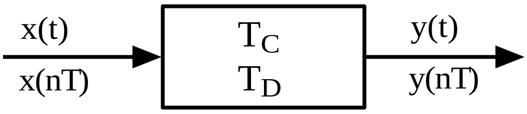
Sulla base di ciò, è ovvio che y(nT) sarà la somma di un numero finito di termini, che sono quelli in cui la funzione h non risulta nulla: quindi

$$y(nT)=\underbrace{Tx(nT)h(0T)}_{m=n}+\underbrace{Tx\big((n-1)T\big)h(1T)}_{m=n-1}+...\underbrace{Tx\big((n-L)T\big)h(LT)}_{m=n-L}$$

Funzione risposta in frequenza

CASO CONTINUO

Consideriamo un sistema lineare tempo-invariante generico:



In particolare, per il momento esaminiamo il caso continuo, riservando per dopo quello discreto. Applichiamo in ingresso al nostro sistema il segnale esponenziale $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$. Valutiamo la risposta del sistema:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j2\pi f_0 (t-\tau)}d\tau$$

Il termine esponenziale può essere scisso in due termini, per cui si ha che

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\left[e^{j2\pi f_0 t}e^{-j2\pi f_0 \tau}\right]d\tau = e^{j2\pi f_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau}d\tau$$

Il termini portato fuori dall’integrale non è altro che il nostro ingresso x(t); l’integrale rimasto, invece, non è che la trasformata di Fourier della funzione risposta all’impulso h(t), calcolata nella specifica frequenza f_0: indicandola allora con $H(f_0)$, possiamo dunque concludere che

$$\boxed{y(t) = x(t)H(f_0)}$$

Questa relazione ci dice che, *dato un generico sistema lineare tempo-invariante, i segnali esponenziali non vengono da esso modificati, salvo la presenza di un fattore moltiplicativo $H(f_0)$.*

Alla funzione H(f) si dà il nome di “**risposta in frequenza**” o “**funzione di trasferimento**” del sistema. Vediamo nel dettaglio come si può definire questa funzione.

Per farlo, consideriamo la relazione $y(t) = x(t) * h(t)$. Se trasformiamo ambo i membri secondo Fourier, ricordando che la trasformata di un prodotto di convoluzione è pari al prodotto delle trasformate, abbiamo evidentemente che $Y(f) = X(f)H(f)$,da cui

$$\boxed{H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}}$$

Quindi, *la risposta in frequenza di un sistema è la trasformata di Fourier della funzione risposta all'impulso e può essere ricavata come rapporto tra la trasformata dell'uscita e la trasformata dell'ingresso.*

Ovviamente, si tratta di una caratteristica del sistema, indipendente cioè dall'ingresso.

CASO DISCRETO

Esaminiamo adesso il caso discreto. Come ingresso al nostro sistema (lineare tempo-invariante), applichiamo il segnale esponenziale $x(nT) = e^{j2\pi f_0 nT}$. La risposta del sistema è

$$y(nT) = x(nT) * h(nT) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Tx(mT)h(nT-mT) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Th(mT)x(nT-mT) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Th(mT)e^{j2\pi f_0 (n-m)T} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Th(mT)e^{j2\pi f_0 nT}e^{-j2\pi f_0 mT} = e^{j2\pi f_0 nT}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} Th(mT)e^{-j2\pi f_0 mT} = x(nT)\sum_{m=-\infty}^{+\infty} Th(mT)e^{-j2\pi f_0 mT}$$

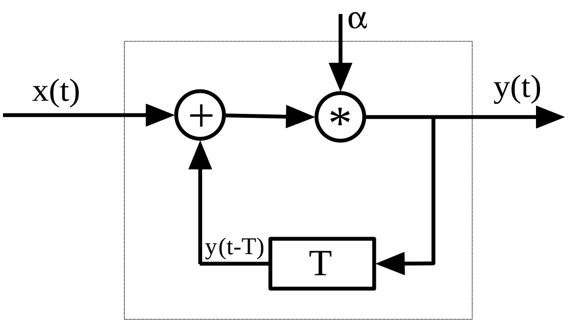
Abbiamo trovato che y(nT) è il prodotto di x(nT) per un fattore costante (quella sommatoria non presenta termini variabili, per cui è un numero). A tale fattore costante, come vedremo meglio nel seguito, si dà il nome di "*trasformata di Fourier, discreta, del segnale h(t)*", calcolata ovviamente per $f=f_0$.

Anche in questo caso, dunque, abbiamo trovato che

$$\boxed{y(nT) = x(nT)H(f_0)}$$

ESEMPIO: SISTEMA IN RETROAZIONE

Consideriamo il sistema schematizzato nella figura seguente:



Vediamo intanto quale effetto ha il sistema sull'ingresso x(t): la prima cosa è la moltiplicazione di x(t) per una costante α; si produce così il segnale $y(t) = \alpha x(t)$. Questo segnale, che già costituirebbe l'uscita, viene prelevato e subisce un ritardo, ossia una traslazione di una quantità T; si produce perciò il segnale $y(t-T)$. Questo segnale viene sommato nuovamente all'ingresso, per cui si produce il segnale $y(t-T)+x(t)$. Infine, c'è un'ultima moltiplicazione per α, per cui l'uscita del sistema si può esprimere nella forma

$$y(t) = \alpha y(t-T) + \alpha x(t)$$

*Uno schema di questo tipo prende il nome di "**sistema in retroazione**" in quanto l'uscita viene riportata in ingresso e quindi, si potrebbe dire, "contribuisce a modificare se stessa".*

Di questo sistema, nell'ipotesi che sia lineare tempo-invariante, ci interessano la risposta all'impulso h(t) e la risposta in frequenza H(f). Ovviamente, ci basterà determinare una delle due funzioni e poi ricavare l'altra trasformando o antitrasformando secondo Fourier.

Per prima cosa, esprimiamo in modo per noi più conveniente la y(t): infatti, in base alla espressione $y(t)=\alpha y(t-T)+\alpha x(t)$ prima trovata, è chiaro che

$$y(t-T)=\alpha y(t-2T)+\alpha x(t-T)$$

per cui possiamo scrivere che

$$y(t)=\alpha[\alpha y(t-2T)+\alpha x(t-T)]+\alpha x(t)=\alpha^2 y(t-2T)+\alpha^2 x(t-T)+\alpha x(t)$$

Facendo lo stesso discorso per y(t-2T) abbiamo che

$$y(t-2T)=\alpha y(t-3T)+\alpha x(t-2T)$$

e quindi

$$y(t)=\alpha^2[\alpha y(t-3T)+\alpha x(t-2T)]+\alpha^2 x(t-T)+\alpha x(t)=\alpha^3 y(t-3T)+\alpha^3 x(t-2T)+\alpha^2 x(t-T)+\alpha x(t)$$

Procedendo in modo ricorsivo, per N termini abbiamo che

$$y(t)=\alpha^{n+1}y\big(t-(N+1)T\big)+\alpha x(t)+\sum_{n=1}^{N}\alpha^{n+1}x(t-nT)$$

Il termine $\alpha x(t)$ può anche essere inglobato nella sommatoria, per cui abbiamo che

$$y(t)=\alpha^{n+1}y\big(t-(N+1)T\big)+\sum_{n=0}^{N}\alpha^{n+1}x(t-nT)$$

A questo punto, facciamo l'ipotesi che il segnale y(t) sia ad energia finita: questa ipotesi implica, almeno a livello intuitivo, che il valore dell'uscita, per $t\to\infty$, tenda ad annullarsi, ossia

$$y(t)\xrightarrow{t\to\infty}0$$

e che quindi il sistema risulti stabile.

