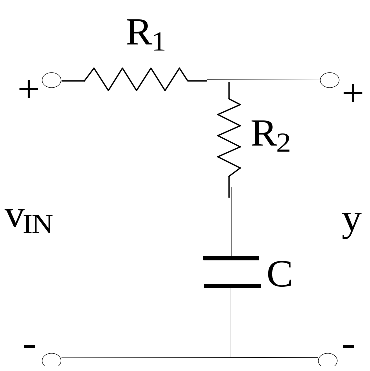
"Teoria dei sistemi" - Parte II
Concetti generali sui "sistemi"

INSIEME DEGLI EVENTI

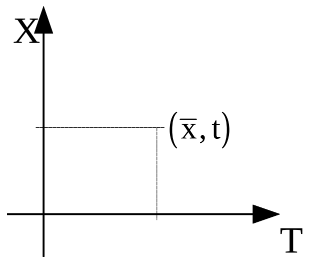
Supponiamo di avere un generico sistema e di fissare un certo istante t di osservazione; supponiamo inoltre di conoscere lo stato $\overline{x} = x(t)$ del sistema in tale istante. Allora, la coppia formata dallo stato $\overline{x}$ e dall'istante t cui esso è relativo prende il nome di "**evento**" per il sistema.

E' chiaro che t e $\overline{x}$ possono variare in modo qualsiasi all'interno dei rispettivi insiemi T e X: allora, l'insieme delle possibili coppie $(\overline{x}, t)$, ossia l'insieme di tutti i possibili eventi attraverso i quali il sistema può passare, prende il nome di "**insieme degli eventi**" del sistema in esame.

Consideriamo ad esempio la rete elettrica esaminata già in precedenza:

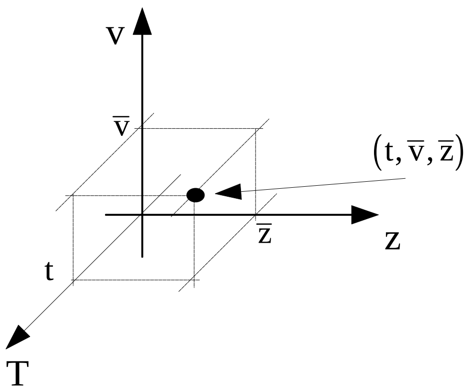


In questo caso, l'insieme T dei tempi non è altro che l'insieme $\Re$ dei numeri reali in quanto si suppone che il tempo vari con continuità; coincide anche con $\Re$ l'insieme X degli stati possibili, in quanto si tratta di tutti i possibili valori della tensione ai capi del condensatore. Di conseguenza, sia T sia X possono essere rappresentate come due rette ortogonali tra di loro:



Queste due rette individuano un piano che costituisce chiaramente l'insieme degli eventi del sistema considerato: infatti, ogni punto di tale piano corrisponde ad una coppia del tipo $(\overline{x}, t)$, ossia ad un evento possibile per il sistema.

Nel caso del sistema meccanico, invece, considerando come uscita la coppia (velocità, posizione), la situazione è diversa: infatti, mentre l'insieme T dei tempi è ancora una volta l'insieme $\Re$ dei numeri reali, l'insieme X degli stati è l'insieme delle coppie $(\overline{v}, \overline{z})$ che rappresentano la velocità e la posizione del sistema in ciascun istante; dato che sia la posizione sia la velocità possono assumere un qualsiasi valore reale, deduciamo che X coincide con $\Re^2$, per cui l'insieme degli eventi è in questo caso il seguente spazio tridimensionale:



Ogni punto di questo piano rappresenta una terna $(t, \overline{v}, \overline{z})$, ossia appunto un evento possibile per il sistema.

FUNZIONE MOVIMENTO E TRAIETTORIA

Supponiamo sempre di avere il nostro sistema e supponiamo di fissare l'istante iniziale τ; supponiamo inoltre di conoscere lo stato $\overline{x} = x(\tau)$ del sistema nell'istante τ e l'andamento $u(\bullet)$ dell'ingresso. Se noi fissiamo anche un istante di osservazione t, sappiamo che la funzione di transizione di stato φ è sempre in grado di fornirci, in modo univoco, lo stato in cui il sistema si trova all'istante t:

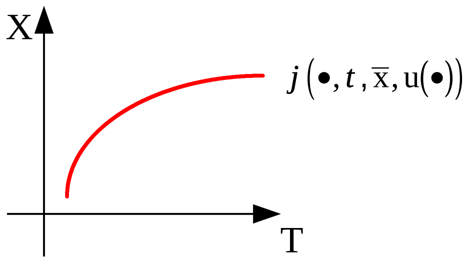
$$x(t) = \varphi\left(t, \tau, \overline{x}, u(\bullet)\right)$$

Se, invece, lasciamo t indefinito, è chiaro che la funzione di transizione di stato diventa una funzione del tempo t avente valori in X:

$$\varphi(\bullet,\tau,\bar{x},u(\bullet))\ :\ T \longrightarrow X$$

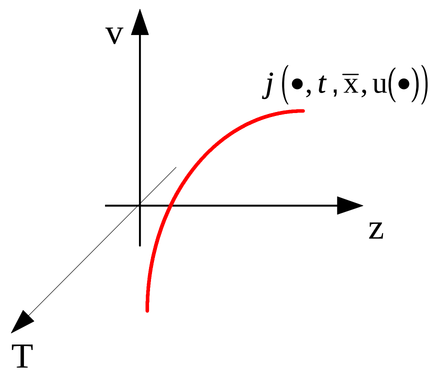
A questa funzione del tempo noi diamo il nome di "**funzione movimento**" del sistema: *essa ci fornisce come varia lo stato del sistema al variare del tempo, fissati che siano l'istante iniziale, lo stato iniziale e l'andamento dell'ingresso;* in altre parole, essa ci fornisce, per ciascun istante di tempo considerato, lo stato in cui si trova il sistema.

E' chiaro allora che questa funzione movimento può essere comodamente rappresentata nello spazio (bidimensionale, tridimensionale e così via) che costituisce l'insieme degli eventi. Per esempio, con riferimento al caso della rete elettrica, la funzione movimento sarà rappresentata da una curva nel piano (T,X):



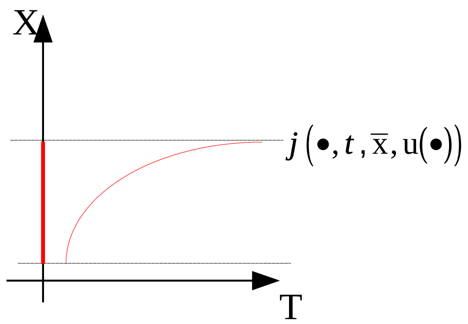
La curva "parte" dall'evento iniziale $(t,x(t))$ e "prosegue" descrivendo l'evoluzione temporale dello stato del sistema: fissato un istante finale t, la curva parte dall'evento $(t,x(t))$ e termina nell'evento $(t,x(t))$, descrivendo appunto il movimento del sistema . Ovviamente, l'equazione di quella retta è data dall'espressione della funzione di transizione di stato, fissati che siano l'istante iniziale τ, lo stato iniziale $\bar{x}$ e l'ingresso.

