Appunti di “Teoria dei sistemi”
Capitolo 3 - Gli automi

INTRODUZIONE

La prima grande classe di sistemi dinamici che prendiamo in esame è quella dei cosiddetti “automi”, nella quale rientra il circuito a relè studiato in precedenza.

Cominciamo con l’enunciare 4 caratteristiche fondamentali che individuano un sistema che chiamiamo “**automa**”:

1) si tratta di un *sistema tempo-invariante*, il che significa, in termini concreti, che esso non muta le proprie caratteristiche nel tempo;
2) si tratta di un *sistema tempo-discreto*, il che significa che l’insieme dei tempi coincide con l’insieme dei numeri naturali positivi;
3) *l’insieme U è un insieme finito*, ossia l’ingresso può assumere solo un numero finito di valori;
4) *l’insieme Y è un insieme finito*, ossia l’uscita può anch’essa assumere solo un numero finito di valori.

Oltre a questo, sappiamo che, per definire in modo completo un sistema è necessario definire tutti e 8 i seguenti oggetti:

$$\langle \mathrm{T}, \mathrm{U}, \Omega, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \Gamma, j, h \rangle$$

L’insieme dei tempi è stato definito prima; stesso discorso per l’insieme U e per l’insieme Y, che sono rispettivamente del tipo

$$\{u_0, u_1, \ldots, u_n\} \qquad n \in \mathrm{N}$$
$$\{y_0, y_1, \ldots, y_m\} \qquad m \in \mathrm{N}$$

Per quanto riguarda, invece, gli insiemi Ω (funzioni di ingresso ammissibili) e Γ (funzioni di uscita ammissibili), in generale non ci sono particolari limitazioni, nel senso che le sequenze di ingresso e di uscita ammissibili sono tutte quelle possibili.

Per quanto riguarda, poi, l'insieme di stato X, esso può essere formato da un numero finito o anche infinito di elementi; questo consente anche di fare una ulteriore classificazione degli automi:

- parleremo di "**automa finito**" quando l'insieme X è finito, ossia quando gli stati possibili per il sistema sono in numero finito (come nel caso dell'automa corrispondente al circuito a relè);
- parleremo invece di "**automa infinito**" quando l'insieme X comprende un numero infinito di elementi.

Gli automi finiti sono particolarmente importanti in quanto, come già visto nel caso del circuito a relè, la loro funzione di transizione di stato φ può essere rappresentata comodamente mediante un "**grafo di transizione**" (oppure tramite una corrispondente tabella).

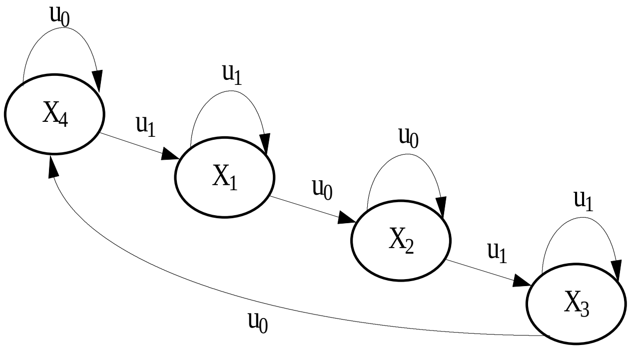
Infine, per quanto riguarda la funzione di uscita η, non ci sono particolari specifiche su di essa.

FUNZIONE DI TRANSIZIONE DI STATO AD UN PASSO

Abbiamo dunque detto che un automa finito, cioè con numero di stati finito, ha una funzione di transizione di stato che può essere comodamente rappresentata con un grafo di transizione; questo grafo di transizione presenta due caratteristiche fondamentali:

- intanto, esso è costituito da tanti "**nodi**" (o "**vertici**") quanti sono i possibili stati del sistema;
- inoltre, da ogni nodo si dipartono tanti "**archi orientati**" quanti sono i valori possibili per l'ingresso.

Al posto del grafo di transizione, è anche possibile esprimere la funzione di transizione di stato mediante una "**tabella di transizione**". Se facciamo riferimento al circuito a relè esaminato in precedenza, ossia ad un sistema il cui grafo di transizione è



la tabella di transizione è evidentemente fatta nel modo seguente:

	u_0	u_1
X_4	X_4	X_1
X_1	X_2	X_1
X_2	X_2	X_3
X_3	X_4	X_3

In corrispondenza di ciascuna coppia (stato iniziale, valore istantaneo dell’ingresso), la tabella fornisce lo stato di arrivo.

Il grafo di transizione e la tabella di transizione sono dunque perfettamente equivalenti tra di loro. E’ bene però osservare che essi presentano una leggere differenza con la funzione di transizione di stato: è evidente, infatti, che essi non tengono conto in alcun modo dell’istante iniziale τ e dell’istante finale t, mentre tengono conto solo dello stato iniziale e del valore dell’ingresso. In questo senso, noi diciamo che *sia il grafo di transizione sia la tabella di transizione rappresentano una funzione $d(\mathrm{x(t)}, \mathrm{u(t)})$ che, noto lo stato ad un certo istante t e noto il valore dell’ingresso all’istante t, fornisce lo stato all’istante successivo $\mathrm{x(t+1)} = d(\mathrm{x(t)}, \mathrm{u(t)})$.*

Questa funzione, che quindi è leggermente diversa dalla funzione di transizione di stato φ, prende il nome di “**funzione di transizione di stato ad un passo**”. E’ evidente, comunque, che questa funzione fornisca una descrizione implicita della funzione di transizione di stato ed è in questo senso che, dovendo descrivere un automa, è possibile specificare δ al posto di φ. Questo deriva dal fatto che un automa è per definizione un sistema tempo-invariante, ossia un sistema con caratteristiche indipendenti dal tempo.