In particolare, se $y(\infty)\to 0$, possiamo esprimere la nostra uscita mediante l'espressione

$$\boxed{y(t)=\alpha\sum_{n=0}^{N}\alpha^{n}x(t-nT)}$$

A partire da questa espressione, siamo in grado di valutare la risposta impulsiva, ossia la risposta h(t) quando in ingresso è applicato l'impulso unitario $\delta(t)$:

$$h(t) = \alpha \sum_{n=0}^{N} \alpha^n \delta(t - nT)$$

Mediante una operazione di trasformazione secondo Fourier, possiamo anche ottenere la risposta in frequenza:

$$H(f) = \text{Fourier}\left[\alpha \sum_{n=0}^{N} \alpha^n \delta(t - nT)\right] = \alpha \sum_{n=0}^{N} \alpha^n \text{Fourier}[\delta(t - nT)] = \alpha \sum_{n=0}^{N} \alpha^n e^{j2\pi fnT} =$$
$$= \alpha \sum_{n=0}^{N} \left(\alpha e^{j2\pi fT}\right)^n$$

Nel caso in cui $|\alpha|<1$, quella sommatoria non è altro che la serie geometrica di ragione $\alpha e^{j2\pi fT}$, per cui concludiamo che

$$H(f) = \frac{1}{1 - \alpha e^{j2\pi fT}} \alpha$$

A questo stesso risultato noi possiamo arrivare in modo molto più rigoroso: mentre prima, per arrivare all'espressione di h(t), abbiamo ragionato esclusivamente nel dominio del tempo, possiamo provare a ragionare nel dominio della frequenza. Infatti, a partire dalla relazione

$$y(t) = \alpha y(t - T) + \alpha x(t)$$

operando una trasformazione di Fourier di entrambi i membri, abbiamo che

$$Y(f) = \alpha Y(f) e^{-j2\pi fT} + \alpha X(f)$$

da cui si ricava che

$$\left(1 - \alpha e^{-j2\pi fT}\right) Y(f) = \alpha X(f)$$

La risposta in frequenza è definita come rapporto tra Y(f) e X(f), per cui otteniamo nuovamente

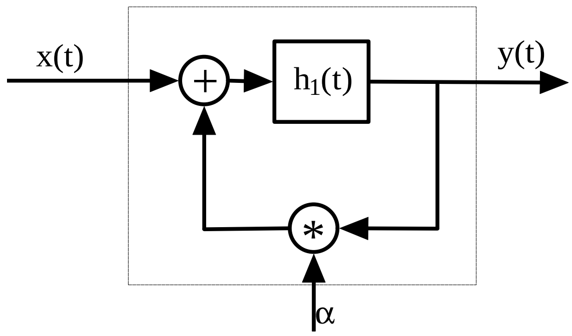
$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 - \alpha e^{j2\pi fT}} \alpha$$

Per ottenere h(t) dobbiamo antitrasformare H(f):

$$h(t) = \text{Fourier}^{-1}\left[\frac{1}{1 - \alpha e^{j2\pi fT}} \alpha\right] = \alpha \text{Fourier}^{-1}\left[\frac{1}{1 - \alpha e^{j2\pi fT}}\right] = \alpha \text{Fourier}^{-1}\left[\left(1 - \alpha e^{j2\pi fT}\right)^{-1}\right] = \ldots.$$

ESEMPIO: SISTEMA PASSA-BASSO

Consideriamo il sistema seguente:



Vogliamo la risposta all’impulso h(t) e quella in frequenza H(f) del nostro sistema, nell’ipotesi, ovviamente, che esso sia lineare tempo-invariante.

Per prima cosa esaminiamo quale azione esercita il nostro sistema sul segnale in ingresso: la prima azione è quella esercitata dal “sottosistema 1”, la cui risposta all’impulso è stata indicata con $h_1(t)$. All’uscita di questo sottosistema, noi otteniamo il segnale $y(t)=x(t)*h_1(t)$. Trattandosi di uno schema in retroazione, questo segnale passa per il moltiplicatore e diventa $\alpha y(t)$. Successivamente, esso viene sommato all’ingresso, in modo da ottenere il segnale $\alpha y(t)+x(t)$ ed entra nuovamente nel sottosistema 1, in modo che il segnale in uscita sia infine

$$y(t)=\left[\alpha y(t)+x(t)\right]*h_1(t)$$

Per trovare h(t) e H(f), ci conviene evidentemente lavorare nel dominio della frequenza, ossia trovare H(f) e poi antitrasformare per ottenere h(t). Allora, trasformando secondo Fourier ambo i membri di quella relazione abbiamo che

$$\begin{aligned}Y(f)&=\text{Fourier}\left[\left[\alpha y(t)+x(t)\right]*h_1(t)\right]=\text{Fourier}\left[\alpha y(t)*h_1(t)+x(t)*h_1(t)\right]=\\&=\text{Fourier}\left[\alpha y(t)*h_1(t)\right]+\text{Fourier}\left[x(t)*h_1(t)\right]=\alpha Y(f)H_1(f)+X(f)H_1(f)\end{aligned}$$

Da qui si ottiene che

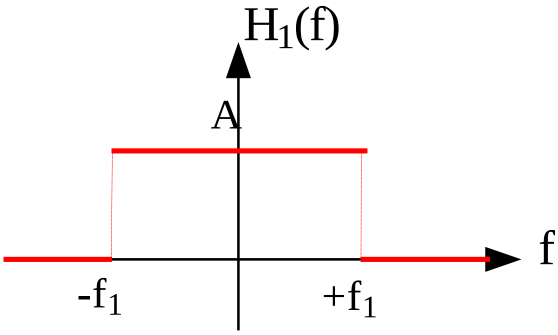
$$Y(f)=\frac{X(f)H_1(f)}{1-\alpha H_1(f)}$$

e quindi anche che

$$H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=\frac{H_1(f)}{1-\alpha H_1(f)}$$

Quindi, se è nota la risposta in frequenza del sottosistema 1, siamo in grado di conoscere H(f) e, antitrasformando, anche h(t).

Per esempio, supponiamo che $H_1(f)$ sia la funzione seguente:



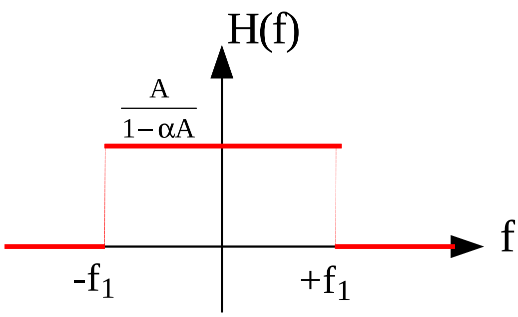
Analiticamente, la possiamo esprimere nel modo seguente:

$$H_1(f) = \begin{cases} A & f \in [-f_1, +f_1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di conseguenza, la risposta in frequenza del nostro sistema è

$$H(f) = \frac{A}{1-\alpha A} \qquad |f| < f_1$$

e si tratta perciò di un altro rettangolo:



Da un punto di vista pratico, l'effetto del sistema è dunque quello di lasciar passare, dato l'ingresso, solo le frequenze comprese tra $-f_1$ e $+f_1$ e di azzerare tutte le altre. Ecco perché questo sistema prende il nome di **sistema passa-basso**.