In modo analogo, con riferimento al sistema meccanico, la funzione movimento sarà una curva nel piano (T,v,z):

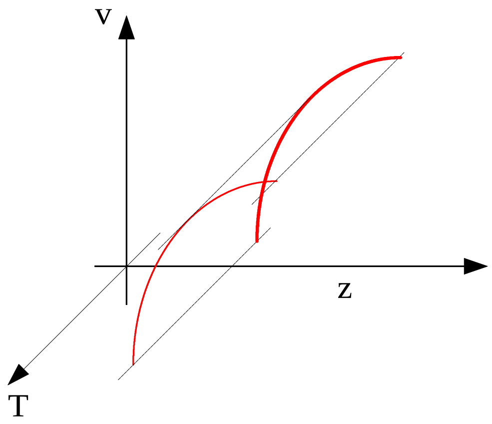


Si tratta quindi sempre di una curva nello spazio che individua l'insieme degli eventi del sistema considerato.

<u>Prende invece il nome di "**traiettoria**" del sistema la proiezione della curva della funzione movimento sui piani non dipendenti dal tempo</u>. Per esempio, nel caso della rete elettrica, si tratterà della proiezione di $j(\bullet,t,\bar{x},u(\bullet))$ sull'asse X:



Nel caso, invece, del sistema meccanico, la traiettoria del sistema sarà la proiezione della curva di $j\left(\bullet, t, \overline{x}, u(\bullet)\right)$ sul piano (v,z):



Possiamo dunque dire che ***data la funzione movimento del sistema, noi otteniamo la traiettoria del sistema svincolandoci dal tempo.***

In termini formali, possiamo scrivere che la traiettoria del sistema è costituita da tutti i punti del seguente insieme:

$$\left\{\varphi\left(t, \tau, \overline{x}, u(\bullet)\right) \middle| t \geq \tau\right\}$$

Facciamo osservare dunque che ***la traiettoria non racchiude tutti i possibili stati del sistema, ma solo gli stati che il sistema effettivamente raggiunge nel suo movimento.***

Per esempio, nel caso della rete elettrica, abbiamo visto che la traiettoria è solo un segmento giacente sull'asse degli stati X: mentre l'asse, nella sua totalità, rappresenta tutti i possibili stati del sistema, la traiettoria (che è rappresentata da un segmento su tale asse) indica solo quelli che vengono effettivamente raggiunti.

STATI DI EQUILIBRIO

Il concetto di "*movimento del sistema*" ci consente di introdurre un altro concetto importante, che è quello dei cosiddetti "*stati di equilibrio*": infatti, spesso è utile chiedersi, dato il sistema in esame, se esistono dei movimenti "particolari" di questo sistema; per esempio, è utile chiedersi se esiste un "movimento costante" del sistema, ossia se, fissato un istante iniziale τ, fissato il corrispondente stato iniziale $\overline{x} = x(t)$ e fissato l'andamento dell'ingresso, è possibile che il sistema permanga in $\overline{x}$ al passare del tempo.

In termini formali, possiamo dare la seguente definizione generale:

Def. *Il movimento* $x(t)=\varphi(t,\tau,\overline{x},u(\bullet))$ *del sistema, fissate le condizioni iniziali* t *e* $\overline{x}=x(t)$ *e fissato l'andamento dell'ingresso, è costante se*

$$\overline{x}=\varphi(t,\tau,\overline{x},u(\bullet)) \quad \forall t\geq\tau$$

ossia se lo stato del sistema non cambia nell'intervallo $[\tau,t[$ nonostante l'applicazione dell'ingresso. Se è soddisfatta questa condizione, noi diremo che lo stato $\overline{x}$ è uno "**stato di equilibrio**" del sistema: il motivo del termine "equilibrio" deriva appunto dal fatto che questo stato non cambia al passare del tempo.

Proviamo, ad esempio, a vedere se, nei 4 sistemi esaminati in precedenza, ci sono o meno stati di equilibrio.

Cominciamo dalla rete elettrica: in questo caso, parlare di stato equilibrio equivale a parlare di una tensione sul condensatore che rimane costante nel tempo. Quando può accadere questo? Supponiamo di fissare un certo istante iniziale τ e un certo stato iniziale $v_C(\tau)$: sappiamo che l'evoluzione di $v_C(t)$ è regolata, in ogni istante, dall'equazione differenziale

$$\frac{dv_C(t)}{dt}=-\alpha v_C(t)+\alpha v_{IN}(t)$$

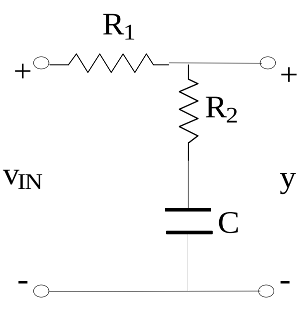
dove ovviamente l'ingresso è $v_{IN}(t)$.

Allora, affinché lo stato iniziale $v_C(\tau)$ sia di equilibrio, deve essere nulla quella derivata temporale, per cui deve risultare

$$v_C(t)=V_{IN}(t)$$

Deduciamo quindi che, per avere una tensione costante sul condensatore a partire dall'istante iniziale τ (ossia per avere un movimento costante del sistema), è necessario applicare in ingresso una tensione esattamente pari alla tensione iniziale sul condensatore.

D'altra parte, questo risultato era anche ricavabile osservando subito la rete elettrica:



Si nota infatti che, se la tensione in ingresso è pari alla tensione iniziale sul condensatore, per la LKT non ci può essere caduta di tensione sulle due resistenze, per cui la tensione sul condensatore è pari a quella in ingresso, che, a sua volta, è costante e pari alla tensione iniziale sul condensatore.

In definitiva, quindi, se noi fissiamo un istante iniziale τ, uno stato iniziale $v_C(\tau)$, avremo un movimento costante del sistema se e solo se applichiamo un ingresso costante nel tempo e pari a $v_C(\tau)$.

Per il 2° esempio la cosa è analoga, per cui passiamo ora al terzo esempio, quello della manodopera nello stabilimento: in questo caso, la relazione cui possiamo fare riferimento è

$$x(t+1) = \alpha x(t) + u(t)$$

dove x(t) è lo stato del sistema (che rappresenta il numero di dipendenti all'anno t), mentre u(t) è l'ingresso (che rappresenta il numero di assunzioni all'anno t). Ci chiediamo, allora, se, fissati un istante iniziale τ e il corrispondente stato iniziale $\overline{x} = x(t)$, è possibile che $x(\tau)$ sia uno stato di equilibrio del sistema.

