Appunti di Teoria dei Segnali
Capitolo 6 - Autocorrelazione

Autocorrelazione per segnali di energia

SPETTRO DI ENERGIA E FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE PER SEGNALI CONTINUI

Consideriamo un segnale tempo-continuo x(t) e la sua trasformata di Fourier X(f) (nell'ipotesi, ovviamente, che la ammetta). Sappiamo che, per definizione, l'**energia** associata a questo segnale è

$$E_X = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

e abbiamo anche dimostrato che è la stessa energia associata a X(f), ossia che

$$E_X = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

Chiaramente, la quantità $|X(f)|^2$ è una funzione della frequenza: essa prende il nome di **spettro di energia** del segnale x(t) (mentre ricordiamo che X(f) è lo *spettro di ampiezza* di x(t)). Vogliamo trovare la rappresentazione nel dominio del tempo di questo spettro di energia, ossia, in definitiva, l'antitrasformata di Fourier della funzione $|X(f)|^2$.

Intanto, possiamo scrivere che

$$|X(f)|^2 = X(f)(X(f))^*$$

Antitrasformando, abbiamo

$$\text{Fourier}^{-1}\left[|X(f)|^2\right] = \text{Fourier}^{-1}\left[X(f)(X(f))^*\right] = \text{Fourier}^{-1}[X(f)] * \text{Fourier}^{-1}\left[(X(f))^*\right]$$

L'antitrasformata del complesso coniugato di X(f) è x(-t), per cui

$$\text{Fourier}^{-1}\left[|X(f)|^2\right] = x(t) * (x(-t))^*$$

Chiamando con $\mathbf{R_X(\tau)}$ l'antitrasformata dello spettro di energia e applicando la semplice definizione di prodotto di convoluzione tra due segnali, abbiamo dunque trovato che

$$\boxed{R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(x(t+\tau))^* dt}$$

La funzione $R_X(\tau)$ prende il nome di **funzione di autocorrelazione** del segnale x(t) considerato. Il motivo di questo nome sarà chiaro più avanti, quando applicheremo questo concetto ai sistemi. Vediamo invece adesso qualche proprietà di questa funzione.

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

La prima proprietà è che *$R_X(0)$ rappresenta l'energia del segnale x(t), ossia*

$$\boxed{E_X = R_X(\tau = 0)}$$

Infatti, semplicemente dalla definizione si ha che

$$R_X(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(x(t))^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Un'altra proprietà si verifica quando il segnale x(t) è reale: *per x(t) reale, $R_X(t)$ è una funzione pari*, ossia, in formule, si ha che

$$\boxed{R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(x(t+\tau))^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(x(t-\tau))^* dt}$$

Si tratta di una importante proprietà, che spesso utilizzeremo per i nostri calcoli.
Vediamo di dimostrarla. In base alla definizione, abbiamo che

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left(x(t+\tau)\right)^* dt$$

Effettuando il cambio di variabile s=t+τ, abbiamo che

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s-\tau)\left(x(s)\right)^* ds$$

Essendo per ipotesi x(t) reale, l'operatore complesso coniugato non ha senso, per cui

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s-\tau)x(s)ds$$

L'integrale così ottenuto non è altro che $R_X(-\tau)$, come volevamo far vedere.
L'ultima proprietà, sempre per x(t) reale, è la seguente:

$$\boxed{\left|R_X(\tau)\right| \le R_X(0)}$$

Essa dice che il valore massimo di questa funzione si ha per t=0.
Per dimostrarla, dobbiamo far vedere che

$$-R_X(0) \le R_X(\tau)$$
$$R_X(\tau) \ge R_X(0)$$

Facciamo vedere la prima relazione. Intanto, è evidente che, a prescindere da come è fatta x(t), sussiste la seguente relazione:

$$\left(x(t) + x(t+\tau)\right)^2 \ge 0$$

Sviluppando il quadrato, abbiamo che

$$x^2(t) + x^2(t+\tau) + 2x(t)x(t+\tau) \ge 0$$

che può essere anche riscritta nella forma

$$x^2(t) + x^2(t+\tau) \ge -2x(t)x(t+\tau)$$

Integrando ambo i membri tra -∞ e +∞ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t+\tau)dt \ge -\int_{-\infty}^{+\infty} 2x(t)x(t+\tau)dt$$

Abbiamo visto prima che

$$R_X(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt$$

per cui quella relazione diventa

$$R_X(0)+\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t+\tau)dt \geq -\int_{-\infty}^{+\infty}2x(t)x(t+\tau)dt$$

E’ anche evidente che

$$R_X(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t+\tau)|^2 dt$$

per cui possiamo ancora scrivere che

$$2R_X(0)\geq -\int_{-\infty}^{+\infty}2x(t)x(t+\tau)dt$$

L’integrale a secondo membro è proprio $R_X(t)$ (in quanto x(t) è supposto reale), per cui $-R_X(0)\leq R_X(\tau)$, ed era quello che volevamo dimostrare.

Per dimostrare l’altra disuguaglianza, ci basta effettuare gli stessi calcoli, ma questa volta a partire dalla relazione

$$\left(x(t)-x(t+\tau)\right)^2\geq 0$$

ESEMPIO

Sia dato il segnale $g(t)=A\mathrm{sinc}(2wt)$. Di questo segnale vogliamo la funzione di correlazione $R_g(\tau)$, lo spettro di energia $|G(f)|^2$ e l’energia E_S.

Vediamo intanto come dovremmo procedere applicando semplicemente le definizioni: la formula per il calcolo della funzione di autocorrelazione è

$$R_g(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\left(g(t+\tau)\right)^* dt$$

Per calcolare lo spettro di energia dobbiamo trasformare secondo Fourier la funzione $R_g(\tau)$ e, infine, per calcolare l’energia dobbiamo usare la formula

$$E_g=\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|^2 dt$$

o, in alternativa, la formula

$$E_g=\int_{-\infty}^{+\infty}|G(f)|^2 df$$

Seguendo, dunque, questa strada, ci troviamo a dover risolvere ben due integrali in cui la funzione integranda è la funzione "sinc". E' allora decisamente consigliabile seguire un'altra strada.

Quella più conveniente consiste nel valutare prima lo spettro di energia $|G(f)|^2$: da esso, otteniamo l'energia E_S come area sottesa e la funzione di autocorrelazione come antitrasformata di Fourier.

Vediamo i calcoli nel dettaglio.