Nota H(f), possiamo calcolarci h(t) antitrasformando:

$$h(t) = \text{Fourier}^{-1}\left[\frac{A}{1-\alpha A}\text{rect}\left(\frac{f}{2f_1}\right)\right] = \frac{A}{1-\alpha A}2f_1\text{sinc}(2f_1 t)$$

Realizzabilità di un sistema lineare tempo-invariante

Sulla base di questo esempio possiamo dare due definizioni interessanti:

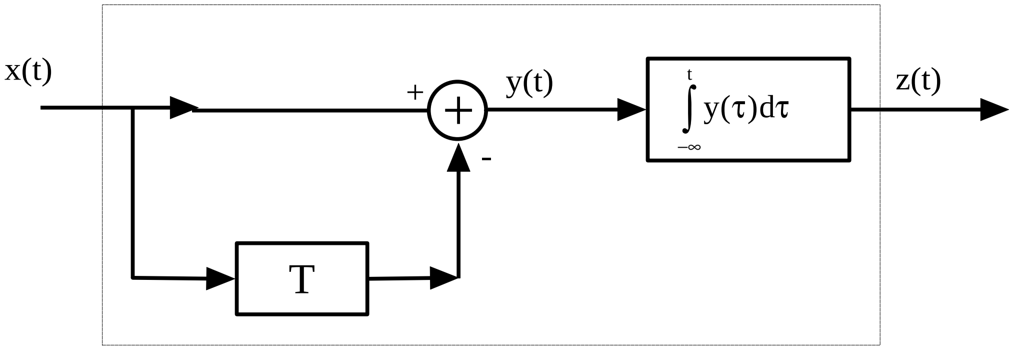
- quando la funzione risposta all'impulso h(t) è una funzione reale, si dice che il sistema è "**idealmente realizzabile**";

- quando, invece, h(t) risulta reale e anche CAUSALE, allora si dice che il sistema è “**fisicamente realizzabile**”.

Nell’esempio di prima, h(t) è una funzione “sinc” per cui è senz’altro reale. Tuttavia, essendo il “sinc” una funzione periodica, h(t) non è una funzione causale, per cui il nostro sistema è solo idealmente realizzabile.

ESEMPIO

Consideriamo il sistema rappresentato in figura:



Abbiamo dunque un sistema costituito da due distinti blocchi: in ingresso al primo blocco c’è l’ingresso x(t) del sistema complessivo; in uscita dal primo blocco c’è il segnale y(t) che va in ingresso al secondo blocco (che è un integratore) e l’uscita z(t) di questo secondo blocco è anche l’uscita del sistema complessivo. Di quest’ultimo vogliamo conoscere la risposta in frequenza H(f).

Abbiamo due modi di procedere:

- il primo modo è quello di <u>lavorare nel dominio del tempo</u>, cioè di trovare quanto vale la risposta impulsiva h(t) e poi di trasformarla secondo Fourier;

- il secondo modo è invece quello di <u>lavorare nel dominio della frequenza</u>, utilizzando la linearità della trasformata di Fourier.

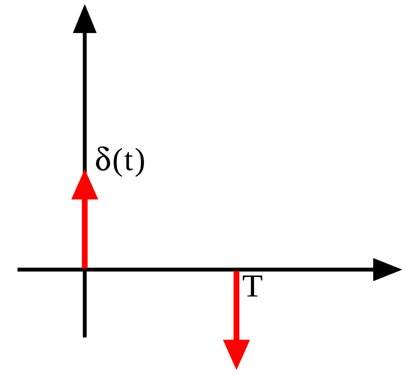
Vediamo entrambi i metodi a cominciare dal primo. Per prima cosa, vediamo come è fatta l’uscita z(t) del nostro sistema: l’ingresso x(t) viene subisce, nel primo blocco, un ritardo e viene poi sottratto da se stesso per dare y(t), per cui abbiamo che $y(t) = x(t) - x(t - T)$. Successivamente, y(t) passa semplicemente per l’integratore, per cui possiamo concludere che l’uscita del nostro sistema, in corrispondenza del generico ingresso x(t), vale

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} [x(\tau) - x(\tau - T)] d\tau$$

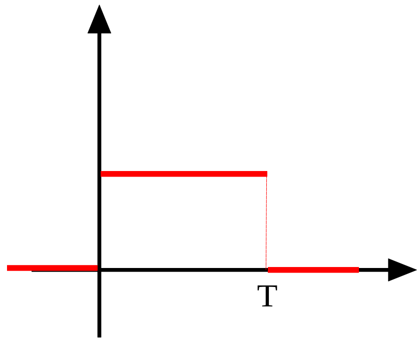
La risposta impulsiva è, per definizione, la risposta del sistema quando in ingresso viene applicato all’impulso: ponendo allora x(t)=δ(t) e z(t)=h(t), abbiamo che

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} [\delta(\tau) - \delta(\tau - T)] d\tau$$

Questo integrale può essere risolto per via grafica; infatti, la funzione integranda può essere interpretata come il seguente segnale:



Calcolarne l'integrale tra -∞ e t significa considerarne il segnale integrato ossia, in altre parole, il segnale che, derivato, dà quei due impulsi. E' facile allora verificare che tale segnale derivato è il seguente:



Infatti esso vale 0 per t<0 e t>T; in t=0 passa repentinamente da 0 a 1, da cui l'impulso unitario del segnale derivato; poi si mantiene costante, per cui il segnale derivato è zero; infine in t=T ritorna bruscamente a zero, da cui l'impulso unitario negativo del segnale derivato.

Il nostro h(t) è dunque l'ultimo segnale disegnato, ossia un rettangolo di altezza 1 e base T, traslato di +T/2:

$$h(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$

Se questa è la risposta all'impulso, la sua trasformata è la risposta in frequenza:

$$H(f) = \mathrm{Fourier}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)\right] = T\mathrm{sinc}(fT)e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} = T\mathrm{sinc}(fT)e^{-j\pi fT}$$

L'altra strada per arrivare a questo risultato era lavorare in frequenza e considerare le funzioni di risposta in frequenza dei singoli blocchi di cui si compone il nostro sistema: infatti, se l'uscita y(t) del primo blocco in corrispondenza del generico ingresso x(t) è data da $y(t) = x(t) - x(t-T)$, la sua trasformata è

$$Y(f) = X(f) - X(f)e^{-j2\pi fT}$$

Questa uscita y(t) passa attraverso l'integratore: nel dominio della frequenza, questo equivale a moltiplicare Y(f) per il termine $1/j2\pi f$, per cui

$$Z(f)=\frac{X(f)-X(f)e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f}$$

Infine, applicando la definizione di risposta in frequenza abbiamo che

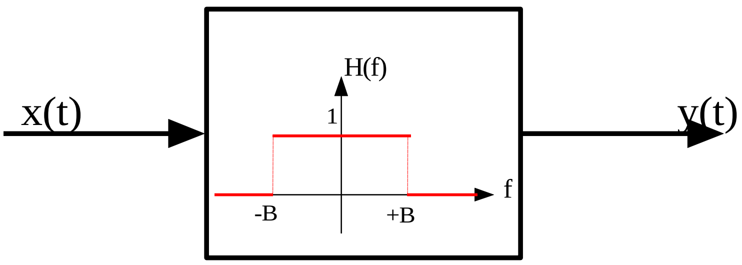
$$H(f)=\frac{Z(f)}{X(f)}=\frac{1-e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f}$$

Questa può essere opportunamente manipolata:

$$H(f)=e^{-j\pi fT}\frac{e^{j\pi fT}-e^{-j\pi fT}}{j2\pi f}=\frac{e^{-j\pi fT}}{\pi f}\frac{e^{j\pi fT}-e^{-j\pi fT}}{2j}=\frac{e^{-j\pi fT}}{\pi f}\sin(\pi fT)=\frac{Te^{j\pi fT}}{T\pi f}\sin(\pi fT)=$$
$$=Te^{j\pi fT}\operatorname{sinc}(fT)$$

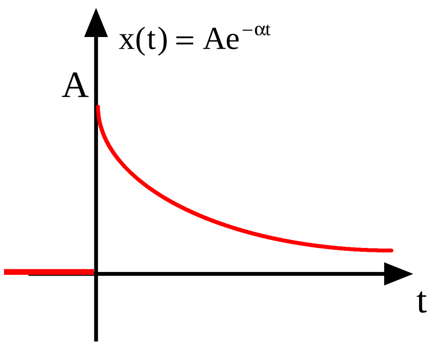
ESEMPIO: FILTRO PASSA-BASSO PERFETTO

Consideriamo il seguente sistema lineare tempo-invariante:



Questo sistema prende il nome di "**filtro passa-basso perfetto**" in quanto ha l'effetto di lasciar passare il segnale in ingresso inalterato, ma solo entro un intervallo di frequenza prestabilito, che in questo caso è [-B,+B].