Il procedimento è abbastanza analogo al caso precedente: affinché $\overline{x}$ sia uno stato di equilibrio, esso deve essere lo stesso all'anno t+1 come all'anno t, per cui deve risultare

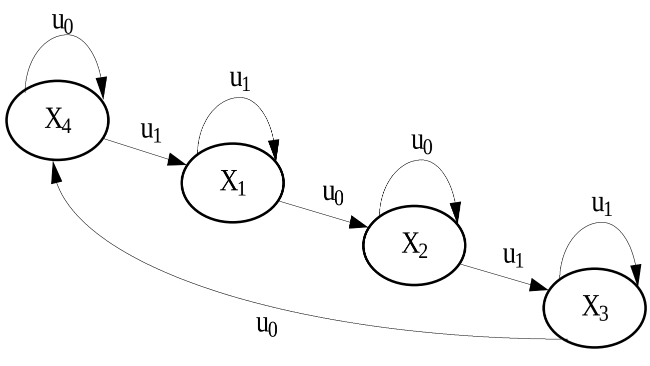
$$\overline{x} = \alpha\overline{x} + u(t)$$

Da qui si ricava che lo stato di equilibrio è

$$\overline{x} = \frac{u(t)}{1-a}$$

D'altra parte, era intuibile che fosse così: infatti, il termine $(1-\alpha)$ rappresenta il numero di abbandoni all'anno t e quindi, perché lo stato risulti costante, ossia perché il numero di dipendenti rimanga costante, è necessario assumere tanti dipendenti quanti sono quelli che hanno abbandonato.

Vediamo infine il 4° esempio. Il sistema considerato in questo esempio ha solo 4 stati ed è evidente che ciascuno di essi può essere uno stato di equilibrio: infatti, osservando il grafo di transizione



è chiaro che, ad esempio, partendo dallo stato X_4, il sistema rimane in tale stato se l'ingresso applicato è costante e uguale a u_0; stesso discorso per lo stato X_2, mentre se si parte da X_1 o da X_3, il sistema rimane in tali stati se l'ingresso è identicamente uguale a u_1.

Questo esempio è anzi molto importante in quanto mostra un criterio immediato per stabilire il numero di stati di equilibrio di un sistema:

Teorema - *Se è possibile associare, al sistema in esame, un grafo di transizione, il numero di stati di equilibrio del sistema è pari al numero di "anelli" che partono e terminano nello stesso stato*

Tutte queste considerazioni consentono di fornire una definizione generale di stato di equilibrio per un sistema:

Def. *Uno stato* $\bar{x} = x(t)$ *è uno* ***"stato di equilibrio"*** *per il sistema se e solo se esiste un ingresso* $u(\bullet) \in \Omega$ *tale che*

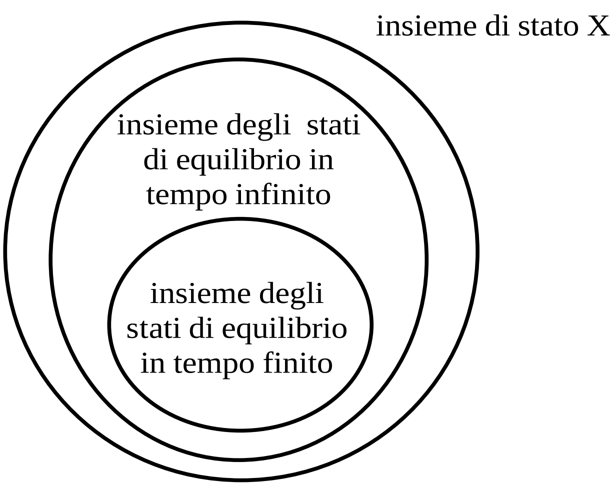
$$\bar{x} = \varphi(t, \tau, \bar{x}, u(\bullet)) \quad \forall t \geq \tau$$

A questo punto, è bene osservare che la definizione di "stato di equilibrio" appena fornita è quella cosiddetta di "stato di equilibrio in tempo infinito", in quanto essa richiede che lo stato del sistema rimanga costante per TUTTI gli istanti t successivi all'istante iniziale fissato τ. In effetti, esiste anche una definizione, peraltro del tutto analoga, che prevede la costanza dello stato per ogni sottointervallo di lunghezza finita dell'insieme dei tempi T:

Def. *Uno stato* $\bar{x} = x(t)$ *è uno* ***"stato di equilibrio in tempo finito"*** *per il sistema se e solo se, per ogni* $\begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix} \in T$*, esiste un ingresso* $u(\bullet) \in \Omega$ *(in generale dipendente da* t_1 *e* t_2*) tale che*

$$\bar{x} = \varphi(t, \tau, \bar{x}, u(\bullet)) \quad \forall t \in [t_1, t_2] \cap T$$

E' chiaro che gli stati che sono di equilibrio in tempo infinito, lo sono anche in tempo finito, per cui possiamo schematicamente suddividere l'insieme di stato X del sistema nel modo seguente:



FUNZIONE DI "MOVIMENTO DI USCITA" E USCITE DI EQUILIBRIO

Il "movimento" di un sistema può essere espresso sia in termini di evoluzione dello stato del sistema, come abbiamo fatto nel paragrafo precedente, sia anche in termini di evoluzione dell'uscita del sistema. Di conseguenza, così come, nel paragrafo precedente, ci siamo occupati degli stati di equilibrio, vogliamo adesso occuparci delle cosiddette "*uscite di equilibrio*".

Intanto, così come abbiamo definito una "funzione movimento" relativa agli stati, possiamo definire anche una *funzione movimento relativa alle uscite*: supponiamo di fissare un istante t e supponiamo di conoscere, in tale istante, lo stato x(t) del sistema ed il valore u(t) dell'ingresso; sappiamo allora che possiamo univocamente ricavare il valore y(t) dell'uscita all'istante t usando la funzione di uscita η:

$$h(x(t), u(t), t) = y(t)$$

Questa funzione, i cui valori sono quelli dell'insieme Y (che è l'insieme dei valori ammissibili per l'uscita) dipende evidentemente dai tre argomenti x(t), u(t) e t; se, però, noi fissiamo x(t) e u(t), essa risulta essere funzione solo del tempo:

$$h \; : \; T \longrightarrow \; Y$$

A questa funzione si dà il nome di "**funzione di movimento di uscita**". E' bene sottolineare che quando si parla solo di "funzione movimento", ci si riferisce agli stati (cioè quindi al "movimento di stato"), mentre invece, quando si parla di "funzione di movimenti di uscita", ci si riferisce alla funzione appena definita.

Una volta introdotta questa funzione, viene ovvio chiedersi se esistono dei "particolari" movimenti di uscita, per esempio dei movimenti costanti. In particolare, fissato il valore dell'uscita in un certo istante iniziale τ, è possibile che tale valore rimanga costante nel tempo nonostante l'applicazione di un ingresso? Se questa condizione è verificata, noi diremo che quel valore dell'uscita è una "**uscita di equilibrio**".