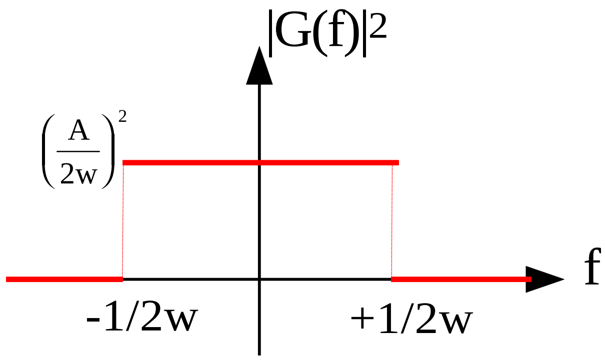
Dato che g(t) è una funzione "sinc", conosciamo bene la sua trasformata, che in questo caso è

$$G(f) = \frac{A}{2w}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2w}\right)$$

Lo spettro di energia è dunque

$$|G(f)|^2 = \left(\frac{A}{2w}\right)^2 \mathrm{rect}^2\left(\frac{f}{2w}\right) = \left(\frac{A}{2w}\right)^2 \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2w}\right)$$

Esso è il prodotto di due rettangoli uguali, per cui è uguale a sua volta ad un rettangolo:



L'area sottesa da questo rettangolo, in base alla formula

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df$$

è proprio l'energia del nostro segnale g(t), la quale quindi è $\frac{A^2}{2w}$.

Infine, antitrasformando $|G(f)|^2$ otteniamo la funzione di autocorrelazione:

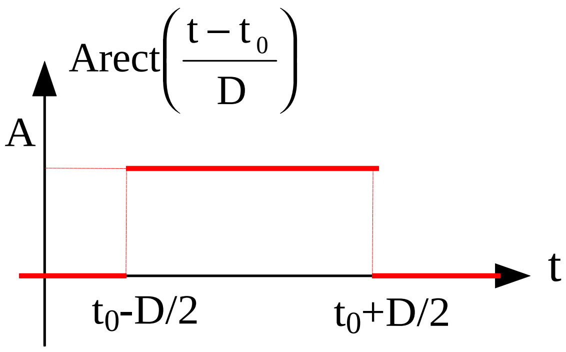
$$R_X(\tau) = \mathrm{Fourier}^{-1}\left[|G(f)|^2\right] = \mathrm{Fourier}^{-1}\left[\left(\frac{A}{2w}\right)^2 \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2w}\right)\right] = \left(\frac{A}{2w}\right)^2 \mathrm{Fourier}^{-1}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2w}\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{A}{2w}\right)^2 (2w)\mathrm{sinc}(2w\tau) = \frac{A^2}{2w}\mathrm{sinc}(2w\tau)$$

Si nota, ovviamente, che $E_S=R_X(\tau=0)$.

ESEMPIO: RETTANGOLO TRASLATO

Calcoliamo la funzione di correlazione per il seguente segnale:



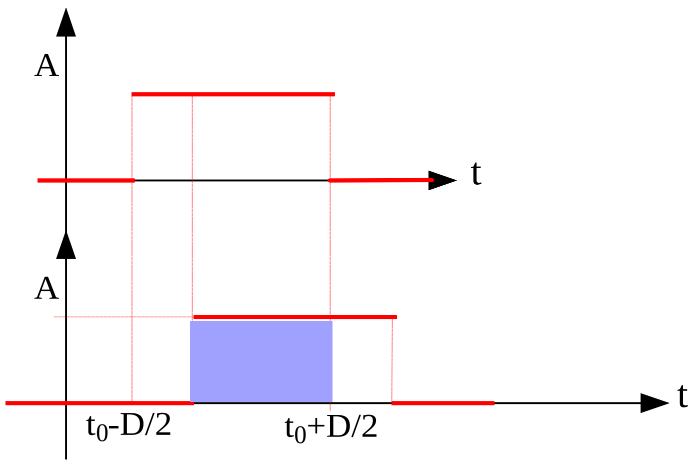
Applicando la normale definizione, abbiamo che

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left(x(t+\tau)\right)^* dt$$

Il nostro x(τ) è un segnale reale, per cui il "complesso coniugato" non ha alcun effetto:

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{D}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\tau+(t-t_0)}{D}\right)dt$$

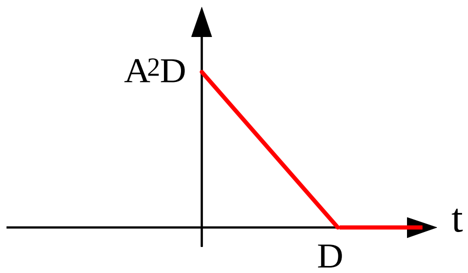
La funzione integranda è il prodotto di due rettangoli uguali (uno traslato rispetto all'altro di un tratto t), per cui è a sua volta un rettangolo. Tuttavia, questo rettangolo dipende da come sono disposti gli altri due uno rispetto all'altro: supponendo per il momento t>0, la situazione è



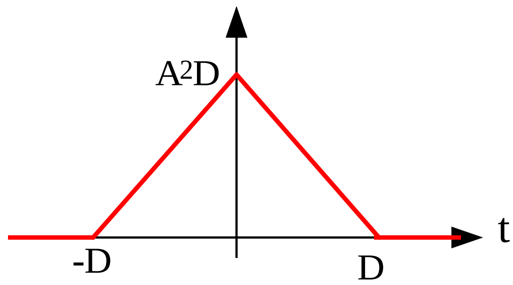
Si nota, dunque, che $R_X(\tau)$ è nulla quando $t_0 - \frac{D}{2} + \tau > t_0 + \frac{D}{2}$, ossia quando τ>D, mentre, quando $0 < \tau < D$ si ha che

$$\underbrace{R_X(\tau)}_{0<\tau<D} = A^2 \int_{t_0-\frac{D}{2}+t}^{t_0+\frac{D}{2}} dt = A^2\left(t_0 + \frac{D}{2} + \tau - t_0 + \frac{D}{2}\right) = A^2(D+\tau)$$

Quindi l'andamento di $R_X(\tau)$ per $\tau>0$ è il seguente:



Tuttavia, ci ricordiamo che la funzione di correlazione per segnali reali è una funzione pari, cioè è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, per cui possiamo subito disegnare la parte per $\tau<0$:



IMPORTANZA DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE PER I SISTEMI CONTINUI

Consideriamo un generico **sistema continuo**, caratterizzato da una **risposta all'impulso h(t)**: sappiamo che l'uscita y(t) del sistema in corrispondenza del generico ingresso x(t) si può ricavare mediante la relazione $y(t) = x(t) * h(t)$. Sappiamo che sia x(t) sia y(t), nell'ipotesi di essere entrambi ad energia finita, ammettono la trasformata di Fourier: trasformando secondo Fourier quella relazione, otteniamo $Y(f) = X(f)H(f)$, dove sappiamo che H(f) è la cosiddetta **risposta in frequenza** del sistema.

L'energia associata al segnale y(t) è

$$E_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df$$

Se al posto di Y(f) sostituiamo l'espressione trovata prima, otteniamo

$$E_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)H(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 |H(f)|^2 df$$

La funzione $|H(f)|^2$ prende il nome di **funzione di trasferimento dell'energia** del sistema considerato.