Supponiamo allora di applicare in ingresso il segnale esponenziale



Ci poniamo il problema di determinare il valore della banda B della risposta in frequenza affinché il segnale in uscita y(t) abbia il 90% dell'energia del segnale in ingresso x(t).

Il primo passo è ovviamente quello di determinare quanto vale l'energia del segnale in ingresso: applicando semplicemente la definizione di energia abbiamo che

$$E_X = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Sostituendo l'espressione di x(t) e considerando che esso è nullo per t<0, abbiamo che

$$E_X = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|Ae^{-\alpha t}\right|^2 dt = \int_{0}^{+\infty} Ae^{-2\alpha t} dt = -\frac{A}{2\alpha}\int_{0}^{+\infty} (-2\alpha)e^{-2\alpha t} dt = -\frac{1}{2\alpha}\left[e^{-2\alpha t}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{e^{2\alpha t}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\alpha}$$

Quindi, a noi serve determinare il valore B tale che l'energia del segnale in uscita sia pari a $0.9/2\alpha$.

Per calcolare l'energia del segnale in uscita dobbiamo conoscerne l'espressione, in modo da poter applicare anche lì la formula

$$E_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt$$

Tuttavia, dato che conosciamo l'ingresso x(t) e conosciamo la funzione di risposta in frequenza H(f), è più conveniente calcolare Y(f) e poi applicare la formula

$$E_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df$$

Ricordando che Y(f) può essere espressa mediante la relazione $Y(f) = H(f)X(f)$, è ovvio che ci serve X(f). Applicando semplicemente la definizione di trasformata di Fourier, abbiamo i seguenti passaggi:

$$X(f) = \text{Fourier}\left[Ae^{-\alpha t}\right] = A\text{Fourier}\left[e^{-\alpha t}\right] = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-j2\pi ft} dt = A\int_{-0}^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-j2\pi ft} dt = A\int_{-0}^{+\infty} e^{-(\alpha+j2\pi f)t} dt =$$

$$= A\frac{1}{-(\alpha+j2\pi f)}\int_{-\infty}^{+\infty} D\left[e^{-(\alpha+j2\pi f)t}\right]dt = \frac{A}{-(\alpha+j2\pi f)}\left[e^{-(\alpha+j2\pi f)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{A}{j2\pi f+\alpha}$$

A questo punto, possiamo calcolarci l'energia del segnale y(t): abbiamo detto che la formula da applicare è

$$E_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)H(f)|^2 df$$

Sostituendo l'espressione di X(f) e considerando che la funzione di H(f), che è un rettangolo, è solo quella di limitare gli estremi di integrazione, abbiamo che

$$E_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| H(f) \frac{A}{j2\pi f + \alpha} \right|^2 df = \int_{-B}^{+B} \left| \frac{A}{j2\pi f + \alpha} \right|^2 df = A^2 \int_{-B}^{+B} \frac{1}{\left| j2\pi f + \alpha \right|^2} df = A^2 \int_{-B}^{+B} \frac{1}{(2\pi f)^2 + \alpha^2} df$$

A questo punto, per comodità poniamo w=2πf: otteniamo

$$E_Y = A^2 \int_{-2\pi B}^{+2\pi B} \frac{1}{w^2 + \alpha^2} dw = A^2 \int_{-2\pi B}^{+2\pi B} \left(\frac{\frac{1}{w^2}}{1 + \frac{\alpha^2}{w^2}} \right) dw$$

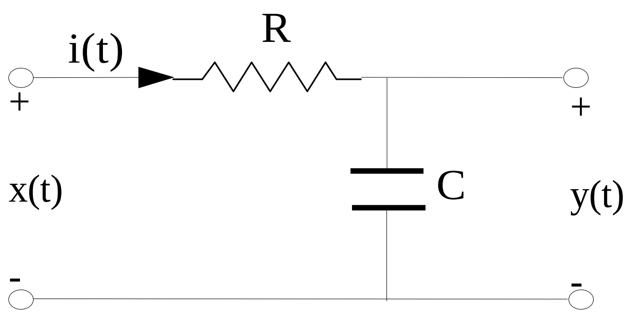
Quello è un integrale immediato e dà

$$E_Y = A^2 \left[\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{w} \right]_{-2\pi B}^{+2\pi B} = A^2 \left[\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2\pi B} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2\pi B} \right]$$

Imponendo adesso che $E_X=0.9/2\alpha$, si trova il valore richiesto di B.

ESERCIZIO

Consideriamo il sistema seguente:



Abbiamo dunque un semplice circuito in cui in ingresso c’è una tensione x(t) e, come uscita y(t), viene considerata la tensione ai capi del condensatore. Vogliamo conoscere la funzione di risposta all’impulso h(t).

In primo luogo, osserviamo che parlare di risposta all’impulso presuppone che il sistema sia lineare tempo-invariante: questo è effettivamente vero in quanto nel circuito compaiono un resistore ed un condensatore entrambi lineari e tempo-invarianti.

Il problema della determinazione di h(t) può essere facilmente risolto servendosi proprio della trasformata di Fourier, ossia, in definitiva, trovando la risposta in frequenza H(f) e poi antitrasformandola.

La prima cosa da fare è individuare quale legame intercorre, nel dominio del tempo, tra ingresso x(t) e uscita y(t). Lo possiamo fare semplicemente applicando la legge di Kirchoff delle tensioni e le relazioni di lato di resistore e condensatore. In base alla LKT (applicata in senso antiorario) abbiamo che

$$x(t) - y(t) - V_R(t) = 0$$

In base alla relazione di lato del resistore, abbiamo che

$$x(t)-y(t)-Ri(t)=0$$

da cui, esplicitando la corrente, si ha che

$$i(t)=\frac{x(t)-y(t)}{R}$$

Adesso, la relazione di lato del condensatore dice che

$$i(t)=C\frac{dV_C(t)}{dt}=C\frac{dy(t)}{dt}$$

per cui, eguagliando i secondi membri delle due espressioni trovate per i(t), otteniamo

$$\frac{x(t)-y(t)}{R}=C\frac{dy(t)}{dt}$$

Esplicitando la x(t) si ottiene quindi

$$x(t)=RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)$$

Questa è una equazione differenziale nella incognita y(t). Allora, se poniamo $x(t)=\delta(t)$ e la risolviamo, troviamo proprio la h(t). Tuttavia, nonostante la risoluzione dell'equazione non sia complicata, possiamo fare molto più in fretta lavorando nel dominio della frequenza: infatti, se trasformiamo secondo Fourier ambo i membri di quella equazione (usando il teorema di derivazione nel tempo) otteniamo che

$$X(f)=RC(j2\pi f)Y(f)+Y(f)$$

da cui

$$H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=\frac{1}{1+j2\pi RCf}$$

Nota la risposta in frequenza, dobbiamo antitrasformarla per ottenere h(t). Come si antitrasforma quella funzione? Ci basta ricordare di un risultato trovato in precedenza e precisamente che

$$\text{Fourier}\left[e^{-at}\right]=\frac{1}{a+j2\pi f}$$

Se, al denominatore a secondo membro mettiamo in evidenza *a*, otteniamo

$$\text{Fourier}\left[e^{-at}\right]=\frac{1}{a}\frac{1}{1+j\frac{2\pi f}{a}}$$

e quindi anche che

$$\text{Fourier}\left[ae^{-at}\right] = \frac{1}{1 + j\dfrac{2\pi f}{a}}$$

Allora, ponendo $a = \dfrac{1}{RC}$, otteniamo

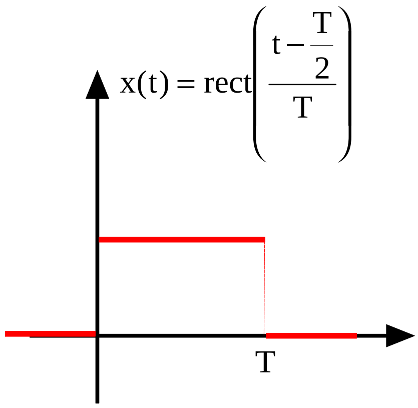
$$\text{Fourier}\left[\frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}\right] = \frac{1}{1 + jRC2\pi f}$$

ossia che l’antitrasformata di $H(f) = \dfrac{1}{1 + j2\pi RCf}$ è la funzione

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}}$$

che era ciò che andavamo cercando.