Per dare una definizione più formale, possiamo procedere così come abbiamo fatto per gli stati di equilibrio:

Def. *Un valore $\bar{y} = y(t)$ è una "**uscita di equilibrio**" per il sistema se e solo se, quale che sia l'istante iniziale t, esiste uno stato iniziale $\bar{x} = x(t)$ ed esiste ingresso $u(\bullet) \in \Omega$ tali che*

$$\bar{y} = \eta(\varphi(t, \tau, \bar{x}, u(\bullet)), u(t), t) \quad \forall t \geq \tau$$

Si nota subito la differenza tra questa definizione e quella di "stato di equilibrio": in questo caso, infatti, la condizione perché $\bar{y}$ sia una uscita di equilibrio richiede l'esistenza SIA di un particolare ingresso SIA anche di un particolare stato.

> N.B. Anche per le uscite, è possibile fare la distinzione tra "equilibrio in tempo finito" ed "equilibrio in tempo infinito". La definizione data poco fa è evidentemente quella per l'equilibrio in tempo infinito.

E' abbastanza ovvio chiedersi anche se possa esistere un legame tra stati di equilibrio e uscita di equilibrio: per esempio, ci si può chiedere se ad uno stato di equilibrio corrisponda sempre o meno una uscita di equilibrio e viceversa.

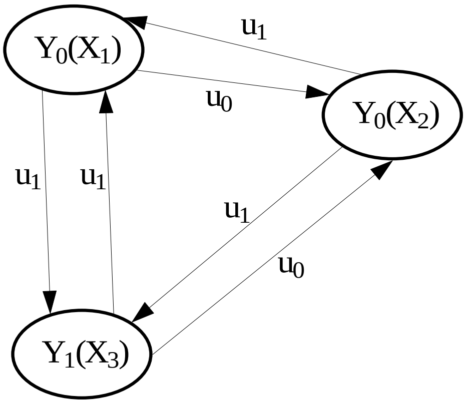
Sicuramente, la prima implicazione è verificata quando la funzione movimento di uscita dipende esclusivamente dallo stato x(t) e non dipende né dal tempo né dall'ingresso: in questo caso, risulta infatti $h(x(t)) = y(t)$ ed è quindi ovvio che, se lo stato x(t) è di equilibrio, ossia non cambia nel tempo, anche l'uscita rimane sempre la stessa.

Non è invece sempre vero il contrario, come sarà chiarito nell'esempio che sarà proposto tra un attimo.

Possiamo perciò affermare che *a stati di equilibrio corrispondono sempre uscite di equilibrio SOLO <u>quando la funzione di movimento di uscita dipende esclusivamente dallo stato</u>, mentre invece non vale l'implicazione inversa; se poi la funzione di movimento di uscita dipende anche dall'ingresso e magari dal tempo, allora nessuna delle due implicazioni è necessariamente verificata.*

Esempio

Consideriamo un sistema che può essere rappresentato mediante il seguente grafo di transizione:



Questo grafo mostra che il sistema può avere 3 diversi stati (X_1 , X_2 e X_3) e due sole uscite (Y_0 e Y_1) ed è inoltre soggetto ad un ingresso avente due possibili valori u_0 e u_1.

Possiamo subito affermare che <u>il sistema non presenta stati di equilibrio in quanto non ci sono anelli che partono e terminano in uno stesso stato</u>. Al contrario, è evidente che l'uscita Y_0 <u>può</u> essere una uscita di equilibrio: per esempio, partendo dallo stato X_1, è sufficiente applicare un ingresso del tipo

$$u_0, u_1, u_0, u_1, u_0, u_1, u_0, ..$$

perché l'uscita rimanga Y_0. Oppure, partendo dallo stato X_2, è sufficiente applicare un ingresso del tipo

$$u_1, u_0, u_1, u_0, u_1, u_0, u_1, ..$$

perché l'uscita rimanga sempre Y_0.

Esistono dunque, in questo caso, due combinazioni (stato, ingresso) che rendono l'uscita Y_0 una uscita di equilibrio. Nonostante questo, però, non ci sono stati di equilibrio, il che conferma che <u>si possono avere uscite di equilibrio anche in assenza di stati di equilibrio</u>.

PROBLEMA DELLA RAGGIUNGIBILITÀ

La ricerca degli stati di equilibrio e delle uscite di equilibrio non è l'unico aspetto del quale ci si preoccupa nello studio dei sistemi. Un altro aspetto rilevante è il problema della cosiddetta "**raggiungibilità**": supponiamo di fissare un certo istante iniziale τ e il corrispondente stato iniziale $\overline{x} = x(t)$; fissato poi un istante finale t>τ, ci chiediamo se è possibile che il sistema, all'istante t, raggiunga uno stato finale prefissato $x_1 = x(t)$.

E' evidente che, partendo dallo stato iniziale $\overline{x} = x(t)$, il sistema può raggiungere lo stato finale prefissato $x_1 = x(t)$ se e solo se esiste un istante iniziale τ ed esiste un ingresso $u(\bullet)$ tali che $x_1 = j\left(t,t,\overline{x},u(\bullet)\right)$. Sussiste allora la seguente definizione:

Def. *Uno stato $x_1 \in X$ si dice "**raggiungibile all'istante t**" se e solo se esistono un istante iniziale $\tau \le t$ ed una funzione di ingresso $u(\bullet) \in \Omega$ tali che* $x_1 = \varphi\left(t,\tau,\overline{x},u(\bullet)\right)$

Sistemi connessi

Questo problema della raggiungibilità può anche essere posto in altra forma: per esempio, fissati τ e $\overline{x} = x(\tau)$, ci si può chiedere quali stati $x_1 = x(t)$ sono raggiungibili all'istante t. E' chiaro che ci sono varie possibilità:

- un primo caso potrebbe essere quello in cui non ci sono stati, tra quelli permessi (cioè quelli appartenenti ad X), raggiungibili a partire da $\overline{x} = x(\tau)$;
- un secondo caso può essere invece quello per cui tutti gli stati possibili (cioè tutti gli stati appartenenti ad X) sono raggiungibili a partire da $\overline{x} = x(\tau)$;
- la terza possibilità è ovviamente che ci sia solo un numero finito di stati raggiungibili a partire da $\overline{x} = x(\tau)$.

Potrebbe anche sussistere la seguente proprietà: fissati l'istante iniziale τ e lo stato iniziale $\overline{x} = x(\tau)$, fissati l'istante finale t e uno stato finale $x_1 = x(t)$, il sistema può passare da $\overline{x} = x(\tau)$ a $x_1 = x(t)$ quali che siano tali stati. In altre parole, può capitare che, quale che sia lo stato iniziale fissato e quale che sia lo stato finale fissato, sia sempre possibile trovare un ingresso che trasferisca lo stato del sistema da $\overline{x} = x(\tau)$ a x_1 nell'istante t prefissato: in questo caso, si dice che il sistema è "**connesso all'istante t**". Se, poi, questa proprietà vale per qualsiasi valore dell'istante t, allora diremo semplicemente che il sistema è "**connesso**".