Per quanto riguarda l’uscita y(t), la sua funzione di autocorrelazione $R_Y(t)$ è evidentemente l’antitrasformata della funzione $|Y(f)|^2$. Ma, essendo $|Y(f)|^2 = |X(f)|^2 |H(f)|^2$, l’antitrasformata vale

$$R_Y(\tau) = \text{Fourier}^{-1}\left[|X(f)|^2 |H(f)|^2\right]$$

Ricordando che l’antitrasformata di un prodotto è pari al prodotto di convoluzione delle antitrasformate, possiamo scrivere che

$$R_Y(\tau) = \text{Fourier}^{-1}\left[|X(f)|^2\right] * \text{Fourier}^{-1}\left[|H(f)|^2\right]$$

Il primo termine a secondo membro non è altro che $R_X(\tau)$, per cui

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * \text{Fourier}^{-1}\left[|H(f)|^2\right]$$

Ricordando che il modulo quadro di una qualsiasi quantità è pari al prodotto tra la quantità stessa ed il suo complesso coniugato, abbiamo poi che

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * \text{Fourier}^{-1}\left[H(f)(H(f))^*\right] = R_X(\tau) * \text{Fourier}^{-1}[H(f)] * \text{Fourier}^{-1}\left[(H(f))^*\right]$$

Ricordando infine che l’antitrasformata di Fourier del complesso coniugato di una funzione è pari all’antitrasformata della funzione stessa, calcolata però in -t, concludiamo che

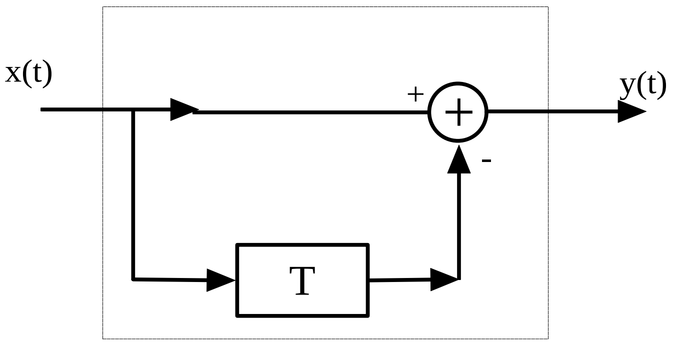
$$\boxed{R_Y(\tau) = R_X(\tau) * \left[h(\tau) * (h(-\tau))^*\right]}$$

Nel caso in cui la funzione di risposta all’impulso h(t) sia reale (il che significa che il sistema è almeno idealmente realizzabile), possiamo fare qualche ulteriore calcolo: infatti, in questo caso, l’operatore di complesso coniugato non ha alcun effetto su h(t), per cui

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(t) * h(-\tau)$$

Esempio

Consideriamo il seguente sistema:



Abbiamo in precedenza già visto che questo è un sistema lineare tempo-invariante: l'espressione analitica dell'uscita in corrispondenza del generico x(t) è

$$y(t) = x(t) - x(t-T)$$

Vogliamo calcolare, in corrispondenza del generico ingresso x(t), la funzione di autocorrelazione $R_Y(t)$ dell'uscita y(t).

La prima cosa da fare, quando si ha a che fare con un sistema lineare tempo-invariante, è sempre il calcolo della sua risposta all'impulso:

$$h(t) = \delta(t) - \delta(t-T)$$

A questo punto, per il calcolo della $R_Y(T)$, possiamo fare il seguente ragionamento: dato che non conosciamo l'espressione analitica di y(t), è ovvio che non possiamo applicare la definizione di funzione di autocorrelazione, ossia

$$R_Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)\left(y(t+\tau)\right)^* d\tau$$

L'unica possibilità è dunque quella di applicare la relazione

$$R_Y(t) = \text{Fourier}^{-1}\left[S_Y(f)\right] = \text{Fourier}^{-1}\left[|Y(f)|^2\right]$$

Ci serve dunque $|Y(f)|^2$. Ricordando che per i sistemi lineari sussiste la relazione $y(t) = x(t) * h(t)$, che nel dominio della frequenza equivale a $Y(f) = X(f)H(f)$, possiamo scrivere che

$$|Y(f)|^2 = |X(f)H(f)|^2 = |X(f)|^2 |H(f)|^2 = S_X(f)|H(f)|^2 \longrightarrow R_Y(t) = \text{Fourier}^{-1}\left[S_X(f)|H(f)|^2\right]$$

Applicando adesso la proprietà di convoluzione nel tempo, abbiamo che

$$R_Y(t) = \text{Fourier}^{-1}\left[S_X(f)\right] * \text{Fourier}^{-1}\left[|H(f)|^2\right] = R_X(t) * \text{Fourier}^{-1}\left[|H(f)|^2\right]$$

Quindi, per trovare la funzione di autocorrelazione dell'uscita y(t), dobbiamo effettuare i seguenti passaggi:

- calcolo della funzione di autocorrelazione $R_X(t)$ dell'ingresso x(t);
- calcolo della funzione di trasferimento dell'energia del sistema $|H(f)|^2$, il che significa, in definitiva, calcolo della risposta in frequenza H(f) del sistema;
- antitrasformazione di $|H(f)|^2$;
- convoluzione tra $R_X(t)$ e l'antitrasformata di $|H(f)|^2$.

Dato che stiamo supponendo x(t) generico, il primo passo possiamo ritenerlo fatto. Andiamo invece a calcolare quanto vale la funzione di trasferimento dell'energia: avendo trovato che $h(t) = \delta(t) - \delta(t-T)$, è chiaro che

$$H(f) = \text{Fourier}[\delta(t) - \delta(t-T)] = 1 - e^{-j2\pi fT} = 1 - \left(\cos(-2\pi fT) + j\sin(-2\pi fT)\right) =$$
$$= 1 - \left(\cos(2\pi fT) - j\sin(2\pi fT)\right) = \left(1 - \cos(2\pi fT)\right) - j\sin(2\pi fT)$$

e quindi

$$|H(f)|^2 = \left|\left(1 - \cos(2\pi fT)\right) - j\sin(2\pi fT)\right|^2 = \left(1 - \cos(2\pi fT)\right)^2 + \sin^2(2\pi fT) = 2 - 2\cos(2\pi fT)$$

Adesso dobbiamo antitrasformare questa funzione: i calcoli non sono tanto agevoli, per cui proviamo a seguire un'altra strada.