Adesso poniamoci un altro problema: nota h(t) (ossia note le caratteristiche del nostro sistema), vogliamo la risposta del sistema all’ingresso



Il problema è di immediata risoluzione in quanto sappiamo che vale la relazione $y(t) = x(t) * h(t)$, per cui

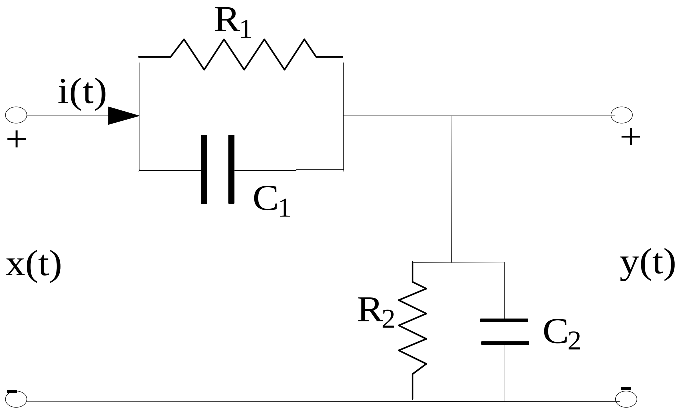
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

La funzione x(t) è un semplice rettangolo, il quale ha dunque il solo effetto di restringere l’intervallo di integrazione: quindi

$$y(t) = \int_0^T h(t-\tau)d\tau = \int_0^T \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} \int_0^T e^{\frac{1}{RC}\tau} d\tau = e^{-\frac{1}{RC}t} \int_0^T D\left[e^{\frac{1}{RC}\tau}\right] d\tau = \ldots = e^{-\frac{1}{RC}t}\left(e^{\frac{T}{RC}} - 1\right)$$

ESERCIZIO

Consideriamo adesso quest'altro circuito:



L'ingresso è la tensione x(t) e l'uscita y(t) è la tensione ai capi di C_2 e/o di R_2. Troviamo anche in questo caso la funzione di risposta all'impulso h(t).

Il metodo è lo stesso del caso precedente: applicando la LKT alla maglia di sinistra e le relazioni di lato di resistore e condensatore otteniamo che

$$i(t) = \frac{x(t)-y(t)}{R_1} + C_1 \frac{d}{dt}\left[x(t)-y(t)\right]$$

In modo analogo, per la maglia di destra otteniamo

$$i(t) = \frac{y(t)}{R_2} + C_2 \frac{dy(t)}{dt}$$

Eguagliando le due relazioni otteniamo

$$\frac{x(t)-y(t)}{R_1} + C_1 \frac{d}{dt}\left[x(t)-y(t)\right] = \frac{y(t)}{R_2} + C_2 \frac{dy(t)}{dt}$$

da cui

$$\frac{x(t)}{R_1} + C_1 \frac{dx(t)}{dt} = \frac{y(t)}{R_2} + C_2 \frac{dy(t)}{dt} + C_1 \frac{dy(t)}{dt} + \frac{y(t)}{R_1}$$

Trasformando secondo Fourier otteniamo

$$\left[\frac{1}{R_1} + C_1 (j2\pi f)\right] X(f) = \left[\frac{1}{R_2} + \left(C_2 + C_1\right) j2\pi f + \frac{1}{R_1}\right] Y(f)$$

e quindi

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\frac{1}{R_1} + C_1 (j2\pi f)}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + \left(C_2 + C_1\right) j2\pi f}$$

Filtro di Hilbert

DEFINIZIONE

Sappiamo che *un qualsiasi sistema lineare tempo-invariante può essere caratterizzato in modo estremamente completo mediante la sua funzione di risposta all'impulso h(t), o, equivalentemente, dalla sua funzione di trasferimento (*che è la trasformata di Fourier della funzione di risposta all'impulso). Consideriamo allora una particolare sistema avente la seguente funzione di trasferimento:

$$\boxed{H_H(f)=\begin{cases}-j & f>0\\ 0 & f=0\\ j & f<0\end{cases}}$$

Un sistema avente questa funzione di trasferimento prende il nome di **filtro di Hilbert** e ci apprestiamo a studiarne le caratteristiche.

La prima cosa che osserviamo è che la funzione $H_H(f)$ presenta una discontinuità nel punto f=0: per convenzione si pone =0 il valore della funzione in f=0, ma è bene ricordare che si tratta di una discontinuità e che, di conseguenza, alcuni dei risultati che ci apprestiamo a ricavare vanno presi un po' “con le pinze”.

RISPOSTA ALL'IMPULSO

Ricaviamo la funzione di risposta all'impulso h(t) del nostro sistema: sappiamo che

$$h_H(t)=\text{Fourier}^{-1}\left[H_H(f)\right]$$

per cui la prima cosa da fare è esprimere in modo per noi più comodo la $H_H(f)$. E' facile verificare che essa si può esprimere in due altri modi, del tutto equivalenti tra loro:

$$H_H(f)=-j\,\text{sgn}(f)=e^{-j\frac{\pi}{2}\text{sgn}(f)}$$

In particolare, prendiamo la prima espressione, che dobbiamo adesso antitrasformare. Per effettuare questa antitrasformata, utilizziamo due risultati precedentemente ricavati: il primo è la trasformata di Fourier del segnale sgn(t), che sappiamo essere

$$\text{Fourier}\left[\text{sgn}(t)\right]=\frac{1}{j\pi f}$$

L'altro è la proprietà di dualità, secondo la quale

$$s(t) \longleftrightarrow S(f)$$
$$S(t) \longleftrightarrow s(-f)$$

Nel nostro caso, l'applicazione della proprietà di dualità ci porta a dire che

$$\mathrm{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$
$$\frac{1}{j\pi t} \longleftrightarrow \mathrm{sgn}(-f)$$

Ricordando inoltre che la funzione "sgn" è una funzione dispari, abbiamo che

$$\frac{1}{j\pi t} \longleftrightarrow -\mathrm{sgn}(f)$$

Infine, portando il termine j al secondo membro, possiamo concludere che

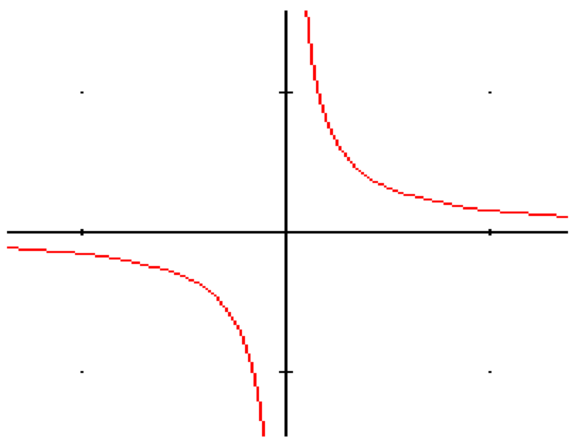
$$\frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow -j\,\mathrm{sgn}(f)$$

Dato, allora, che $H_H(f) = -j\mathrm{sgn}(f)$, deduciamo che

$$\boxed{h_H(t) = \frac{1}{\pi t}}$$

Questa funzione $h_H(t)$ presenta due caratteristiche importanti: essa è REALE ma non è causale, per cui sappiamo di poter affermare che questo sistema è solo IDEALMENTE REALIZZABILE, mentre non è possibile ottenerlo nella pratica.