FUNZIONE DI USCITA DI UN AUTOMA: AUTOMI PROPRI ED IMPROPRI

Fino ad ora, nella descrizione degli automi, non abbiamo fatto alcun cenno alla funzione di uscita η, che, ricordiamo, è una funzione che, a partire dallo stato del sistema all’istante t, dal valore dell’ingresso all’istante t e dall’istante t stesso, fornisce il valore dell’uscita all’istante t:

$$h \; : \; \mathrm{X} \times \mathrm{U} \times \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{Y}$$

La prima cosa che possiamo dire su tale funzione è che, essendo l’automa un sistema tempoinvariante, <u>essa non dipende dal tempo</u>, ossia dall’istante t, per cui è una funzione del tipo

$$h \; : \; \mathrm{X} \times \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{Y}$$

Per quanto riguarda, invece, la dipendenza dallo stato e dall’ingresso, possiamo distinguere due casi:

- quando η dipende sia dallo stato x(t) sia dal valore dell’ingresso u(t), allora noi diremo che l’automa è “**improprio**”;
- viceversa, quando η dipende SOLO dallo stato x(t), allora diremo che l’automa è “**proprio**”.

Spesso, un automa proprio prende il nome di “**macchina di Moore**”, mentre un automa improprio prende il nome di “**macchina di Mealy**”.

Per quanto riguarda gli automi propri, il fatto che la funzione di uscita η non dipenda dall’ingresso consente di esprimere tale funzione mediante una tabella che, a ciascuno stato, associa la corrispondente uscita; se facciamo riferimento ancora una volta all’automa che descrive il funzionamento del circuito a relè, questa tabella è fatta nel modo seguente:

X_4	Y_0
X_1	Y_1
X_2	Y_3
X_3	Y_2

Al contrario, quando l'automa in esame è improprio, è possibile utilizzare questa stessa tabella, con la differenza che è necessario specificare anche i valori possibili per l'ingresso:

	u_0	u_1	...	u_N
X_1	..	..	..	..
X_2	..	..	..	..
...	..	..	..	..
X_m	..	..	..	..

Ogni cella di questa tabella indica il valore dell'uscita che si ottiene partendo dallo stato indicato dalla riga e applicando al sistema l'ingresso indicato dalla colonna.

Se, al posto di usare la tabella per rappresentare la funzione di uscita, vogliamo usare direttamente il grafo, possiamo procedere nel modo seguente:

- se l'automa è proprio, in corrispondenza di ciascun nodo, ossia di ciascuno stato, possiamo indicare la corrispondente uscita;
- se, invece, l'automa è improprio, allora, dato il generico stato, indicheremo su ciascun arco che parte da esso, ossia in corrispondenza di ciascun valore possibile per l'ingresso, il corrispondente valore dell'uscita.

Per concludere sugli automi propri ed impropri, citiamo il seguente teorema:

Teorema: *Ogni automa proprio si può (banalmente) trasformare in un automa improprio e, viceversa, ogni automa improprio si può (meno banalmente) trasformare in un automa proprio*

Esempio: macchina distributrice di bibite

Allo scopo di comprendere bene cosa ci dice questo teorema, consideriamo un esempio concreto.

Supponiamo di avere una macchina per la distribuzione automatica di bibite; supponiamo che tutti i tipi di bibita costino £400 e che la macchina accetti solo monete da £100. Vogliamo analizzare il comportamento di questa macchina.

Considerando la macchina come un sistema che ha come ingresso l'inserimento delle monete e come uscita la consegna di una bibita, vediamo quali sono le caratteristiche di questo sistema: dobbiamo cioè specificare gli 8 oggetti

$$\langle \mathrm{T}, \mathrm{U}, \Omega, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \Gamma, j, h \rangle$$

Come insieme dei tempi, possiamo supporre che l'inserimento delle monete possa avvenire in istanti discreti successivi, per cui T coincide con l'insieme dei numeri naturali.

L'ingresso del sistema è costituito dall'inserimento delle monete, per cui l'insieme U consta solo di due valori: u_0 corrisponde a non inserire alcuna moneta, mentre u1 corrisponde ad inserire una moneta.

Per quanto riguarda l'insieme Ω delle funzioni di ingresso ammissibili, è chiaro che non ci sono particolari vincoli per la sequenza di ingresso, in quanto noi possiamo inserire o non inserire monete nel modo che più ci piace. Questo insieme, quindi, è del tutto generico.

Riguardo l'insieme di stato X, invece, è evidente che lo stato del sistema, dovendo rappresentare la memoria del sistema, corrisponde al numero di monete situate nella gettoniera; i valori possibili di questo insieme sono allora i seguenti:

- x_0: nessuna moneta si trova nella gettoniera;
- x_1: 1 moneta si trova nella gettoniera;
- x_2: 2 monete di trovano nella gettoniera;
- x_3: 3 monete si trovano nella gettoniera.

E' chiaro che non c'è uno stato corrispondente a 4 monete nella gettoniera, in quanto, partendo da 3 monete, se la macchina riceve una 4° moneta, essa fornisce la bibita e svuota la gettoniera. Quindi, l'insieme di stato è costituito da 4 possibili valori.

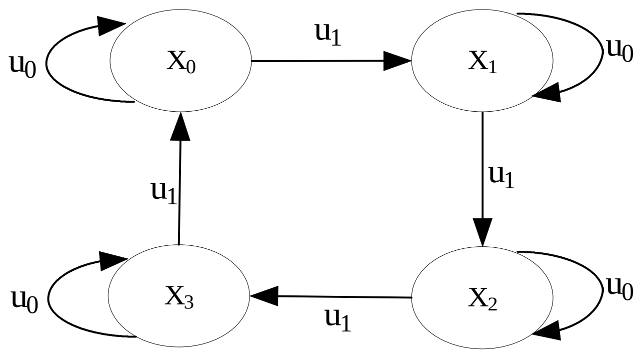
Per quanto riguarda gli insiemi Y e Γ, il discorso è analogo a quanto visto per l'ingresso: l'insieme Y contiene solo due valori, in quanto la macchina o non fornisce alcuna bibita (y_0), in quanto non sono state ancora raccolte 4 monete, oppure fornisce una bibita (y_1), in quanto il numero di monete è arrivato a 4; per quanto riguarda, invece, l'insieme Γ, non ci sono nemmeno qui particolari vincoli sulla sequenza di uscita, visto che tutto dipende da quante monete noi inseriamo e dagli istanti in cui le inseriamo.