Abbiamo trovato prima che

$$R_Y(t) = R_X(t) * \text{Fourier}^{-1}\left[|H(f)|^2\right]$$

L'antitrasformata presente a secondo membro non è altro che la funzione di autocorrelazione della risposta all'impulso h(t), per cui possiamo scrivere che

$$R_Y(t) = R_X(t) * R_h(t)$$

Calcoliamo allora $R_h(t)$ applicando la definizione:

$$R_h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\left(h(t+\tau)\right)^* d\tau$$

Al posto di h(t) dobbiamo sostituire $h(t) = \delta(t) - \delta(t-T)$. Essendo l'impulso una funzione reale, possiamo subito eliminare l'operatore complesso coniugato e scrivere quanto segue:

$$R_h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\delta(\tau) - \delta(\tau - T)\right)\left(\delta(t+\tau) - \delta(t+\tau-T)\right) d\tau$$

Sviluppando il prodotto, abbiamo

$$R_h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\tau)\delta(t+\tau) - \delta(\tau)\delta(t+\tau-T) - \delta(\tau-T)\delta(t+\tau) + \delta(\tau-T)\delta(t+\tau-T)] d\tau =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\tau)\delta(t+\tau)] d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\tau)\delta(t+\tau-T)] d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\tau-T)\delta(t+\tau)] d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\tau-T)\delta(t+\tau-T)] d\tau$$

Adesso dobbiamo applicare la *proprietà di setaccio*: l'applicazione è immediata per il primo integrale, che vale $\delta(t)$, e per il secondo, che $\delta(t-T)$, per cui

$$R_h(t) = \delta(t) - \delta(t-T) - \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\tau-T)\delta(t+\tau)] d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\tau-T)\delta(t+\tau-T)] d\tau$$

Anche per l'ultimo integrale, basta porre $s=\tau$-T per ottenere che esso vale $\delta(t)$, per cui

$$R_h(t) = 2\delta(t) - \delta(t-T) - \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\tau-T)\delta(t+\tau)] d\tau$$

Per l'ultimo integrale rimasto, possiamo fare quanto segue:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(\tau-T)\delta(t+\tau)]d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(\tau-T)\delta(t+\tau+T-T)]d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\delta(\tau-T)\delta\big((t-T)+(\tau+T)\big)\right]d\tau=\delta(t+T)$$

In conclusione, abbiamo trovato che

$$R_h(t)=2\delta(t)-\delta(t-T)-\delta(t+T)$$

Adesso, possiamo scrivere che

$$R_Y(t)=R_X(t)*R_h(t)=R_X(t)*[2\delta(t)-\delta(t-T)-\delta(t+T)]$$

Ricordando che il prodotto di convoluzione di un segnale per l'impulso è pari al segnale stesso calcolato nel punto di applicazione dell'impulso, abbiamo dunque che

$$\boxed{R_Y(t)=2R_X(t)-R_X(t-T)-R_X(t+T)}$$

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE PER I SISTEMI DISCRETI

Le definizioni e le proprietà date fino ad ora circa i segnali continui valgono pari pari anche per i segnali discreti. Evitiamo perciò di scendere nei dettagli.

FUNZIONE DI CROSS-CORRELAZIONE

Consideriamo due segnali generici continui x(t) e y(t) (per esempio ingresso e uscita di un sistema). Si definisce **funzione di cross-correlazione tra x(t) e y(t)** la funzione

$$R_{X,Y}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau+t)y(\tau)d\tau$$

Si definisce invece **funzione di cross-correlazione tra y(t) e x(t)** la funzione

$$R_{Y,X}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}y(\tau-t)x(\tau)d\tau$$

Si può facilmente verificare che queste funzioni sono legate dalla relazione

$$R_{X,Y}(t)=R_{Y,X}(-t)$$

Le stesse definizioni sussistono anche per i segnali discreti: si definisce **funzione di cross-correlazione tra x(nT) e y(nT)** la funzione

$$R_{X,Y}(nT)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}Tx(mT)y(mT-nT)$$

Si definisce invece **funzione di cross-correlazione tra y(nT) e x(nT)** la funzione

$$R_{Y,X}(nT)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}Tx(mT+nT)y(mT)$$

Si verifica anche qui che

$$R_{X,Y}(nT)=R_{Y,X}(-nT)$$

Autocorrelazione per segnali di potenza

INTRODUZIONE

Sia dato un segnale x(t) generico: sappiamo che questo segnale sarà un "*segnale di potenza*" o anche "**segnale a potenza finita**" se risulta finita e non nulla la quantità

$$P_X=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}|x(t)|^2dt$$

Sappiamo anche che un segnale di potenza è sempre un segnale ad energia nulla, per cui ci troviamo in una situazione diversa da quella esaminata in precedenza, dove invece era E_X finito non nullo e $P_X=0$.

Nel caso dei segnali di energia, abbiamo chiamato *funzione di autocorrelazione* la funzione

$$R_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\big(x(t+\tau)\big)^*d\tau$$

ottenuta come antitrasformata di Fourier dello "*spettro di energia*" $|X(f)|^2$. Qualcosa di molto simile si ha anche per i segnali di potenza: in particolare, dato x(t) segnale di potenza, si definisce **funzione di autocorrelazione temporale** la funzione

$$\boxed{R_X(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}x(t)\big(x(t-\tau)\big)^*dt}$$

La trasformata di Fourier di questa funzione si indica col simbolo **$S_X(f)$** e prende il nome di **spettro di potenza** del segnale x(t).

Vediamo qualche proprietà di $R_X(\tau)$ e della sua trasformata $S_X(f)$.

AUTOCORRELAZIONE TEMPORALE E POTENZA DI UN SEGNALE

La prima proprietà che vogliamo far vedere è che *l'area sottesa dal segnale $S_X(f)$ è pari esattamente alla potenza associata al segnale x(t),* ossia che

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)df = P_X}$$

Per definizione, abbiamo detto che

$$R_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\left(x(t-\tau)\right)^* dt$$

Calcolando $R_X(\tau)$ in $\tau=0$ otteniamo

$$R_X(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\left(x(t)\right)^* dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = P_X$$

Inoltre, avendo detto che $S_X(f)$ è la trasformata di Fourier di $R_X(\tau)$, possiamo applicare la formula di antitrasformazione di Fourier e scrivere che

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)e^{j2\pi f\tau} df$$

Calcolando anche queste per $\tau=0$, si ottiene che

$$R_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)df$$

e quindi, avendo trovato prima che $R_X(0)=P_X$, concludiamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)df = P_X$$

N.B. Facciamo osservare come questo risultato è assolutamente analogo a quello trovato per i segnale ad energia: in quel caso, l'area sottesa dallo spettro di energia, cioè dalla trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione, era l'energia del segnale

AUTOCORRELAZIONE TEMPORALE E SISTEMI LINEARI TEMPO-INVARIANTI

Sia dato sempre x(t) segnale di potenza: supponiamo che esso entri in ingresso ad un **sistema lineare tempo-invariante**, il quale produce di conseguenza una uscita y(t). Vogliamo ricavare la funzione di autocorrelazione dell'uscita y(t).

Data la linearità e la tempo-invarianza del sistema, sappiamo che esso può essere caratterizzato dalla **funzione h(t) di risposta all'impulso**, la quale ci consente di scrivere la relazione

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Ci mettiamo nell'ipotesi che quell'integrale converga, il che equivale a dire che certamente y(t) risulta essere una funzione reale. E' facile dimostrare, per esempio, che questo certamente accade quando il sistema è stabile.