Da un punto di vista grafico, la funzione $h_H(t)$ ha il seguente andamento:



TRASFORMATA DI HILBERT

Consideriamo adesso un generico segnale tempo-continuo s(t) e facciamo su di esso due ipotesi fondamentali:

1. la prima è che sia ad energia finita, il che significa che

$$E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \in R - \{0\}$$

2. la seconda è che sia ad area nulla (o anche a media nulla), ossia, in definitiva, che

$$S(f = 0) = 0$$

   dove S(f) è la trasformata di Fourier di s(t) (trasformata che sicuramente esiste data l’ipotesi di prima).

Adesso supponiamo che questo segnale venga posto in ingresso al filtro di Hilbert. Vogliamo valutare quanto vale la risposta y(t).

In base alla nota relazione $y(t) = s(t) * h_H(t)$, abbiamo che

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \frac{1}{\pi(t-\tau)} d\tau}$$

Il segnale y(t) così calcolato prende il nome di **trasformata di Hilbert del segnale s(t)**. In verità, è bene ricordare che <u>il termine “trasformata” è un po' improprio</u>: infatti, mentre con le trasformate classiche (Fourier e Laplace) il dominio di arrivo è diverso da quello di partenza, in questo caso si tratta sempre dello stesso dominio, quello del tempo. Ad ogni modo, viene usata questa espressione e il simbolo che si usa solitamente è $\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{t})$.

EFFETTO DEL FILTRO NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

Adesso facciamo lo stesso discorso di prima, cioè la determinazione della risposta del sistema, ma nel dominio della frequenza: la relazione da utilizzare è in questo caso $Y(f) = S(f)H_H(f)$. Per capire quale effetto abbia il filtro, ossia la funzione $H_H(f)$, sul segnale in ingresso, ossia S(f), valutiamo quanto valgono modulo e fase di $H_H(f)$: sapendo che

$$H_H(f) = \begin{cases} -j & f > 0 \\ 0 & f = 0 \\ j & f < 0 \end{cases}$$

è subito chiaro che

$$|H_H(f)| = 1 \qquad \forall f$$

Questo ci consente di dire subito che il filtro non ha alcun effetto sul modulo di S(f), ossia lo lascia inalterato.

Passiamo alla fase: ricordando che la fase del generico numero complesso z=x+jy è $\langle z = \text{arctg}\frac{y}{z}$, noi abbiamo che

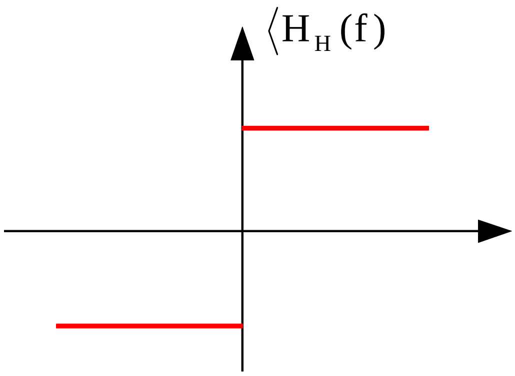
$$\langle H_H(f) = \begin{cases} \text{arctg}(-\infty) & f > 0 \\ \text{arctg}(+\infty) & f < 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\langle H_H(f) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & f > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & f < 0 \end{cases}$$

Da qui si deduce che *l'effetto del filtro è quello di lasciare inalterato il modulo del segnale in ingresso e di effettuare, di tale segnale, una rotazione di 90° in anticipo per le frequenze negative e in ritardo per quelle positive.*

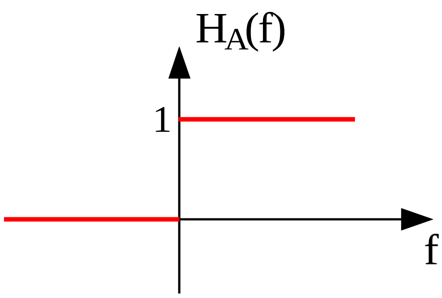
Se volessimo diagrammare l'andamento grafico della funzione $\langle H_H(f)$, avremmo quanto segue:



SEGNALE ANALITICO

Consideriamo un generico segnale tempo-continuo s(t): facciamo, come unica ipotesi, quella per cui esso sia trasformabile secondo Fourier e indichiamo con S(f) la sua trasformata.

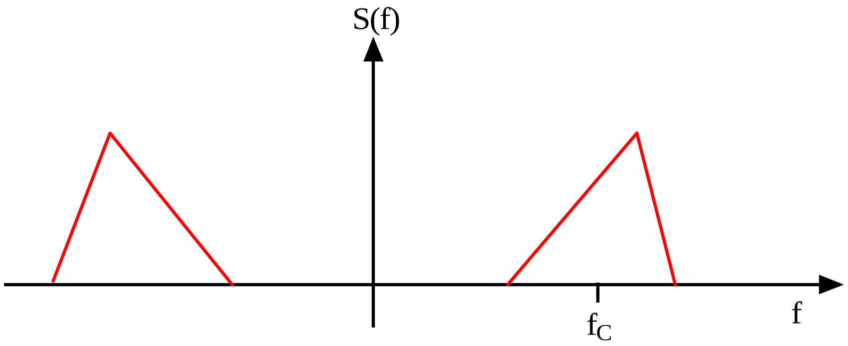
Mettiamo questo segnale in ingresso ad un sistema lineare tempo-invariante che abbia come funzione di trasferimento il gradino unitario:



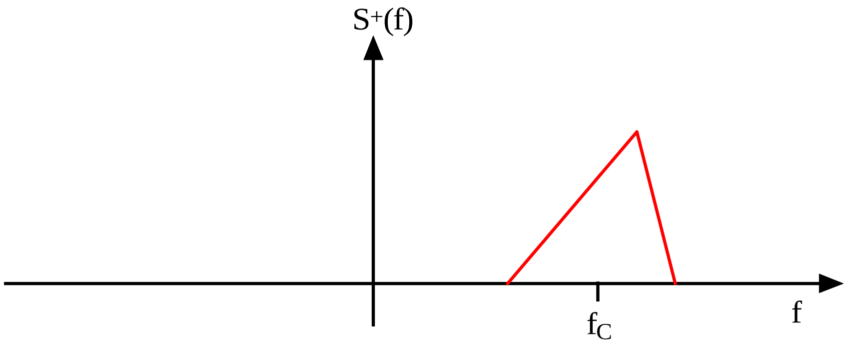
Indicata con y(t) l'uscita del sistema, supponendo che anch'essa sia trasformabile secondo Fourier e che Y(f) sia la sua trasformata, sappiamo che vale la relazione $Y(f) = S(f)H_A(f)$. Data la struttura di $H_A(f)$, si capisce subito che *il segnale in uscita di questo sistema non è altro che il segnale in ingresso, privato però delle componenti di frequenza negativa, che vengono tutte azzerate*.

Il segnale y(t) così ottenuto prende il nome di **segnale analitico del segnale s(t)**. In generale, si dirà **analitico** un qualsiasi segnale tempo-continuo che presenta spettro nullo per f<0.