STATI INDISTINGUIBILI

Supponiamo di avere un generico sistema; supponiamo che, nell'intervallo [τ,t[, venga applicato al sistema un certo ingresso u(t) che noi siamo in grado di registrare e supponiamo che il sistema risponda, sempre nell'intervallo [τ,t[, con una certa uscita y(t) che noi siamo in grado di misurare . Quindi, le uniche informazioni a disposizione sul sistema sono l'ingresso applicato e la corrispondente risposta. Ci chiediamo se, a partire SOLO da queste informazioni, è possibile ricavare quale fosse lo stato iniziale del sistema.

Per esempio, supponiamo che esistano due diversi stati x' e x'' che godono della seguente proprietà:

$$\eta(\varphi(t,\tau,x',u(\bullet)),u(t),t)=\eta(\varphi(t,\tau,x'',u(\bullet)),u(t),t) \qquad \forall t\geq\tau$$

Questa proprietà dice in pratica che, se, all'istante iniziale τ, il sistema si trova nello stato x' o nello stato x'', in un qualsiasi istante t≥τ il sistema, in corrispondenza di un certo ingresso $u(\bullet)$, avrà lo stesso valore dell'uscita. Detto in altre parole, la proprietà dice che i due stati x' e x'', sotto l'applicazione dello stesso ingresso $u(\bullet)$, producono lo stesso movimento di uscita. E' chiaro che, quando accade una cosa del genere, la conoscenza dell'ingresso e dell'uscita non è in alcun modo sufficiente a farci individuare lo stato di partenza: tale stato potrebbe infatti essere x' ma anche x''.

Le cose non sono evidentemente migliori nel caso in cui questa proprietà non è specifica per un particolare ingresso $u(\bullet)$, ma vale per qualsiasi ingresso applicato al sistema: in questo caso, si dice che i due stati x' e x'' sono "**indistinguibili all'istante τ**". La definizione formale è dunque la seguente:

Def. *Due stati* $\begin{matrix}x'\\x''\end{matrix}\in X$ *si dicono "**indistinguibili all'istante** t" se e solo se, per tutte le funzioni di ingresso* $u(\bullet)\in\Omega$*, risulta che*

$$\eta\left(\varphi\left(t,\tau,x',u(\bullet)\right),u(t),t\right)=\eta\left(\varphi\left(t,\tau,x'',u(\bullet)\right),u(t),t\right) \qquad \forall t\geq\tau$$

Nel caso in cui un sistema, fissato l'istante τ, non abbia stati indistinguibili in tale istante (il che significa, in termini concreti, che l'ingresso non ha una influenza ambigua sullo stato), si dice che il sistema è in "**forma ridotta all'istante τ**": quindi, un sistema in forma ridotta all'istante τ è tale che non esista alcuna coppia di stati (x',x''), diversi tra loro, che risulti indistinguibile all'istante τ.

Se, poi, questa proprietà vale per qualsiasi istante τ, allora si dice semplicemente che il sistema è "**in forma ridotta**".

Interconnessione di sistemi

INTRODUZIONE

Supponiamo di avere due diversi sistemi S_1 ed S_2 definiti nel modo seguente:

$$S_1 = \langle T_1, U_1, \Omega_1, X_1, Y_1, \Gamma_1, j_1, h_1 \rangle$$
$$S_2 = \langle T_2, U_2, \Omega_2, X_2, Y_2, \Gamma_2, j_2, h_2 \rangle$$

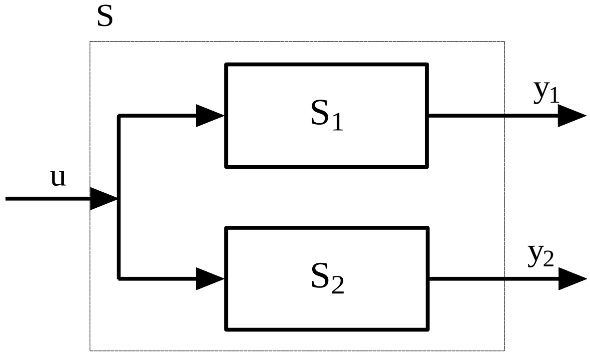
E' possibile "collegare" (o "connettere") questi due sistemi, in modi diversi che vedremo, in modo da formare un unico sistema complessivo S. Quando si fa una cosa del genere, si dice che i due sistemi sono "**interconnessi**" per formare un unico sistema ed è sempre opportuno individuare le caratteristiche del sistema complessivo: ovviamente, tali caratteristiche dipendono dalle caratteristiche dei due sistemi di partenza, che prendono adesso il nome di "**sottosistemi**" (in generale, *un "sottosistema" è un sistema che costituisce una delle parti di un sistema più complesso*).

Naturalmente, assegnati i due sottosistemi dinamici S_1 ed S_2 e fissate le "leggi di interconnessione", ossia fissato il modo con cui connetterli, non è detto che il sistema complessivo risultante sia ancora un sistema dinamico. Questo problema è estremamente delicato ed è oggi risolto soltanto per classi molto particolari di sistemi dinamici (come quella dei "sistemi lineari" che saranno descritti in seguito). Quindi, anziché dare indicazioni generali sulla interconnessione dei sistemi, intendiamo passare brevemente in rassegna quelle connessioni che potrebbero essere chiamate "**connessioni elementari**" di sistemi.

INTERCONNESSIONE IN PARALLELO

Per definizione, noi diremo che *due sistemi S_1 ed S_2 sono collegati in parallelo quando sono sottoposti allo stesso ingresso.*

Possiamo perciò schematizzare questo tipo di collegamento nel modo seguente:



La prima cosa che si osserva in questo collegamento è che esso, mentre pone un preciso vincolo per l'ingresso, che deve essere lo stesso per i due sistemi, non pone invece alcun vincolo per l'uscita: in altre parole, come uscita del sistema complessivo noi possiamo prendere qualsiasi cosa: possiamo prendere le coppie (y_1,y_2), ma possiamo anche prendere i valori y_1+y_2 oppure anche solo y_1 o y_2 e così via con tutte le altre infinite possibilità.

Come detto prima, è importante individuare quali sono le caratteristiche del sistema complessivo che abbiamo ottenuto.

Per prima cosa dobbiamo definire l’insieme dei tempi T: dato che i due sottosistemi subiscono lo stesso ingresso, è necessario che essi abbiano lo stesso insieme dei tempi e questo sarà anche l’insieme dei tempi del sistema complessivo, per cui

$$T = T_1 = T_2$$

Successivamente, dobbiamo definire l’insieme U dei valori ammissibili per l’ingresso e l’insieme Ω delle funzioni di ingresso ammissibili: in questo caso, è chiaro che, affinché entrambi i sistemi subiscano lo stesso ingresso, tale ingresso deve soddisfare sia i vincoli posti da U_1 e Ω_1 sia anche quelli imposti da U2 e Ω2; ciò non toglie, però, che tali insiemi ammettano anche altri ingressi diversi tra di loro. In altre parole, l’insieme dei valori ammissibili per l’ingresso del sistema complessivo dovrà essere l’intersezione tra i rispettivi insiemi dei valori ammissibili per l’ingresso e lo stesso discorso vale anche per l’insieme delle funzioni di ingresso ammissibili. Quindi

$$U = U_1 \cap U_2$$
$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

E’ necessario inoltre individuare l’insieme degli stati possibili per il sistema complessivo; anche in questo caso, la cosa è semplice: infatti, lo stato del sistema S deve rappresentare la memoria del sistema e tale memoria non potrà essere data altro che dalle coppie (X_1,X_2) che rappresentano la memoria dei due sottosistemi. Possiamo perciò scrivere che

$$X = X_1 \times X_2$$

Dire che X è il prodotto cartesiano di X_1 ed X_2 significa dire che ciascun elemento di X corrisponde ad una coppia di valori, uno preso da X_1 e uno preso da X_2.