Un altro problema che si pone è il seguente: y(t), risposta del sistema al segnale di potenza x(t), è a sua volta un segnale di potenza? Supponiamo che lo sia.

Per definizione, la funzione di autocorrelazione temporale di y(t) è allora

$$R_Y(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} y(t)\big(y(t-\tau)\big)^* dt$$

Al posto di y(t) sostituiamo proprio l'integrale di convoluzione di prima, con l'accortezza di cambiare i nomi alle variabili onde evitare confusione:

$$R_Y(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)du\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(v)x((t-\tau)-v)dv\right]^* dt$$

Nell'ultimo integrale, possiamo portar dentro l'operatore di complesso coniugato:

$$R_Y(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)du\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h^*(v)\big(x((t-\tau)-v)\big)^* dv\right]dt$$

Adesso mettiamo tutti i termini sotto un solo integrale, ricordando, ovviamente, di rispettare il corretto ordine di integrazione:

$$R_Y(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)h^*(v)\big(x((t-\tau)-v)\big)^* dtdudv$$

Abbiamo dunque da risolvere un <u>integrale triplo</u>, in cui l'ordine di integrazione è dt, du e dv. L'integrale più interno è in dt, per cui possiamo portar fuori i termini h(u) e $h^*(v)$:

$$R_Y(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)h^*(v)\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)\big(x((t-\tau)-v)\big)^* dtdudv$$

Ancora, dato che l'integrale intermedio è in du, possiamo spostare ulteriormente il termine $h^*(v)$:

$$R_Y(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} h^*(v) \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)\big(x((t-\tau)-v)\big)^* dt du dv$$

Adesso, portiamo il segno di limite ed il termine 1/T davanti all'integrale più interno:

$$R_Y(\tau) = \int_{-T/2}^{+T/2} h^*(v) \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)\big(x((t-\tau)-v)\big)^* dt \right] du dv$$

In questo integrale più interno, se facciamo il cambio di variabile s=t-u, otteniamo

$$R_Y(\tau) = \int_{-T/2}^{+T/2} h^*(v) \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\big(x(s+u-\tau-v)\big)^* dt \right] du dv$$

Dato che s+u-τ-v = s - (τ+v-u), si può osservare come tutto il termine tra parentesi quadre sia, per definizione, $R_X(\tau+v-u)$, per cui

$$R_Y(\tau) = \int_{-T/2}^{+T/2} h^*(v) \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) R_X(\tau+v-u) du dv$$

Ora, l'integrale più interno non è altro che il prodotto di convoluzione tra h(τ+v) e $R_X(\tau+v)$, per cui anche il secondo integrale se ne va e resta

$$R_Y(\tau) = \int_{-T/2}^{+T/2} h^*(v)\big[h(\tau+v) * R_X(\tau+v)\big] dv$$

Ma questo integrale non è altro che il prodotto di convoluzione tra la funzione h*(-τ) e la funzione $h(\tau) * R_X(\tau)$, per cui possiamo concludere che

$$R_Y(\tau) = h^*(-\tau) * \big[h(\tau) * R_X(\tau)\big]$$

In conclusione, l'autocorrelazione dell'uscita y(t) del nostro sistema (lineare tempo-invariante) è legata all'autocorrelazione dell'ingresso x(t) dalla relazione

$$\boxed{R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h^*(-\tau) * h(\tau)}$$

(si ricordi che il prodotto di convoluzione è commutativo e associativo).

N.B. Ancora una volta, facciamo osservare che il risultato appena ottenuto è identico a quello ottenuto nel caso dei segnali ad energia

Questa stessa relazione può essere espressa anche nel dominio della frequenza: infatti, trasformando ambo i membri secondo Fourier e ricordando che

$$\mathrm{Fourier}[R_Y(\tau)] = S_Y(f)$$
$$\mathrm{Fourier}[R_X(\tau)] = S_X(f)$$
$$\mathrm{Fourier}[h^*(-\tau)] = H^*(f)$$

abbiamo che

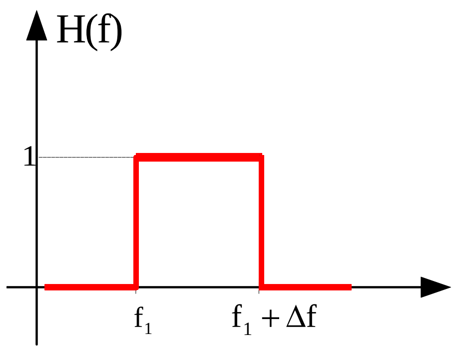
$$\boxed{S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2}$$

AUTOCORRELAZIONE TEMPORALE COME DENSITÀ DI POTENZA

Abbiamo detto che la funzione $\mathbf{S_X(f)}$, trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione temporale $R_X(\tau)$ del segnale x(t) (a potenza finita), prende il nome di "spettro di potenza" del segnale x(t). Questa stessa funzione ha anche il significato di una **densità di potenza** relativamente al segnale x(t) e vogliamo adesso vedere da che cosa discende questo nome.

Una spiegazione matematica di questo fatto sarà data quando si parlerà, nell'ambito della probabilità, di *processi stocastici stazionari applicati ai sistemi lineari*; invece, una spiegazione intuitiva più che matematica consiste nel far vedere che, dato il segnale x(t) in ingresso al sistema e data la sua trasformata X(f), in un intervallo di frequenza $[f_1,f_1+\Delta f]$, la potenza associata ad x(t) è data da proprio da $S_X(f)\Delta f$.

Consideriamo un sistema lineare tempo-invariante, la cui funzione di trasferimento (o funzione di risposta in frequenza) abbia il seguente andamento:



L'effetto di questo sistema sull'ingresso x(t) è dunque quello di lasciar passare, inalterata, solo quella parte di segnale compresa nell'intervallo di frequenza $[f_1,f_1+\Delta f]$.

Abbiamo prima trovato che sussiste la relazione $S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2$. In questo caso particolare, essa equivale a

$$S_Y(f) = S_X(f) \qquad f \in [f_1, f_1 + \Delta f]$$

Vediamo quanto vale la potenza associata all'uscita y(t): in base alla prima proprietà della funzione di correlazione temporale, abbiamo che

$$P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)df$$

In base adesso alla relazione

$$S_Y(f) = S_X(f) \qquad f \in [f_1, f_1 + \Delta f]$$

quell'integrale diventa

$$P_Y = \int_{f_1}^{f_1+\Delta f} S_X(f)df$$

A questo punto, ricordando che

$$P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)df$$

è evidente che l'integrale di prima è la potenza dP_X associata al segnale x(t) nell'intervallo $[f_1,f_1+\Delta f]$, per cui, sfruttando una nota proprietà degli integrali definiti, possiamo scrivere che $dP_X \cong S_X(f)\Delta f$, da cui appunto il significato di **densità di potenza** per la funzione $S_X(f)$.