Tanto per fare un esempio, se lo spettro del segnale fosse



lo spettro del suo segnale analitico sarebbe il seguente:



Una osservazione importante è la seguente: *perché un qualsiasi segnale y(t) possa essere analitico, è necessario che sia un segnale complesso.* Infatti, se y(t) fosse reale, varrebbe la cosiddetta "proprietà di simmetria hermitiana" del suo spettro, secondo la quale

$$S(-f) = S^*(f) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Re}[S(f)] = \mathrm{Re}[S(-f)] \\ \mathrm{Im}[S(f)] = -\mathrm{Im}[S(-f)] \end{cases}$$

e questo evidentemente non consente che la parte negativa dello spettro sia nulla mentre quella positiva no.

Adesso, vediamo di calcolare quanto vale la funzione di risposta all'impulso $h_A(t)$ del nostro sistema. Sappiamo bene che

$$h_A(t) = \mathrm{Fourier}^{-1}[H_A(f)]$$

Per effettuare questa antitrasformata, utilizziamo tre risultati precedentemente ricavati: il primo è la trasformata di Fourier del segnale u(t), che sappiamo essere

$$\text{Fourier}[u(t)] = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

L'altro è la proprietà di dualità, secondo la quale

$$\begin{aligned} s(t) &\longleftrightarrow S(f) \\ S(t) &\longleftrightarrow s(-f) \end{aligned}$$

Nel nostro caso, l'applicazione della proprietà di dualità ci porta a dire che

$$\begin{aligned} u(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f) \\ \frac{1}{j2\pi t} + \frac{1}{2}\delta(t) &\longleftrightarrow u(-f) \end{aligned}$$

Il terzo risultato che sfruttiamo è la proprietà di scala, secondo la quale

$$\begin{aligned} s(t) &\longleftrightarrow S(f) \\ s(-t) &\longleftrightarrow S(-f) \end{aligned}$$

Applicandolo in questo caso, abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{j2\pi t} + \frac{1}{2}\delta(t) &\longleftrightarrow u(-f) \\ -\frac{1}{j2\pi t} + \frac{1}{2}\delta(-t) &\longleftrightarrow u(f) \end{aligned}$$

Ricordando inoltre che l'impulso di Dirac è una funzione pari, concludiamo che

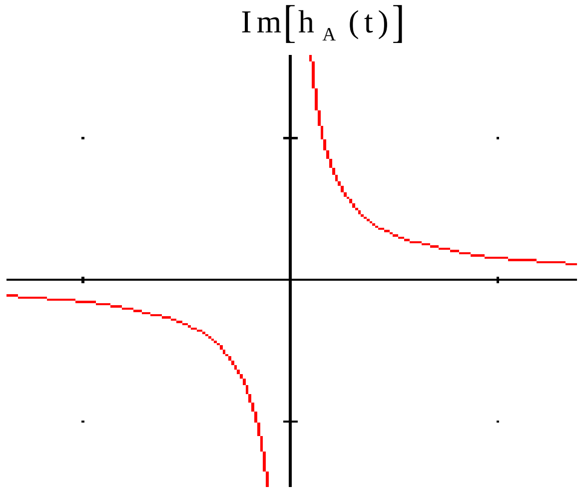
$$-\frac{1}{j2\pi t} + \frac{1}{2}\delta(t) \longleftrightarrow u(f)$$

Dato che $H_A(f)=u(f)$, possiamo scrivere che

$$\boxed{h_A(t) = -\frac{1}{j2\pi t} + \frac{1}{2}\delta(t)}$$

<u>Questa è evidentemente una funzione complessa, il che significa che il nostro sistema non è idealmente realizzabile né tanto meno fisicamente realizzabile</u>.

Volendo rappresentare graficamente questa funzione, possiamo diagrammare la sua parte reale, che è semplicemente un impulso di area ½ posizionato nell'origine, e il coefficiente della parte immaginaria, che ha un andamento del tipo seguente:



A questo punto, così come abbiamo fatto prima per il filtro di Hilbert, ricaviamo l'espressione analitica dell'uscita del sistema nel dominio del tempo, cioè del segnale analitico di s(t): sappiamo intanto che

$$y(t) = s(t) * h_A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) h_A(t-\tau) d\tau$$

Sostituendo l'espressione di $h_A(t)$, otteniamo

$$y(t) = s(t) * h_A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\left[\frac{1}{2}\delta(t-\tau) - \frac{1}{j2\pi(t-\tau)}\right] d\tau$$

Scomponendo in due l'integrale abbiamo

$$y(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\delta(t-\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\frac{1}{j\pi(t-\tau)}d\tau$$

Il primo integrale, in base alla *proprietà di setaccio* della funzione impulso di Dirac, vale proprio s(t), per cui

$$y(t) = \frac{1}{2}s(t) - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\frac{1}{j\pi(t-\tau)}d\tau$$

Il secondo integrale, invece, se portiamo fuori il termine 1/j, è proprio la trasformata di Hilbert del segnale s(t), per cui possiamo concludere che il segnale analitico di s(t) ha l'espressione

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}s(t) + \frac{j}{2}\hat{s}(t)}$$

Di solito, il segnale analitico viene indicato con il simbolo $\mathbf{s^+(t)}$.

E' evidente, dalla sua espressione, che è possibile ricavare da esso il segnale di partenza s(t), che è infatti pari al doppio della sua parte reale: quindi

$$\boxed{s(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[s^{+}(t)\right]}$$

Questa relazione indica una corrispondenza biunivoca tra s(t) ed il suo segnale analitico, per cui quest'ultimo può costituire una rappresentazione alternativa di s(t).

INVILUPPO COMPLESSO

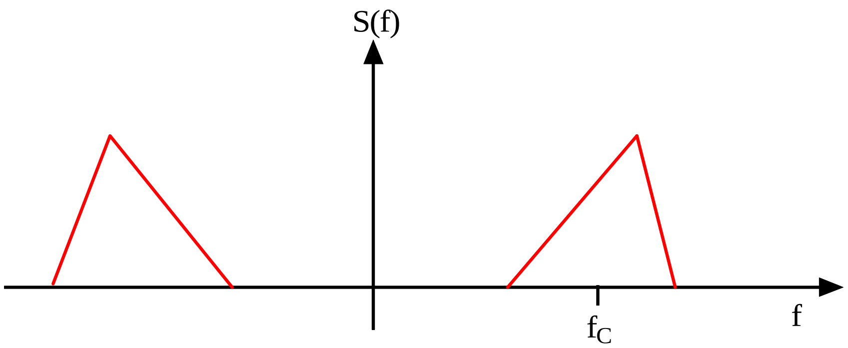
Sia dato il generico segnale s(t) che supponiamo essere trasformabile secondo Fourier. Abbiamo appena definito il segnale analitico di s(t) come $s^{+}(t) = \frac{1}{2}s(t) + \frac{j}{2}\hat{s}(t)$, dicendo che si tratta di s(t) salvo per il fatto che le componenti negative del suo spettro sono tutte nulle.

A partire dal segnale analitico di un certo segnale s(t), è possibile definire un ulteriore segnale, sempre legato a s(t): si tratta del segnale definito mediante la relazione

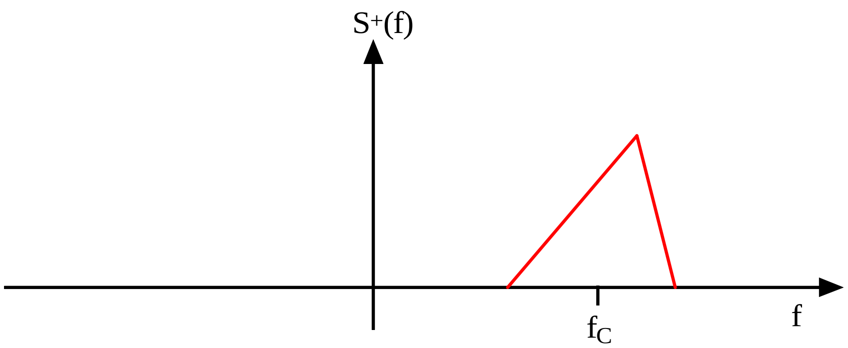
$$\boxed{\tilde{s}(t) = 2s^{+}(t)e^{-j2\pi f_0 t}}$$

e che prende il nome di **inviluppo complesso** del segnale di partenza s(t).