Restano infine da definire la funzione di transizione di stato φ e la funzione di uscita η. Prima di fare questo, però, è evidente che le caratteristiche fino ad ora elencate per il sistema in esame indicano che si tratta di un ***automa***: infatti, si tratta di un *sistema tempo-invariante*, dato che le sue caratteristiche rimangono invariate nel tempo, *tempo-discreto*, in quanto T coincide con l'insieme dei numeri naturali, con gli insiemi di ingresso U e di uscita Y contenenti ciascuno un numero finito di elementi.

Si tratta, inoltre, di un ***automa finito***, in quanto l'insieme di stato X comprende un numero finito di elementi (in particolare 4): questo fatto ci è utile in quanto ci dice che possiamo rappresentare la funzione di transizione di stato mediante un grafo orientato. Vediamo perciò come è fatto questo grafo:

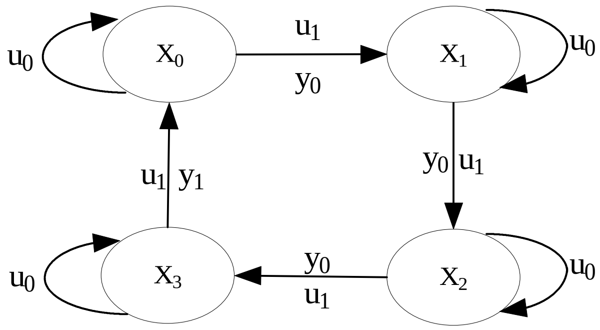
- il numero di nodi è pari al numero di stati;
- da ciascun nodo partono 2 soli archi orientati, tanti quanti sono i valori possibili dell'ingresso;
- partendo dallo stato x_0 (corrispondente a 0 monete nella gettoniera), applicando l'ingresso u_0 (ossia non inserendo alcuna moneta) si permane nello stesso stato, mentre applicando l'ingresso u_1 (cioè inserendo una moneta) si passa allo stato x_1;
- partendo dallo stato x_1 (corrispondente a 1 moneta nella gettoniera), applicando l'ingresso u_0 si permane nello stesso stato, mentre applicando l'ingresso u_1 si passa allo stato x_2;
- partendo dallo stato x_2 (2 monete nella gettoniera), applicando l'ingresso u_0 si permane nello stesso stato, mentre applicando l'ingresso u_1 si passa allo stato x_3;
- partendo dallo stato x_3 (3 monete nella gettoniera), applicando l'ingresso u_0 si permane nello stesso stato, mentre applicando l'ingresso u_1 si passa nuovamente allo stato x_0, in quanto la macchina fornisce la bibita e svuota la gettoniera.

Il grafo è fatto dunque nel modo seguente:



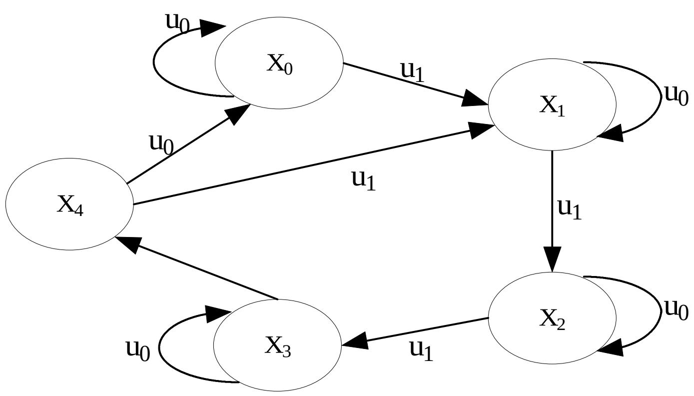
Questo grafo mette subito in evidenza il fatto che tutti e 4 gli stati del sistema sono stati di equilibrio, nel senso che ci sono delle particolari sequenze di ingresso che possono lasciare inalterato lo stato del sistema nel tempo.

Il grafo può essere anche perfezionato indicando i valori delle uscite: è chiaro infatti che l'unico caso in cui noi abbiamo la fornitura di una bibita si ha quando, partendo dallo stato X_3, applichiamo l'ingresso u_1, mentre, in tutti gli altri casi, non c'è mai fornitura della bibita. Possiamo di conseguenza perfezionare il grafo nel modo seguente:

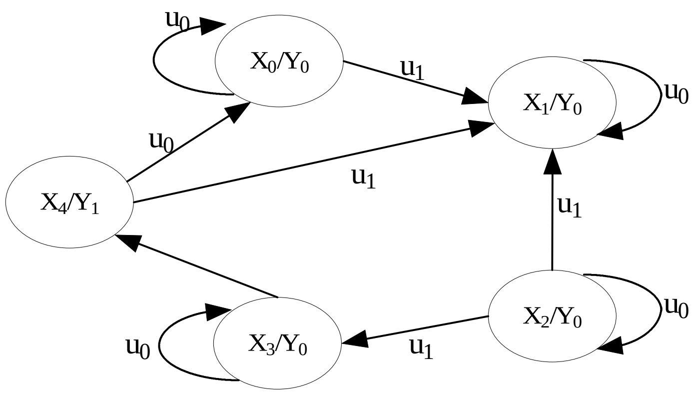


E' chiaro dunque che l'automa considerato è improprio: infatti, in ciascun istante, il valore dell'uscita dipende sia dallo stato di partenza sia anche dall'ingresso applicato in tale istante; per esempio, se il sistema, in un certo istante, è nello stato X_0 e noi applichiamo l'ingresso u_0, il sistema permane in tale stato, ma non fornisce alcuna bibita, per cui è necessario associare il valore dell'uscita, oltre che allo stato, anche al valore dell'ingresso.