A questo punto, dobbiamo definire l’insieme Y dei valori possibili per l’uscita e l’insieme Γ delle funzioni di uscita ammissibili. Qui la cosa è più “aleatoria” dei casi precedenti per il semplice fatto che è necessario prima stabilire quale uscita si voglia prendere per il sistema S: infatti, come detto prima, la definizione di collegamento in parallelo non pone alcun vincolo su tale uscita, la quale può quindi essere scelta a proprio piacimento.

Un caso semplice è quello in cui, come uscita, si prendono le coppie (y_1,y_2) di valori corrispondenti alle singole uscite dei due sottosistemi: in questo caso, così come abbiamo fatto per l’insieme di stato, sarà

$$Y = Y_1 \times Y_2$$
$$\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$$

Infine, vanno definite la funzione di transizione di stato φ e la funzione di uscita η. La definizione di φ è chiaramente collegata alla definizione data dell’insieme X: dato che l’insieme X è dato dalle coppie (x1,x2) dei possibili stati dei due sottosistemi, dovrà essere necessariamente essere

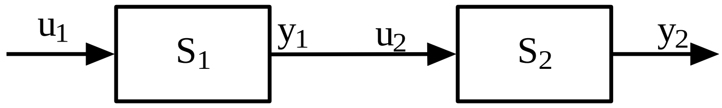
$$\varphi(t,\tau,x,u(\bullet)) = (\varphi_1(t,\tau,x_1,u(\bullet)), \varphi_2(t,\tau,x_2,u(\bullet)))$$

In modo analogo, la definizione della funzione di uscita è strettamente legata a come è stato definito l'insieme Y dei valori ammissibili per l'uscita: se prendiamo $Y = Y_1 \times Y_2$, dovrà necessariamente essere

$$h\left(x(t), u(\bullet), t\right) = \left(h_1\left(x_1, u(\bullet), t\right), h_2\left(x_2, u(\bullet), t\right)\right)$$

INTERCONNESSIONE IN CASCATA (O IN SERIE)

Un altro modo di collegare tra loro due diversi sistemi è quello rappresentato dallo schema seguente:



Si nota subito come il vincolo di interconnessione sia in questo caso rappresentato dal fatto che *l'ingresso al secondo sottosistema corrisponde all'uscita del primo sottosistema.*

Due sistemi così connessi si dice che sono "**in cascata**" o anche "**in serie**": è chiaro che il vincolo che li lega può essere descritto, in modo più formale, dicendo che

$$Y_1 = U_2$$
$$\Gamma_1 = \Omega_2$$

Possiamo adesso facilmente delineare quali sono le caratteristiche del sistema complessivo S.

Per prima cosa, l'insieme dei tempi T è necessariamente coincidente con quello dei rispettivi sottosistemi; ciò è determinato da l fatto che l'ingresso al sistema complessivo corrisponda a quello al sottosistema 1, dal fatto che l'ingresso del sottosistema 2 coincida con l'uscita del sottosistema 1 e dal fatto che l'uscita del sottosistema 2 corrisponda all'uscita del sottosistema complessivo; queste uguaglianze, infatti, implicano che risulti

$$T = T_1 = T_2$$

Inoltre, è immediato delineare gli insiemi U (insieme dei valori ammissibili per l'ingresso) e Ω (insieme delle funzioni di ingresso ammissibili): si tratta infatti degli stessi insiemi validi per il sottosistema 1, per cui

$$U = U_1$$
$$\Omega = \Omega_1$$

Per quanto riguarda, invece, l'insieme di stato X, le considerazioni da fare sono analoghe a quelle fatte per il collegamento in parallelo: dato che la memoria del sistema complessivo è data dalla memoria di entrambi i sottosistemi, deve necessariamente essere

$$X = X_1 \times X_2$$

Ancora, il discorso per gli insiemi Y (insiemi dei valori ammissibili per l'uscita) e Γ (insieme delle funzioni di uscita ammissibili) è identico a quello per l'ingresso, salvo a riferirlo al sottosistema 2: deve cioè essere

$$Y = Y_2$$
$$\Gamma = \Gamma_2$$

Restano da individuare la funzione di transizione di stato φ (che ci fornisce lo stato del sistema ad ogni istante) e la funzione di uscita η (che ci fornisce l'uscita del sistema ad ogni istante).

Cominciamo dalla funzione di transizione di stato: essa, fissati l'istante iniziale τ e l'istante finale t, fissato lo stato iniziale $\bar{x} = x(t) \in X$ e fissato l'andamento temporale dell'ingresso $u(\bullet) = u_1(\bullet)$, è in grado di determinare univocamente lo stato finale x(t) del sistema S; dobbiamo perciò trovare una funzione che abbia come unici argomenti $t, t, \bar{x}, u_1(\bullet)$. Avendo noi detto prima che $X = X_1 \times X_2$, è chiaro che la funzione di transizione di stato sarà data da due funzioni, una che fornisce lo stato finale del sottosistema S_1 e l'altra che fornisce lo stato finale del sottosistema S_2: possiamo perciò scrivere che

$$\varphi(t, \tau, \bar{x}, u_1(\bullet)) = [\varphi_1(t, \tau, \bar{x}_1, u_1(\bullet)), \varphi_2(t, \tau, \bar{x}_2, u_2(\bullet))]$$

dove chiaramente $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ sono gli istanti iniziali dei due sottosistemi.