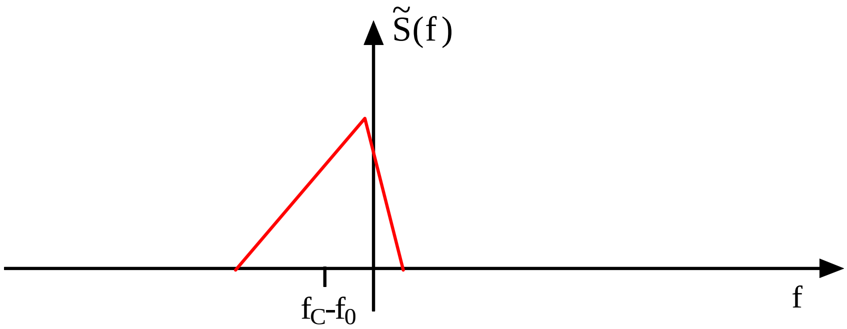
Per capire di cosa si tratta, conviene come al solito riferirsi al dominio della frequenza: infatti, è evidente, applicando la proprietà di traslazione in frequenza, che la trasformata di Fourier di questo segnale è $\tilde{S}(f) = 2S^{+}(f + f_0)$, ossia, a meno del fattore 2, è lo spettro del segnale analitico traslato, verso sinistra, di f_0. Tanto per fare un esempio, supponiamo che il nostro segnale di partenza abbia il seguente spettro:



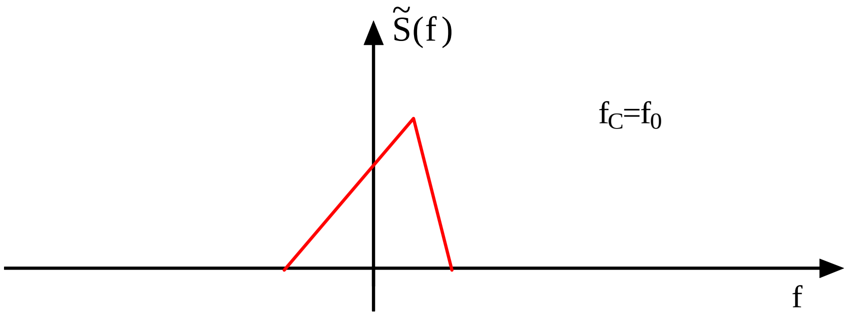
Allora, lo spettro del suo segnale analitico è



mentre quello dell'inviluppo complesso, a meno del fattore 2 è



Naturalmente, scegliendo $f_0=f_C$, lo spettro risulta centrato nell’origine ed infatti questa è l’applicazione principale dell’inviluppo complesso, ossia portare in bassa frequenza un segnale che ha invece componenti prevalentemente in alta frequenza:



Premesso questo, cerchiamo una espressione analitica migliore per $\tilde{s}(t)$: a partire dalla relazione

$$\tilde{s}(t) = 2s^+(t)e^{-j2\pi f_0 t}$$

si ricava evidentemente che

$$s^+(t) = \frac{1}{2}\tilde{s}(t)e^{j2\pi f_0 t}$$

Sapendo poi che il segnale analitico è legato al segnale s(t) dalla relazione $s(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[s^+(t)\right]$, si ha evidentemente che

$$\boxed{s(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{s}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right]}$$

Ancora una volta, questa relazione indica una corrispondenza biunivoca tra il segnale di partenza s(t) ed il suo inviluppo complesso, il quale quindi può costituire una ulteriore rappresentazione alternativa di s(t) stesso.

Possiamo ancora perfezionare quest’ultima relazione: in base alla definizione di inviluppo complesso, ossia $\tilde{s}(t) = 2s^+(t)e^{-j2\pi f_0 t}$, è evidente che, in generale, l’inviluppo complesso è un segnale complesso, a meno di casi particolari. Possiamo allora esprimerlo come somma di una parte reale e di una immaginaria:

$$\tilde{s}(t) = s_C(t) + js_S(t)$$

Le funzioni $s_C(t)$ e $s_S(t)$ prendono il nome di **componenti analogiche in bassa frequenza**. Vogliamo vedere quanto valgono.

Partiamo dalla relazione $\tilde{s}(t) = 2s^+(t)e^{-j2\pi f_0 t}$ usata per definire l'inviluppo complesso. Quando abbiamo introdotto il segnale analitico, abbiamo trovato per esso la seguente espressione:

$$s^+(t) = \frac{1}{2}s(t) + \frac{j}{2}\hat{s}(t)$$

dove ricordiamo che $\hat{s}(t)$ è la trasformata di Hilbert di s(t). Sostituendo questa espressione del segnale analitico in quella dell'inviluppo complesso, otteniamo

$$\tilde{s}(t) = 2\left[\frac{1}{2}s(t) + \frac{j}{2}\hat{s}(t)\right]e^{-j2\pi f_0 t} = \left[s(t) + j\hat{s}(t)\right]e^{-j2\pi f_0 t}$$

Sviluppando adesso il termine esponenziale in forma trigonometrica, otteniamo

$$\tilde{s}(t) = \left[s(t) + j\hat{s}(t)\right]\left(\cos(2\pi f_0 t) - j\sin(2\pi f_0 t)\right)$$

Eseguendo il prodotto, abbiamo

$$\begin{aligned}\tilde{s}(t) &= s(t)\cos(2\pi f_0 t) - js(t)\sin(2\pi f_0 t) + j\hat{s}(t)\cos(2\pi f_0 t) + \hat{s}(t)\sin(2\pi f_0 t) = \\ &= \left[s(t)\cos(2\pi f_0 t) + \hat{s}(t)\sin(2\pi f_0 t)\right] + j\left[\hat{s}(t)\cos(2\pi f_0 t) - s(t)\sin(2\pi f_0 t)\right]\end{aligned}$$

Da qui, si deduce evidentemente che

$$\boxed{\begin{aligned}s_C(t) &= s(t)\cos(2\pi f_0 t) + \hat{s}(t)\sin(2\pi f_0 t) \\ s_S(t) &= \hat{s}(t)\cos(2\pi f_0 t) - s(t)\sin(2\pi f_0 t)\end{aligned}}$$

Naturalmente, avendo detto che $s(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{s}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right]$, è chiaro che

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[\left(s_C(t) + js_S(t)\right)e^{j2\pi f_0 t}\right]$$

Note le espressioni delle componenti analogiche di bassa frequenza, possiamo fare qualche ulteriore calcolo per esprimere, in funzione di esse, direttamente il segnale s(t).

Esprimendo il termine esponenziale in forma trigonometrica e facendo le opportune semplificazioni, si ottiene quanto segue:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[\left(s_C(t) + js_S(t)\right)\left(\cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)\right)\right] =$$
$$= \mathrm{Re}\left[\left(s_C(t) + js_S(t)\right)\cos(2\pi f_0 t) + j\left(s_C(t) + js_S(t)\right)\sin(2\pi f_0 t)\right] =$$
$$= \mathrm{Re}\left[\left(s_C(t)\cos(2\pi f_0 t) - s_S(t)\sin(2\pi f_0 t)\right) + \left(js_C(t)\sin(2\pi f_0 t) + js_S(t)\cos(2\pi f_0 t)\right)\right]$$

Da questa relazione si deduce che

$$\boxed{s(t) = s_C(t)\cos\left(2\pi f_0 t\right) - s_S(t)\sin\left(2\pi f_0 t\right)}$$

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1