Adesso, se volessimo trovare un grafo proprio equivalente a quello, sarebbe sufficiente aggiungere uno stato in più corrispondente a X_4, ossia alla situazione in cui ci sono 4 monete nella gettoniera. Così facendo, il grafo diventa il seguente:



In questo caso, i valori delle uscite possono essere associati direttamente a quelli dello stato, in quanto l’unico caso in cui c’è la fornitura della bibita è quando ci sono 4 monete nella gettoniera:



Anche se si tratta di un caso semplice, si intuisce comunque che il passaggio dall’automa proprio a quello improprio è immediato, mentre quello dall’automa proprio a quello improprio lo è di meno.

Stati di equilibrio e uscite di equilibrio

Dal grafo di transizione associato ad un automa è immediato dedurre se e quali sono eventuali stati di equilibrio ed eventuali uscite di equilibrio del sistema.

Ricordiamo intanto che uno stato $\overline{\mathrm{x}}$ di un sistema si definisce “*stato di equilibrio*” quando esiste almeno una funzione di ingresso tale che lo stato del sistema rimanga invariato al passare del tempo: analiticamente, questo corrisponde a dire che

$$\exists \mathrm{u}(\bullet) \in \Omega: \quad \overline{\mathrm{x}} = \varphi\left(\mathrm{t}, \tau, \overline{\mathrm{x}}, \mathrm{u}(\bullet)\right) \quad \forall \mathrm{t} \geq \tau$$

Dato il grafo di transizione associato al sistema, gli stati di equilibrio si individuano in modo immediato: il numero di stati di equilibrio è infatti pari al numero di archi, nel grafo, che partono e si chiudono sullo stesso nodo; ciascun nodo che presenta questa caratteristica è uno stato di equilibrio.

C’è poi anche il concetto di uscita di equilibrio: un valore $\overline{\mathrm{y}}$ dell’uscita è una “*uscita di equilibrio*” del sistema quando esiste almeno una funzione di ingresso tale che l’uscita del sistema rimanga invariata nel tempo: in termini formali, deve cioè accadere che

$$\exists \mathrm{u}(\bullet) \in \Omega \;\; \exists \overline{\mathrm{x}} \in X \;:\; \overline{\mathrm{y}} = h\left(\varphi\left(\mathrm{t}, \tau, \overline{\mathrm{x}}, \mathrm{u}(\bullet)\right), \mathrm{u}(\mathrm{t}), \mathrm{t}\right) \quad \forall \mathrm{t} \geq \tau \quad \forall \tau \in T$$

Anche le uscite di equilibrio si possono individuare subito mediante il grafo di transizione:

- se l’automa è proprio, ossia se a ciascuno stato corrisponde una precisa uscita, allora una uscita sarà di equilibrio se esiste nel grafo un percorso (cioè una sequenza di nodi) in cui tutti i nodi sono caratterizzati dalla stessa uscita;
- se, invece, l’automa è improprio, ossia se il valore dell’uscita dipende sia dallo stato sia dal valore dell’ingresso, allora una uscita sarà di equilibrio se esiste nel grafo un percorso i cui archi corrispondono tutti alla stessa uscita.

REVERSIBILITÀ DEGLI AUTOMI

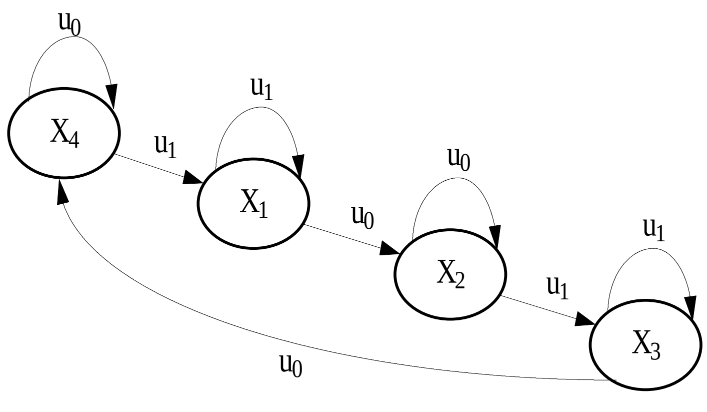
Ricordiamo intanto quando un sistema si dice reversibile e quando irreversibile. Intanto, tutti i sistemi, in particolare tutte le funzioni di transizioni di stato, godono della proprietà di irreversibilità, secondo cui, fissati l'istante iniziale τ, l'istante finale $t \geq \tau$, lo stato iniziale $x(\tau)$ e l'andamento dell'ingresso, la funzione φ è sempre in grado di fornire in modo univoco il valore dello stato all'istante t. Viceversa, non sempre i sistemi sono reversibili, ossia godono della proprietà di irreversibilità all'indietro: un sistema è reversibile se, fissati l'istante iniziale τ e l'istante finale t, noto lo stato $x(t)$ e noto l'andamento dell'ingresso, la funzione φ fornisce univocamente il valore dello stato all'istante τ. In altre parole, un sistema è reversibile se la sua funzione di transizione di stato è in grado di andare anche a ritroso, ossia di ricostruire l'evoluzione del sistema anche all'indietro.

Ci chiediamo allora come si fa a capire se un automa è reversibile o meno. Anche in questo caso, ci viene in aiuto il grafo di transizione: supponiamo di fissare lo stato $x(\tau)$ e di individuare quindi sul grafo il corrispondente nodo; è chiaro che il grafo ci potrà fornire lo stato in cui il sistema si trovava all'istante immediatamente precedente a τ se e solo se, nel nodo corrispondente a $x(\tau)$, convergono archi corrispondenti ciascuno ad un diverso valore dell'ingresso: in questo caso, infatti, noto il valore dell'ingresso che ha portato in $x(\tau)$, è immediato ricavare lo stato precedente. Viceversa se ci sono almeno due rami in corrispondenza dello stesso ingresso, è ovvio che non sarà mai possibile individuare lo stato da cui il sistema può essere partito per giungere a $x(\tau)$ in corrispondenza di tale ingresso.

Quindi, riassumiamo dicendo che *un automa è reversibile se in ogni nodo del grafo di transizione convergono archi corrispondenti ciascuno a valori diversi dell'ingresso.*

Se anche un solo nodo del grafo viola questa condizione, l'automa è irreversibile.