Considerando che l'ingresso al sistema 2 l'uscita dal sistema 1, questa relazione equivale anche a

$$j\left(t, t, \bar{x}, u_1(\bullet)\right) = \left[j_1\left(t, t, \bar{x}_1, u_1(\bullet)\right), j_2\left(t, t, \bar{x}_2, y_1(\bullet)\right)\right]$$

Inoltre, l'uscita dal sistema 1 può essere ricavata tramite la funzione di uscita del sistema 1, per cui possiamo ancora scrivere che

$$\varphi(t, \tau, \bar{x}, u_1(\bullet)) = [\varphi_1(t, \tau, \bar{x}_1, u_1(\bullet)), \varphi_2(t, \tau, \bar{x}_2, \eta_1(x_1(t), u_1(\bullet), t))]$$

Non è ancora finita, in quanto dobbiamo esplicitare meglio il valore dello stato $x_1(t)$, che è lo stato finale del sistema 1: possiamo usare nuovamente la funzione di transizione di stato del sistema 1, per cui possiamo concludere che

$$\boxed{\varphi(t, \tau, \bar{x}, u_1(\bullet)) = [\varphi_1(t, \tau, \bar{x}_1, u_1(\bullet)), \varphi_2(t, \tau, \bar{x}_2, \eta_1(\varphi_1(t, \tau, \bar{x}_1, u_1(\bullet)), u_1(\bullet), t))]}$$

Passiamo adesso alla funzione di uscita del sistema complessivo, per la quale il discorso è chiaramente abbastanza simile: questa funzione, noti che sia il valore dello stato all'istante t, il valore dell'ingresso all'istante t ed il valore dell'istante t, fornisce il valore dell'uscita all'istante t: considerando che l'uscita del sistema coincide con l'uscita del sottosistema 2, possiamo cominciare a scrivere che

$$h\left(x(t), u_1(t), t\right) = h_2\left(x_2(t), u_2(t), t\right)$$

Ma l'ingresso al sistema 2 coincide con l'uscita dal sistema 1, per cui questa diventa

$$h\left(x(t), u_1(t), t\right) = h_2\left(x_2(t), y_1(t), t\right)$$

In modo analogo a quanto fatto prima, l'uscita del sottosistema 1 può essere espressa mediante la funzione di uscita di tale sottosistema, per cui possiamo scrivere che

$$\eta(x(t),u_1(t),t)=\eta_2\left(x_2(t),\underbrace{\eta_1(x_1(t),u_1(t),t)}_{y_1(t)},t\right)$$

Infine, i due stati finali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ possono essere espressi mediante le rispettive funzioni di transizione di stato:

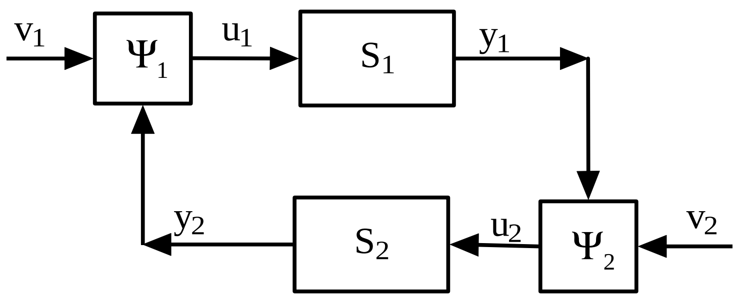
$$\eta(x(t),u_1(t),t)=\eta_2\left(\underbrace{\varphi_2(t,\tau,\overline{x}_2,y_1(\bullet))}_{x_2(t)},\eta_1\left(\underbrace{\varphi_1(t,\tau,\overline{x}_1,u_1(\bullet))}_{x_1(t)},u_1(t),t\right),t\right)$$

Compare nuovamente la $y_1(t)$, per cui possiamo ripetere il discorso fatto prima: in tal modo, possiamo concludere che la funzione di uscita del sistema complessivo è

$$\boxed{\eta(x(t),u_1(t),t)=\eta_2(\varphi_2(t,\tau,\overline{x}_2,\eta_1(\varphi_1(t,\tau,\overline{x}_1,u_1(\bullet)),u_1(t),t)),\eta_1(\varphi_1(t,\tau,\overline{x}_1,u_1(\bullet)),u_1(t),t),t)}$$

INTERCONNESSIONE IN RETROAZIONE

L'ultima possibilità che analizziamo di interconnessione di due sistemi è quella cosiddetta "**in retroazione**", rappresentata dallo schema seguente:



Il vincolo di interconnessione è in questo caso il seguente: sulla base del valore istantaneo di una variabile esterna $v_1(t)$ e del valore istantaneo di $y_2(t)$, c'è una funzione Ψ_1 che determina il valore istantaneo dell'ingresso $u_1(t)$ al sottosistema S_1; questo sottosistema produce una uscita $y_1(t)$; sulla base del valore istantaneo di $y_1(t)$ e del valore istantaneo di una seconda variabile esterna $v_2(t)$, una nuova funzione Ψ_2 determina il valore istantaneo dell'ingresso $u_2(t)$ per il sottosistema S_2; questo sottosistema produce una uscita $y_2(t)$ e il ciclo si ripete dall'inizio.

Possiamo fare, sulla base di questa descrizione, una serie di importanti osservazioni:

- intanto, lo schema appena disegnato e descritto non evidenzia perfettamente quale sia l'ingresso e quale l'uscita del sistema complessivo: il motivo è che come ingresso può essere presa una qualsiasi composizione delle variabili $v_1(t)$ e $v_2(t)$ e, allo stesso modo, come uscita può essere presa una qualsiasi composizione delle variabili $y_1(t)$ e $y_2(t)$;

- in secondo luogo, è bene sottolineare che i legami rappresentati dalle funzioni Ψ_1 e Ψ_2 sono legami algebrici e non legami integrali:

$$u_1(t) = \Psi_1[v_1(t), y_2(t), t]$$
$$u_2(t) = \Psi_2[v_2(t), y_1(t), t]$$

Vediamo adesso di individuare le caratteristiche del sistema complessivo.

Per quanto riguarda l’insieme T dei tempi, è chiaro che deve essere lo stesso dei due sistemi, per cui diciamo ancora una volta che

$$T = T_1 = T_2$$

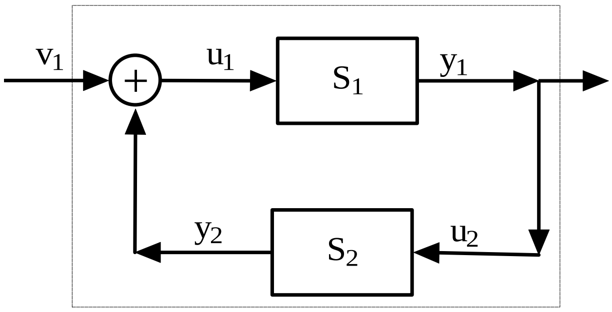
Per quanto riguarda, invece, i 4 insiemi U,Ω,Y e Γ, è chiaro che essi dipendono dal modo con cui noi definiamo l’ingresso e l’uscita del sistema, per cui non possiamo fornire un principio generale.

Infine, le funzioni di transizione di stato e di uscita η dipendono dai vincoli di interconnessione determinati dalle funzioni Ψ_1 e Ψ_2, per cui anche qui il criterio è relativo a ciascun caso.

Facciamo infine osservare che può capitare che, interconnettendo due sistemi dinamici in retroazione, il sistema complessivo che ne risulta diventi un sistema statico.

Esempio

Tanto per chiarire le idee su quale potrebbe essere un possibile collegamento in retroazione tra due sistemi, vediamo un semplice e abbastanza frequente esempio:



In questo caso, l’ingresso è una certa funzione $v_1(t)$ che va in ingresso al sistema S_1; l’uscita prodotta da questo sottosistema va direttamente in ingresso al sottosistema S_1, il quale produce a sua volta una uscita $y_2(t)$; questa uscita viene sommata all’ingresso $v_1(t)$ e il risultato della somma va in ingresso ad S_1, ripetendo il ciclo. L’uscita del sistema è rappresentata da $y_1(t)$.