Autocorrelazione per segnali periodici

DEFINIZIONE

Sappiamo che i **segnali periodici** sono dei segnali ad energia nulla, ma, in generale, non sappiamo molto sulla loro potenza, salvo il fatto che la possiamo calcolare mediante la formula

$$P_X = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt$$

Nel seguito, però, facciamo l'ipotesi di trattare solo <u>segnali periodici a potenza finita</u>. Abbiamo visto prima che si definisce **funzione di autocorrelazione temporale** per un segnale x(t) a potenza finita la funzione

$$R_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\left(x(t-\tau)\right)^* dt$$

Ci proponiamo adesso di trovare una espressione più semplice di $R_X(\tau)$ in conseguenza della periodicità di x(t).

Intanto, supponiamo che il periodo del segnale x(t) sia T_0: allora il termine

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\left(x(t-\tau)\right)^* dt$$

può essere riscritto nella forma

$$\frac{1}{kT_0}\int_{-kT_0/2}^{+kT_0/2} x(t)\left(x(t-\tau)\right)^* dt$$

in modo da avere

$$R_X(\tau) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{kT_0}\int_{-kT_0/2}^{+kT_0/2} x(t)\left(x(t-\tau)\right)^* dt$$

Ora, in base ad una proprietà degli integrali, l'integrale oggetto di quel limite può essere calcolato come k volte l'integrale stesso esteso, però, ad 1 solo periodo: quindi

$$R_X(\tau) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{kT_0}\int_{-kT_0/2}^{+kT_0/2} x(t)\left(x(t-\tau)\right)^* dt = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{kT_0}k\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\left(x(t-\tau)\right)^* dt =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\left(x(t-\tau)\right)^* dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\left(x(t-\tau)\right)^* dt$$

Possiamo dunque concludere che la **funzione di correlazione temporale** per un segnale periodico, di periodo T_0, è data da

$$\boxed{R_X(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\left(x(t-\tau)\right)^* dt}$$

Ovviamente, anche per questi segnali, la trasformata di Fourier di $R_X(\tau)$ è lo **spettro di potenza**.

POTENZA DI UN SEGNALE PERIODICO

Sulla base della definizione appena data, vediamo quanto vale la potenza P_X del nostro segnale x(t) periodico a potenza finita. Abbiamo in precedenza *dato per buona* la seguente formula:

$$P_X = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt$$

(dove T era il periodo del segnale). Inoltre, quando abbiamo introdotto il concetto di "sviluppo in serie di Fourier" di un segnale periodico, abbiamo dimostrato la validità di quest'altra relazione:

$$\boxed{P_X = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2}$$

dove gli x_n sono appunto i coefficienti dello sviluppo. Adesso, intendiamo dimostrare questa relazione, facendo uso del concetto di funzione di autocorrelazione.

Essendo x(t) periodico, possiamo esprimerlo sotto forma di sviluppo in serie di Fourier: usando la *forma esponenziale* del suddetto sviluppo, abbiamo perciò che

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

dove ricordiamo che $f_n = n/T_0$ e dove T_0 è il periodo di x(t).

Usando questa espressione di x(t), vediamo quanto vale $R_X(\tau)$:

$$R_X(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n (t-\tau)} \right)^* dt$$

Per comodità, chiamiamo "m" l'indice della seconda sommatoria:

$$R_X(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m e^{j2\pi f_m (t-\tau)} \right)^* dt$$

Portando dentro il segno di sommatoria l'operatore "complesso coniugato" abbiamo

$$R_X(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m^* e^{-j2\pi f_m (t-\tau)} \right) dt$$

Portando adesso fuori i due segni di sommatoria abbiamo

$$R_X(\tau) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x_n e^{j2\pi f_n t} x_m^* e^{-j2\pi f_m (t-\tau)} dt$$

Portando fuori dal segno di integrale i termini costanti

$$R_X(\tau) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_n x_m^* e^{j2\pi f_m \tau} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{j2\pi f_n t} e^{-j2\pi f_m t} dt$$

L’integrale rimasto è stato risolto già in precedenza: esso vale T_0 quando n=m e 0 altrimenti, per cui possiamo concludere che

$$\boxed{R_X(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 e^{j2\pi f_n \tau}}$$

Questa è un’altra espressione ancora di $R_X(\tau)$ per segnali periodici. In particolare, essa è molto comoda ai fini della valutazione della potenza associata ad x(t): si ha infatti che

$$\boxed{P_X = R_X(\tau = 0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2}$$

Questo è un risultato che avevamo già trovato per altra via, parlando proprio dello sviluppo in serie di Fourier e sfruttando le sue proprietà.

Come ultima osservazione, calcoliamo la trasformata di Fourier di $R_X(\tau)$ espressa in quel modo: ricordando che la trasformata del termine esponenziale non è altro che un impulso traslato, abbiamo evidentemente che

$$\boxed{S_X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 \delta(f - f_n)}$$

ossia che <u>lo spettro di potenza di un segnale periodico a potenza finita è una successione di impulsi</u>.

SEGNALE PERIODICI DI POTENZA E SISTEMI LINEARI TEMPO-INVARIANTI

Sia dato un segnale x(t) periodico a potenza finita. Supponiamo di applicare questo segnale in ingresso ad un **sistema lineare tempo-invariante** la cui funzione di trasferimento sia H(f). Se supponiamo anche che sia l’ingresso x(t) sia la corrispondente uscita y(t) ammettano trasformata di Fourier, abbiamo in precedenza trovato che sussiste la relazione $S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2$, la quale si ottiene trasformando secondo Fourier la relazione $R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h^*(\tau)$. Abbiamo anche trovato che, se x(t) è periodico, il suo spettro di potenza $S_X(f)$ è esprimibile mediante la formula

$$S_X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 \delta(f - f_n)$$

dove gli x_n sono i coefficienti del suo sviluppo in serie di Fourier (e quindi f_n=n/T). Andando a sostituire questa espressione in quella dello spettro di potenza di y(t), otteniamo quindi che

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 \delta(f - f_n)$$

Portando dentro la sommatoria la funzione di trasferimento dell’energia $|H(f)|^2$, otteniamo

$$S_Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 |x_n|^2 \delta(f - f_n)$$

Ma il prodotto di una funzione (in questo caso $|H(f)|^2$) per un impulso traslato è a sua volta un impulso di area pari al valore che la funzione assume nel punto di applicazione dell'impulso, per cui possiamo concludere che

$$\boxed{S_Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |H(f_n)|^2 |x_n|^2 \delta(f_n)}$$

ESEMPIO: AUTOCORRELAZIONE PER IL COSENO

Consideriamo il segnale $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ (dove ovviamente la frequenza del segnale è $f_0=1/T_0$). Calcoliamo la funzione di correlazione, la potenza e lo spettro di energia di questo segnale.