Per esempio, consideriamo il solito grafo associato al circuito a relè più volte esaminato:



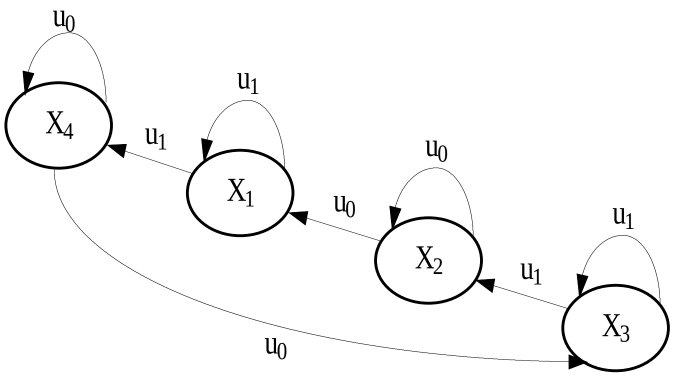
Questo automa è chiaramente irreversibile: infatti, in ciascun nodo convergono due rami corrispondenti allo stesso valore dell'ingresso.

Esiste anche un altro criterio abbastanza rapido per stabilire se un automa sia reversibile o meno e vediamo di che si tratta.

Intanto, il fatto che ogni sistema, e quindi ogni automa, debba godere della proprietà di irreversibilità in avanti, implica che, dato il grafo associato all'automa, da ogni nodo debbano partire tanti rami quanti sono i possibili valori dell'ingresso (ed ovviamente ogni ramo deve corrispondere ad un valore diverso dell'ingresso). Allora, il criterio per stabilire se un automa gode anche dell'irreversibilità all'indietro, cioè sia irreversibile, è il seguente:

- in primo luogo, dato il grafo associato all’automa, si inverte l’orientazione di ciascun arco;
- si ottiene in tal modo un nuovo grafo orientato: se esso gode della proprietà di irreversibilità in avanti, allora l’automa considerato è reversibile; viceversa, se la proprietà di irreversibilità in avanti non è verificata, l’automa non è reversibile.

Proviamo ad esempio ad applicare questo criterio al grafo del circuito a relè; invertendo l’orientazione degli archi, otteniamo il seguente grafo:



E’ evidente che questo grafo non gode della proprietà di irreversibilità in avanti: preso, infatti, un qualsiasi nodo, da esso partono due rami in corrispondenza dello stesso valore dell’ingresso.

PROBLEMA DELLA “RAGGIUNGIBILITÀ” NEGLI AUTOMI FINITI

Dato sempre un generico automa, la domanda che ci poniamo adesso è la seguente: fissato un certo istante iniziale τ e un certo stato di partenza x’=x(τ), ci chiediamo cosa deve accadere perché l’automa, in un istante t prefissato, raggiunga un altro stato x’’.

La prima osservazione che possiamo fare è che, essendo un automa un sistema tempo-invariante, non conta quali siano, in assoluto, l’istante di partenza τ e l’istante di arrivo t, ma conta solo l’ampiezza dell’intervallo [τ,t], in quanto tale ampiezza determina il numero di passi che il sistema ha a disposizione per passare dal primo al secondo stato. Inoltre, se l’istante τ viene lasciato del tutto generico, non conta nemmeno l’ampiezza dell’intervallo [τ,t], che sarà ovviamente preso sufficientemente grande.

Premesso questo, facciamo riferimento ad un automa finito, ossia ad un automa il cui insieme di stato X è costituito da un insieme finito di elementi: ciò comporta che la funzione di transizione di stato del sistema possa essere rappresentata mediante un grafo di transizione. Allora *perché un certo stato x’’ sia raggiungibile a partire da un certo stato x’ è necessario che, nel grafo di transizione, esista almeno un percorso (composto da nodi e archi) che congiunga i due stati.*

Dire che deve esistere questo percorso equivale, evidentemente, a dire che, fissato x’, esiste almeno un ingresso che porti il sistema da x’ ad x’’ in un certo numero di passi; il numero di passi necessari dipende ovviamente dal percorso.

Un caso particolare si ha quando il suddetto percorso esiste quali che siano i due stati x’ e x’’ fissati: questo significa che il sistema, a partire da un qualsiasi stato, è sempre in grado di passare ad un qualsiasi altro stato. In questo caso, il sistema si definisce “**connesso**”. Un esempio di sistema connesso è quello del circuito a relè o anche quello della macchina distributrice di bibite.

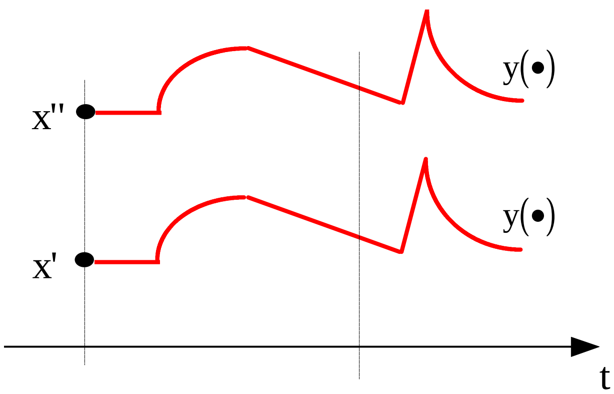
PROBLEMA DELLA INDISTINGUIBILITÀ NEGLI AUTOMI

Riepiloghiamo velocemente la nozione di "stati indistinguibili" e "stati distinguibili": dato il nostro generico sistema, supponiamo di avere come uniche informazioni su di esso l'ingresso applicato e la corrispondente risposta; vogliamo provare a ricavare lo stato di partenza $x(\tau)$ del sistema: questo è ovviamente possibile solo se, a parità di ingresso applicato al sistema, ciascuno degli stati del sistema produce un movimento di uscita diverso. Quindi, se noi prendiamo due stati iniziali diversi del sistema e applichiamo lo stesso ingresso, noi potremo risalire a tali stati solo se essi producono un movimento di uscita diverso, mentre non potremo certamente farlo quando essi producono un movimento di uscita uguale. Allora, nel primo caso diremo che i due stati sono "distinguibili all'istante τ", mentre nel secondo caso diremo che sono "indistinguibili all'istante τ". Il fatto di specificare l'istante τ è necessario per i sistemi generici, mentre evidentemente non serve per i sistemi tempo-invarianti.