Classificazione dei sistemi

INTRODUZIONE

Fino ad ora abbiamo esaminato una serie di caratteristiche generali dei sistemi dinamici. Al fine di studiare più a fondo i sistemi, è opportuno farne una "classificazione", in modo da poter estendere le nostre considerazioni non a singoli sistemi, ma a singole *classi di sistemi*, ciascuno comprendente sistemi accomunati da una qualche caratteristica comune.

SISTEMI TEMPO-INVARIANTI

Una prima grande classificazione dei sistemi si può fare sulla base di come è fatto l'insieme dei tempi T. In particolare, sussiste la seguente definizione:

*Def. Un sistema si dice "**tempo-invariante**" quando esso non modifica le proprie caratteristiche al passare del tempo*

In altre parole, questo significa che il sistema "risponde" sempre nello stesso modo, ossia ha sempre la stessa evoluzione, a prescindere dall'istante in cui noi applichiamo l'ingresso; detto ancora in altri termini, l'evoluzione del sistema non dipende dall'istante in cui viene applicato l'ingresso, ma solo dalla natura di tale ingresso: se noi applichiamo un ingresso $u(\bullet)$ all'istante τ, il sistema risponde con una certa uscita $y(\bullet)$; se, invece, noi applichiamo lo stesso ingresso in un altro istante t diverso da τ, ossia trasliamo l'ingresso, il sistema risponde con la stessa uscita, anch'essa traslata ovviamente della stessa quantità.

Un esempio immediato di sistema tempo-invariante è una rete elettrica che contenga solo elementi tempo-invarianti, come quella da noi esaminata più volte: traslando l'istante di applicazione dell'ingresso, noi otteniamo semplicemente una identica traslazione temporale dell'uscita, ma la natura di questa uscita è esattamente la stessa di quella che si ottiene quando l'ingresso non è traslato.

Lo stesso discorso vale ovviamente anche per il sistema meccanico: applicando la forza in ingresso in un certo istante τ, noi avremo un certo movimento della massa; applicando la stessa forza in un altro istante t, noi avremo lo stesso movimento, ma, ovviamente, a partire dall'istante t.

Diverso è il discorso, invece, sul terzo esempio da noi trattato, quello del costo della manodopera in uno stabilimento: in quel caso, infatti, avevamo trovato che

$$y(t) = C(t)x(t)$$

Allora, anche se x(t) (che rappresenta lo stato del sistema ed è a sua volta legato all'ingresso u) è lo stesso in due anni diversi, lo stesso non vale per C(t), che rappresenta il costo unitario annuale e che, come tale, cambia da anno ad anno. Questo, quindi, è un "**sistema tempo-variante**", proprio perché modifica le proprie caratteristiche al passare del tempo.

E' invece ancora tempo-invariante il sistema dell'esempio 4, ossia l'automa: in questo caso, infatti, l'istante in cui la sequenza di ingresso non determina l'evoluzione dell'uscita, che invece è sempre la stessa se risulta essere sempre lo stesso lo stato di partenza.

Questi discorsi spiegano dunque in modo intuitivo la definizione di sistema tempo-invariante. Tuttavia, è possibile fornire questa definizione (pag. 48) anche in modo decisamente più rigoroso; in particolare noi diremo che un sistema è "**tempo-invariante**" se gode delle seguenti 4 proprietà fondamentali:

1. la prima proprietà è che *l'insieme dei tempi T deve essere un insieme additivo*: ciò significa che, per tale, insieme, deve essere definita l'operazione di somma, ossia, in termini pratici, che, presi due qualsiasi elementi di T, la loro somma è a sua volta un elemento di T;

2. la seconda proprietà è che *l'insieme delle funzioni di ingresso W deve essere chiuso rispetto alla operazione di traslazione nel tempo*: ciò significa che, fissata una funzione di ingresso $u(\bullet)\in\Omega$ e fissato un istante $s\in T$, l'ingresso $u^S(\bullet)$ (corrispondente a $u(\bullet)$ traslato nel tempo di una quantità s) deve a sua volta appartenere a Ω, ossia deve essere un ingresso ammissibile per il sistema;

3. la terza proprietà dice che, *fissato lo stesso stato di partenza, ad un ingresso traslato nel tempo deve corrispondere una uscita traslata di tempo*: in termini formali, possiamo scrivere che

$$j\left(t,\mathit{t},\bar{x},u(\bullet)\right)=j\left(t+s,\mathit{t}+s,\bar{x},u^S(\bullet)\right)\qquad\forall t,\mathit{t},s\in T\quad\forall u(\bullet)\in\Omega$$

4. infine, la quarta proprietà dice che *la funzione di uscita h deve essere indipendente dal tempo*.

Ci soffermiamo un attimo su questa 4° proprietà: noi sappiamo che la funzione di uscita è una funzione del tipo

$$h\ :\ X\times U\times T\ \longrightarrow\ Y$$

ossia una funzione, a valori in Y, avente come argomenti lo stato del sistema all'istante t, l'ingresso del sistema all'istante t e l'istante t stesso. Allora richiedere che essa sia indipendente dal tempo equivale a richiedere che diventi una funzione del tipo

$$h\ :\ X\times U\ \longrightarrow\ Y$$

ossia una funzione a due soli argomenti.

Ci ricordiamo, inoltre, che abbiamo definito "proprio" un sistema in cui η non dipende dal valore istantaneo dell'ingresso; deduciamo, quindi, che, per un sistema proprio e tempo-invariante, la funzione di uscita è

$$h\ :\ X\ \longrightarrow\ Y$$

ossia una funzione che, noto il valore istantaneo dello stato, fornisce immediatamente il valore istantaneo dell'uscita.

E' abbastanza evidente che rientra in questa classe il sistema del 4° esempio, ossia l'automa: infatti, in quel caso, noto lo stato del sistema in un certo istante, è subito univocamente nota l'uscita in quello stesso istante.

SISTEMI TEMPO-CONTINUI

Sempre sulla base dell'insieme dei tempi è possibile fare una ulteriore classificazione dei sistemi:

Def. *Un sistema si dice "**tempo-continuo**" (o anche "**continuo nel tempo**") se il suo insieme dei tempi coincide con l'insieme dei numeri reali, mentre invece diremo che è un sistema "**tempo-discreto**" (o anche "**discreto nel tempo**") se il suo insieme dei tempi coincide con l'insieme dei numeri naturali (sia positivi che negativi)*

Ovviamente, nonostante anche la classificazione di tempo-invarianza si basi sull'insieme dei tempi, è ovvio che si tratti di due classificazioni diverse: esistono sistemi tempo-invarianti tempo-continui (come ad esempio la rete elettrica o il sistema meccanico), ma anche sistemi tempo-invarianti tempo-discreti (come l'automa), come anche esistono sistemi tempo-varianti tempo-continui e sistemi tempo-varianti tempo-discreti (come quello del costo della manodopera in uno stabilimento).

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1