Il punto di partenza, trattandosi di un segnale periodico, è la determinazione del suo sviluppo in serie di Fourier: questa determinazione, in questo caso particolare, è semplice e non implica alcun calcolo in quanto, applicando le formule di Eulero, abbiamo che

$$x(t) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{2\pi f_0 t}$$

Questo significa che i coefficienti dello sviluppo sono

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A}{2} e^{j\varphi} \\ x_{-1} &= \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \\ x_n &= 0 \qquad \forall n \neq \pm 1 \end{aligned}$$

Allora, per calcolare lo spettro di energia, ci basta applicare la formula

$$S_X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 \delta(f - f_n)$$

che in questo caso dà

$$S_X(f) = |x_{-1}|^2 \delta(f - f_{-1}) + |x_1|^2 \delta(f - f_1) = \frac{A^2}{4}\delta\left(f + \frac{1}{T_0}\right) + \frac{A^2}{4}\delta\left(f - \frac{1}{T_0}\right)$$

Per quanto riguarda la potenza, possiamo calcolarla in vari modi: il primo è ovviamente la definizione, che, per segnali periodici, è

$$P_X = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt$$

Sostituendo ad x(t) la sua espressione otteniamo

$$P_X = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left|A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\right|^2 dt$$

e quindi basta risolvere quell'integrale.

Un secondo modo è quello di considerare che la potenza associata ad x(t) è pari all'area sottesa dal suo spettro di potenza, ossia

$$P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)df$$

Nel nostro caso, abbiamo perciò che

$$P_X = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{A^2}{4}\delta\left(f+\frac{1}{T_0}\right)+\frac{A^2}{4}\delta\left(f-\frac{1}{T_0}\right)\right]df = \frac{A^2}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(f+\frac{1}{T_0}\right)df + \frac{A^2}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{1}{T_0}\right)df =$$
$$= \frac{A^2}{4}+\frac{A^2}{4}=\frac{A^2}{2}$$

Un altro modo ancora è quello di utilizzare la relazione

$$P_X = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x_n|^2$$

Nel nostro caso abbiamo che

$$P_X = |x_1|^2 + |x_{-1}|^2 = \left|\frac{A}{2}e^{j\varphi}\right|^2 + \left|\frac{A}{2}e^{-j\varphi}\right|^2 = \frac{A^2}{4}+\frac{A^2}{4}=\frac{A^2}{2}$$

Un altro modo ancora sarebbe quello di calcolarci la funzione di correlazione $R_X(\tau)$ e di valutarla in $\tau=0$.

Andiamo proprio a valutare la funzione di autocorrelazione; anche qui i metodi possibili sono due: il primo è ovviamente quello di applicare la definizione; il secondo è invece quello di antitrasformare lo spettro di potenza $S_X(f)$.

Applichiamo entrambi i metodi, cominciando dalla definizione: essa dice intanto che

$$R_X(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\left(x(t-\tau)\right)^* dt$$

Sostituendo ad x(t) la sua espressione e, considerando che si tratta di un segnale reale, eliminando l'operatore di complesso coniugato, possiamo scrivere che

$$R_X(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} A\cos(2\pi f_0 t+\varphi)A\cos(2\pi f_0(t-\tau)+\varphi)dt$$

Tirando fuori dall'integrale le costanti e sviluppando meglio l'argomento del secondo Coseno abbiamo

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right) \cos\left(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau + \varphi\right) dt$$

A questo punto, l'unico modo di semplificare l'argomento dell'integrale è quello di applicare una delle *formule di prostaferesi* e precisamente

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos\beta$$

Dobbiamo perciò trovare quanto valgono α e β nel nostro caso: per esempio, imponendo che

$$\begin{cases} 2\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau + \varphi = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ 2\pi f_0 t + \varphi = \dfrac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

si trova che

$$\begin{cases} 4\pi f_0 t - 4\pi f_0 \tau + 2\varphi = \alpha + \beta \\ 4\pi f_0 t + 2\varphi = \alpha - \beta \end{cases}$$

e, sottraendo membro a membro, si ottiene

$$\begin{cases} \beta = -2\pi f_0 \tau \\ \alpha = 4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau + 2\varphi \end{cases}$$

La formula dice quindi che

$$\cos\frac{4\pi f_0 t - 4\pi f_0 \tau + 2\varphi}{2}\cos\frac{4\pi f_0 t + 2\varphi}{2} = \frac{1}{2}\cos\left(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau + 2\varphi\right) + \frac{1}{2}\cos\left(-2\pi f_0 \tau\right)$$

per cui il nostro integrale diventa

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \left[\frac{1}{2}\cos\left(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau + 2\varphi\right) + \frac{1}{2}\cos\left(-2\pi f_0 \tau\right)\right] dt =$$

$$= \frac{A^2}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \cos\left(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau + 2\varphi\right) dt + \frac{A^2}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \cos\left(-2\pi f_0 \tau\right) dt$$

Ricordando che il Coseno è una funzione pari, abbiamo che

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \cos\left(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau + 2\varphi\right) dt + \frac{A^2}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \cos\left(2\pi f_0 \tau\right) dt$$

Ma l'argomento dell'ultimo integrale non dipende dalla variabile di integrazione, per cui

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2}\cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0\tau + 2\varphi)dt + \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)$$

Ci rimane da calcolare un solo integrale: tuttavia, la funzione integranda è un Coseno integrato su un periodo, per cui l'integrale vale notoriamente 0: in conclusione, la funzione di correlazione per il nostro segnale x(t) è

$$\boxed{R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)}$$

ed è evidentemente un altro coseno.

L'altro metodo per calcolare questa funzione era quello di antitrasformare la funzione

$$S_X(f) = \frac{A^2}{4}\delta\left(f + \frac{1}{T_0}\right) + \frac{A^2}{4}\delta\left(f - \frac{1}{T_0}\right)$$

Questa operazione non è difficile, in quanto basta ricordarsi di alcune proprietà della trasformata di Fourier: in particolare, in base alla linearità possiamo scrivere che

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{4}\text{Fourier}^{-1}\left[\delta\left(f + \frac{1}{T_0}\right)\right] + \frac{A^2}{4}\text{Fourier}^{-1}\left[\delta\left(f - \frac{1}{T_0}\right)\right]$$

L'antitrasformata di un impulso unitario è pari ad 1 (questo risultato è stato ottenuto usando la proprietà di dualità e considerando che la trasformata dell'impulso unitario è pari anch'essa ad 1); in questo caso, abbiamo impulsi traslati, per cui, in base alla proprietà di traslazione in frequenza, dobbiamo introdurre un termine esponenziale che tiene conto della traslazione: quindi

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{4}e^{j2\pi\frac{1}{T_0}\tau} + \frac{A^2}{4}e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}\tau}$$

A questo punto, applicando le formule di Eulero, otteniamo

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\frac{e^{j2\pi\frac{1}{T_0}\tau} + e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}\tau}}{2} = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)$$

Naturalmente, si trova che $R_X(0)=P_X$.

ESEMPIO: AUTOCORRELAZIONE PER IL SENO

Calcoliamo adesso la funzione di correlazione del segnale $x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \varphi)$.