Vogliamo allora vedere come è possibile individuare eventuali stati indistinguibili in un automa. Per fare questo, però, dobbiamo premettere una importante proprietà del tutto generale sulla indistinguibilità.

Proprietà

Abbiamo prima detto che, presa una coppia (x',x'') di stati del sistema in esame, noi diremo che essi sono indistinguibili se, in presenza dello stesso ingresso applicato, il sistema produce un movimento di uscita identico sia che parta dallo stato iniziale x' sia che parta dallo stato iniziale x''. Possiamo visualizzare graficamente questo nel modo seguente:



Questa figura mostra come, applicando lo stesso ingresso $u(\bullet)$, il sistema produce un certo movimento di uscita $y(\bullet)$ se parte dallo stato x' e lo stesso movimento di uscita $y(\bullet)$ se parte dallo stato x'': ciò significa, in altre parole, che, se noi fissiamo un certo istante t e misuriamo il valore dell'uscita, troviamo esattamente lo stesso valore a prescindere che lo stato iniziale fosse x' o x''.

Supponiamo allora, fissato questo istante generico t successivo all'istante di partenza, di andare a misurare lo stato del sistema in tale istante prima in corrispondenza dello stato iniziale x' e poi in corrispondenza dello stato iniziale x'': indichiamo allora con x_1 e x_2 i corrispondenti valori. Ci chiediamo se questi due stati siano indistinguibili o meno. La risposta è ovviamente affermativa, in quanto, se noi consideriamo il movimento di uscita del sistema a partire dall'istante t, esso è ovviamente lo stesso in quanto, per ipotesi, erano già x’ e x’’ indistinguibili. D’altra parte, non può che essere così: infatti, se x_1 e x_2 fossero distinguibili, noi potremmo individuarli e quindi potremmo anche individuare x’ e x’’, cosa che, invece, non possiamo fare per ipotesi.

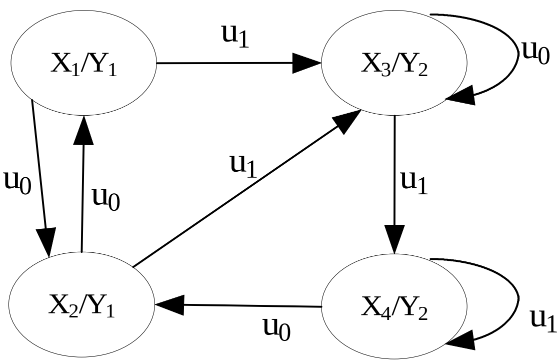
La proprietà che abbiamo dimostrato è dunque la seguente: *dati due stati indistinguibili, fissato un ingresso per il sistema, individuato il movimento di uscita del sistema (uguale nei due casi) e fissato un qualsiasi istante t successivo all’istante iniziale, i due corrispondenti stati del sistema all’istante t sono a loro volta indistinguibili.*

Detto anche in altre parole, se il sistema, in corrispondenza di uno stesso ingresso, parte prima da uno stato x’ e poi da uno stato x’’, indistinguibile dal primo, tutti gli altri stati attraverso i quali passa il sistema durante la sua evoluzione sono a loro volta indistinguibili.

Individuazione degli stati indistinguibili negli automi finiti propri

Fatta questa necessaria premessa, vogliamo ora descrivere un criterio che consenta di individuare tutte le eventuali coppie di stati indistinguibili presentate da un automa finito. Ci riferiamo ad un automa finito, per il quale cioè si possa usare il grafo di transizione, in quanto tale criterio si basa proprio sul grafo di transizione.

Per comprendere bene questo criterio, facciamo riferimento direttamente ad un esempio. In particolare, supponiamo che il sistema in esame abbia come grafo di transizione il seguente:



Questo grafo mette subito in evidenza le caratteristiche fondamentali di questo sistema:

- l’insieme di ingresso è $U=\{u_0,u_1\}$;
- l’insieme di uscita è $Y=\{y_1,y_2\}$
- l’insieme di stato è $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$
- l’automa è proprio, in quanto le uscite sono indicate direttamente nei nodi;
- gli stati x_4 e x_3 sono gli unici stati di equilibrio;
- l’automa è reversibile (in quanto non c’è alcun nodo dal quale partano rami in corrispondenza dello stesso valore dell’ingresso).

Il problema che ci poniamo è di determinare eventuali coppie di stati indistinguibili.

Il primo passo corrisponde a disegnare una tabella in cui riportiamo, sia sulle righe sia sulle colonne, gli stati possibili del sistema:

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	•			
X_2		•		
X_3			•	
X_4				•

E' chiaro che ciascuna casella di questa tabella corrisponde ad una coppia di stati. Allora, noi porremo, in ciascuna casella, un segno X se la corrispondente coppia di stati è fatta da stati distinguibili, mentre, in caso contrario, ossia in caso i due stati siano indistinguibili, lasceremo la casella vuota. Vediamo perciò in base a quale criterio possiamo condurre la nostra analisi.

Intanto, non ha senso considerare le caselle della diagonale, in quanto corrispondono alle coppie (X_1,X_1), (X_2,X_2), (X_3,X_3) e (X_4,X_4) ed è evidente che ciascuno stato è indistinguibile da se stesso. Ecco perché, nella tabella, abbiamo contrassegnato con dei "•" tali caselle. Oltre a questo, è chiaro che la tabella è simmetrica rispetto alla diagonale, per cui ci basta esaminare o la parte superiore o quella inferiore.

Cominciamo allora ad individuare quelle coppie di stati che sono certamente distinguibili: si tratterà evidentemente di coppie di stati cui corrispondono valori diversi dell'uscita. Abbiamo dunque quanto segue:

- alla coppia di stati (X_1,X_3) corrisponde la coppia di uscite (Y_1,Y_2); essendo tali uscite diverse, è chiaro che i due stati sono distinguibili;
- alla coppia di stati (X_1,X_2) corrisponde la coppia di uscite (Y_1,Y_1); essendo uguali tali uscite, è possibile (ma non è comunque detto) che i due stati siano indistinguibili, per cui per il momento non indaghiamo oltre su di essi;
- alla coppia di stati (X_1,X_4) corrisponde la coppia di uscite (Y_1,Y_2); essendo tali uscite diverse, i due stati sono distinguibili;
- alla coppia di stati (X_3,X_2) corrisponde la coppia di uscite (Y_2,Y_1); essendo tali uscite diverse, i due stati sono distinguibili;
- alla coppia di stati (X_3,X_4) corrisponde la coppia di uscite (Y_2,Y_2); essendo tali uscite uguali, è possibile che i due stati siano indistinguibili;
- infine, alla coppia di stati (X_4,X_2) corrisponde la coppia di uscite (Y_2,Y_1); essendo tali uscite diverse, i due stati sono distinguibili.

Abbiamo dunque esaminato tutte le possibili coppie di stati, individuando 4 coppie di stati distinguibili. Possiamo cominciare allora a riempire la tabella:

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	•		X	X
X_2		•	X	X
X_3	X	X	•	
X_4	X	X		•

Rimangono dunque da esaminare le coppie (X_1,X_2) e (X_3,X_4). Per controllare tali coppie, dobbiamo applicare la proprietà enunciata prima, ossia il fatto per cui, dati due stati indistinguibili, dato lo stesso ingresso applicato al sistema e dato un certo istante t successivo a quello iniziale, i due stati in cui si trova il sistema in tale istante devono essere necessariamente indistinguibili a loro volta. Tuttavia, nel fare questo controllo (coadiuvati da opportune tabelle), noi non considereremo sequenze indefinite di valori di ingresso finche non troviamo che i due stati sono distinguibili o indistinguibili; al contrario, noi ci fermeremo sempre alla prima sequenza e vedremo come questo sia sufficiente per completare comunque la tabella. Vediamo ad ogni modo i dettagli del nostro esempio.

Cominciamo dalla coppia (X_1,X_2):

- partendo da X_1 e applicando l'ingresso u_0, il sistema passa in X_2; partendo da X_1 e applicando l'ingresso u_1, il sistema passa in X_1;
- partendo da X_2 e applicando l'ingresso u_0, il sistema passa in X_3; partendo da X_2 e applicando l'ingresso u_1, il sistema passa in X_3.

Possiamo dunque compilare la seguente tabella relativa alla coppia di stati X_1 e X_2:

	X_1	X_2
u_0	X_2	X_1
u_1	X_3	X_3

Questa tabella dice quanto segue:

- in corrispondenza del valore u_0 dell'ingresso, i due stati portano il sistema in altri due stati sui quali, in base alla tabella generale compilata prima non abbiamo informazioni;
- in corrispondenza, invece, del valore u_1 dell'ingresso, i due stati portano il sistema nello stesso stato X_3, per cui, anche in questo caso, non abbiamo informazioni aggiuntive.

A questo punto ci fermiamo, nel senso che non facciamo ulteriori considerazioni sulla coppia (X_1,X_2). Il motivo sarà chiaro tra poco.

Passiamo alla coppia (X_3,X_4):

- partendo da X_3 e applicando l'ingresso u_0, il sistema passa in X_3; partendo da X_4 e applicando l'ingresso u_1, il sistema passa in X_2;
- partendo da X_3 e applicando l'ingresso u_0, il sistema passa in X_4; partendo da X_4 e applicando l'ingresso u_1, il sistema rimane in X_4.

Possiamo dunque compilare la seguente tabella relativa alla coppia di stati X_3 e X_4:

	X_3	X_4
u_0	X_3	X_2
u_1	X_4	X_4

Questa tabella mostra subito un risultato importante: infatti, in corrispondenza del valore u_0 dell'ingresso, i due stati portano il sistema in altri due stati che, sulla base della tabella generale compilata prima, sono distinguibili. Questo, in base alla proprietà citata prima, comporta che anche X_3 e X_4 siano necessariamente distinguibili.

Possiamo perciò ulteriormente perfezionare la tabella generale:

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	•		X	X
X_2		•	X	X
X_3	X	X	•	X
X_4	X	X	X	•

A questo punto abbiamo concluso, in quanto si può verificare facilmente che ogni eventuale altra indagine sugli stati X_1 e X_2 non porti a nessuna conclusione definitiva. Possiamo perciò concludere che tali due stati sono senz'altro indistinguibili.

In definitiva, quindi, possiamo riepilogare i passi di cui si compone questo metodo nel modo seguente:

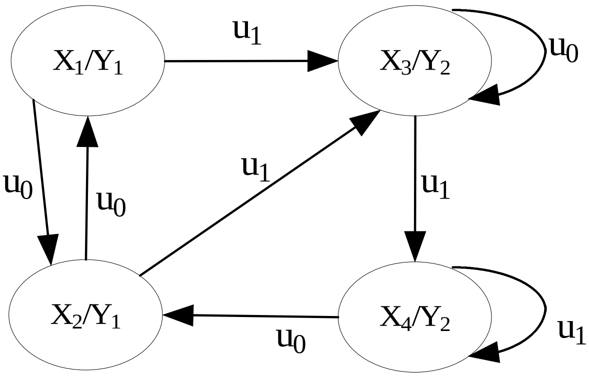
- in primo luogo, si costruisce la tabella in cui, sia sulle righe sia sulle colonne, vengono riportati tutti i possibili stati del sistema; ciascuna casella della tabella individua una coppia di stati; le caselle della diagonale corrispondono alle coppie del tipo (X_i,X_i) e tale diagonale divide la tabella in due parti perfettamente simmetriche tra di loro (per cui è sufficiente compilare una sola delle due parti);
- in secondo luogo, si individuano immediatamente le coppie di stati certamente distinguibili: si tratta di quegli stati cui corrispondono valori diversi dell'uscita;
- le caselle che, a questo punto, sono rimaste vuote corrispondono a coppie di stati che possono o meno essere indistinguibili: per ciascuna di queste coppie si valutano i rispettivi stati di arrivo in corrispondenza dell'applicazione di tutti i possibili stati di ingresso;
- quando, per una generica coppia (X_i,X_k) di partenza, si trova, in corrispondenza di almeno un valore dell'ingresso, una coppia di arrivo composta da stati distinguibili, allora anche la coppia di partenza (X_i,X_k) è composta da stati distinguibili; quando, invece, tutte le coppie di arrivo ottenute (una per ogni valore possibile dell'ingresso) non forniscono indicazioni sulla coppia di partenza (X_i,X_k), allora si passa alla coppia successiva, senza trarre ancora alcuna conclusione circa la coppia (X_i,X_k);
- infine, una volta effettuato il controllo, di cui alla passo precedente, su tutte le coppie rimaste, la tabella conterrà tante caselle vuote quante sono le coppie di stati indistinguibili.