La definizione dice che

$$R_X(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)\left(x(t-\tau)\right)^* dt$$

per cui, sostituendo ad x(t) la sua espressione e considerando che si tratta di un segnale reale (per cui si può eliminare l'operatore di complesso coniugato), possiamo scrivere che

$$R_X(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} A\sin(2\pi f_0 t + \varphi)A\sin(2\pi f_0 (t-\tau) + \varphi)dt$$

Sviluppando l'argomento del secondo Seno, abbiamo

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sin(2\pi f_0 t + \varphi)\sin\left((2\pi f_0 t + \varphi) - 2\pi f_0 \tau\right)dt =$$

$$= \frac{A^2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sin(2\pi f_0 t + \varphi)\left[\sin(2\pi f_0 t + \varphi)\cos(2\pi f_0 \tau) - \sin(2\pi f_0 \tau)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\right]dt$$

Scomponendo adesso la funzione integranda, abbiamo

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sin(2\pi f_0 t + \varphi)\sin(2\pi f_0 t + \varphi)\cos(2\pi f_0 \tau)dt - \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sin(2\pi f_0 t + \varphi)\sin(2\pi f_0 \tau)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)dt$$

Nel primo integrale il Coseno non dipende dalla variabile di integrazione, per cui può essere portato fuori dall'integrale; lo stesso si può fare con il secondo Seno nel secondo integrale. Quindi

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{T_0}\cos(2\pi f_0 \tau)\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sin^2(2\pi f_0 t + \varphi)dt - \sin(2\pi f_0 \tau)\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sin(2\pi f_0 t + \varphi)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)dt$$

Verifichiamo adesso come il secondo integrale sia nullo:

$$\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sin(2\pi f_0 t + \varphi)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)dt = \frac{1}{(2\pi f_0 t + \varphi)}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \sin(2\pi f_0 t + \varphi)D\left[\sin(2\pi f_0 t + \varphi)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi f_0 t + \varphi)}\left[\sin(2\pi f_0 t + \varphi)\right]_{-T_0/2}^{+T_0/2} = \frac{1}{(2\pi f_0 t + \varphi)}\left[\sin(2\pi f_0 t)\cos\varphi + \sin\varphi\cos(2\pi f_0 t)\right]_{-T_0/2}^{+T_0/2} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi f_0 t + \varphi)}\left[\sin(\pi)\cos\varphi + \sin\varphi\cos(\pi) - \sin(-\pi)\cos\varphi - \sin\varphi\cos(-\pi)\right] = \frac{1}{(2\pi f_0 t + \varphi)}\left[\sin\varphi - \sin\varphi\right] = 0$$

Quindi, possiamo scrivere che

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{T_0}\cos(2\pi f_0 \tau)\int_{-T_0/2}^{+T_0/2}\sin^2(2\pi f_0 t + \varphi)dt$$

Questo integrale si può risolvere sfruttando la relazione $\sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\alpha)$: in base ad essa, abbiamo infatti che

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{T_0}\cos(2\pi f_0 \tau)\int_{-T_0/2}^{+T_0/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)\right)dt = \frac{A^2}{2T_0}\cos(2\pi f_0 \tau)\int_{-T_0/2}^{+T_0/2}dt + \frac{A^2}{2T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2}\cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)dt$$

Il secondo integrale è nullo in quanto la funzione integranda è un Coseno e l'intervallo di integrazione è un periodo: resta perciò

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2T_0}\cos(2\pi f_0 \tau)\int_{-T_0/2}^{+T_0/2}dt = \frac{A^2}{2T_0}\cos(2\pi f_0 \tau)T_0 = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

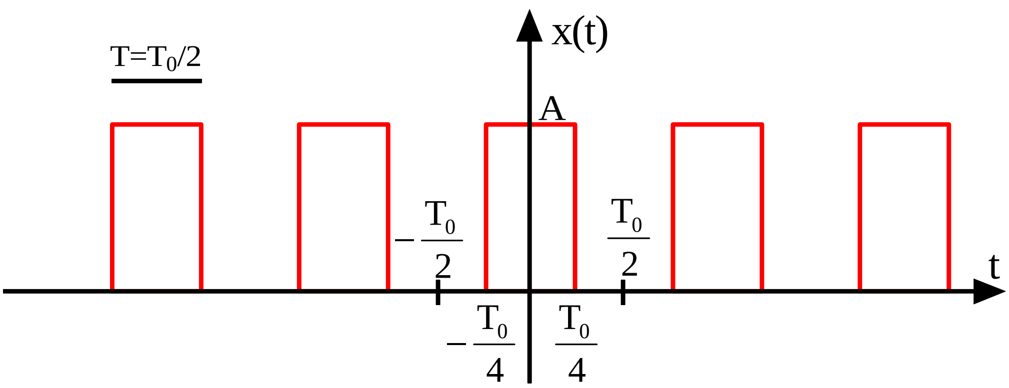
Quindi, la funzione di correlazione per il segnale $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ è

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

Osserviamo subito come si tratti dello stesso identico risultato trovato per il segnale $x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \varphi)$.

ESEMPIO

Sia dato il seguente segnale (reale periodico):



Ne vogliamo lo spettro di potenza, la funzione di correlazione e la potenza.

Avendo a che fare con un segnale periodico, il punto di partenza è sempre il suo sviluppo in serie di Fourier:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

Questo sviluppo è stato calcolato già in precedenza e si era trovato che

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{A}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2} \right) \right) e^{j2\pi f_n t}$$

Noto questo sviluppo, possiamo subito calcolarci quanto vale lo spettro di potenza del segnale x(t): applicando la formula generale, abbiamo infatti che

$$S_X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{A}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2} \right) \right|^2 \delta(f - f_n)$$

Essendo il "Seno cardinale" una funzione reale, possiamo anche scrivere che

$$S_X(f) = \frac{A^2}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{n}{2} \right) \delta(f - f_n)$$

Per il calcolo della funzione di autocorrelazione, abbiamo sempre due modi e cioè applicare la definizione oppure antitrasformare $S_X(f)$. Usando questo secondo metodo, dobbiamo ancora una volta applicare una serie di proprietà della trasformata di Fourier: in base alla linearità, abbiamo che

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{n}{2} \right) \mathrm{Fourier}^{-1}[\delta(f - f_n)]$$

L'antitrasformata di un impulso traslato $\delta(f-f_n)$ è $e^{j2\pi f_n t}$, per cui concludiamo che

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{n}{2} \right) e^{j2\pi f_n \tau}$$

L'altro metodo era quello di applicare la definizione, ossia

$$R_X(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) (x(t-\tau))^* dt$$

Tuttavia, per applicare questo metodo ci servono evidentemente le espressioni di x(t) e di x(t-τ) nell'intervallo $[-T_0/2, T_0/2]$ e la cosa non risulta molto conveniente.

Per concludere, la potenza P_X è

$$P_X = R_X(0) = \frac{A^2}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{n}{2} \right)$$

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1