Ricordiamo infine che questo metodo, come detto prima, è applicabile solo ad automi finiti e propri.

RIDUZIONE DI UN GRAFO

Il concetto di stati indistinguibili può essere utilizzato per semplificare il grafo di transizione associato ad un automa. Vediamo come.

Supponiamo di avere un automa il cui grafo di transizione sia fatto come quello dell'esempio precedente:



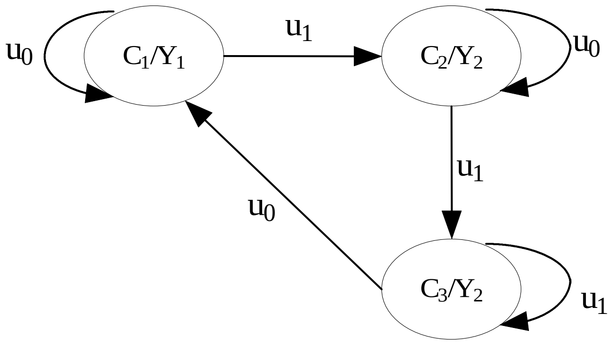
Si tratta dunque di automa proprio, finito e irreversibile, il cui insieme di stato è $X=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$. Abbiamo prima detto che, per questo automa, l'unica coppia di stati indistinguibili sia la coppia (X_1,X_2), mentre tutte le altre coppie sono costituite da stati distinguibili. Allora, sulla base di questo, possiamo "partizionare" l'insieme X in "classi": *il partizionamento va fatto, in particolare, in modo che ciascuna classe (che non è altro che un insieme) contenga al suo interno solo stati tra loro indistinguibili.*

Nel caso appena citato, le classi saranno evidentemente 3 e precisamente

$$C_1=\{X_1,X_2\}$$
$$C_2=\{X_3\}$$
$$C_3=\{X_4\}$$

Ovviamente, la caratteristica di queste classi, oltre al fatto di contenere al proprio interno solo stati indistinguibili, è quella per cui, presi due stati appartenenti ognuno ad una classe diversa, tali stati sono senz'altro distinguibili tra di loro.

Adesso, sulla base di queste classi, possiamo costruire un nuovo grafo, in cui ciascun nodo corrisponde ad una classe e quindi a tutti gli stati che essa contiene: ovviamente, la costruzione di questo nuovo grafo va fatta in base al grafo di transizione dell'automa considerato, in quanto tale grafo ci fornisce i valori dell'uscita corrispondenti a ciascuna classe e i valori dell'ingresso che uniscono le classi tra di loro. Nell'esempio che stiamo considerando, il grafo cui perveniamo è il seguente:



La prima cosa che si osserva in questo grafo è il fatto che esso contiene un numero di nodi inferiore a quello del grafo di transizione. Questa è una proprietà generale, nel senso che il numero di nodi del "**grafo ridotto**" è sempre minore o uguale al numero di nodi del grafo di transizione. In questo senso, l'operazione che noi abbiamo compiuto nel passare dall'uno all'altro grafo prende il nome di "**riduzione**" del grafo di transizione.

Osserviamo inoltre che, in base a come è stato costruito, il grafo ridotto gode di una importante proprietà: è infatti immediato verificare che *preso un qualsiasi stato x del grafo di transizione, esiste almeno uno stato c del grafo ridotto tale che, per qualsiasi sequenza di ingresso, risulti* $h_1(\varphi_1(t,\tau,x,u(\bullet))) = h_2(\varphi_2(t,\tau,c,u(\bullet)))$*, dove h_1 è la funzione di uscita del grafo di transizione mentre h_2 è quella di uscita del grafo ridotto.*

Vale ovviamente anche il viceversa, ossia *preso un qualsiasi stato c del grafo ridotto, esiste almeno uno stato x del grafo di transizione tale che, per qualsiasi sequenza di ingresso, risulti* $h_1(\varphi_1(t,\tau,x,u(\bullet))) = h_2(\varphi_2(t,\tau,c,u(\bullet)))$*, dove h_1 è sempre la funzione di uscita del grafo di transizione mentre h_2 è quella di uscita del grafo ridotto.*

In generale, se, dati due automi e i corrispondenti grafi di transizione, tali grafi soddisfano entrambe queste proprietà, i due automi si dicono "**equivalenti**".

E' abbastanza intuitivo accorgersi che, dato un automa ed il corrispondente grafi di transizione, è possibile trovare infiniti altri automi ad esso equivalenti. Questi automi differiranno tra di loro per tante e cose, ma, soprattutto, per il numero di stati: si dimostra allora che *dato un automa, l'automa ad esso equivalente, avente il minimo numero di stati possibile, è quello che si ottiene con il metodo di riduzione in classi esaminato prima.*

Per concludere, segnaliamo che l'automa ottenuto con il metodo di riduzione in classi gode anche della proprietà di NON presentare coppie di stati indistinguibili: si tratta di una proprietà che scaturisce ovviamente dal modo con cui tale automa viene costruito.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1