Appunti di “Teoria dei sistemi”
Capitolo 4 - Parte II
Sistemi regolari a dimensioni finite lineari tempo-invarianti e tempo-continui

DEFINIZIONE

Nei paragrafi precedenti, abbiamo visto che un sistema (dinamico) regolare, a dimensioni finite, lineare è descrivibile mediante le seguenti due equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) \\ y(t) = H(t)x(t) + L(t)u(t) \end{cases}$$

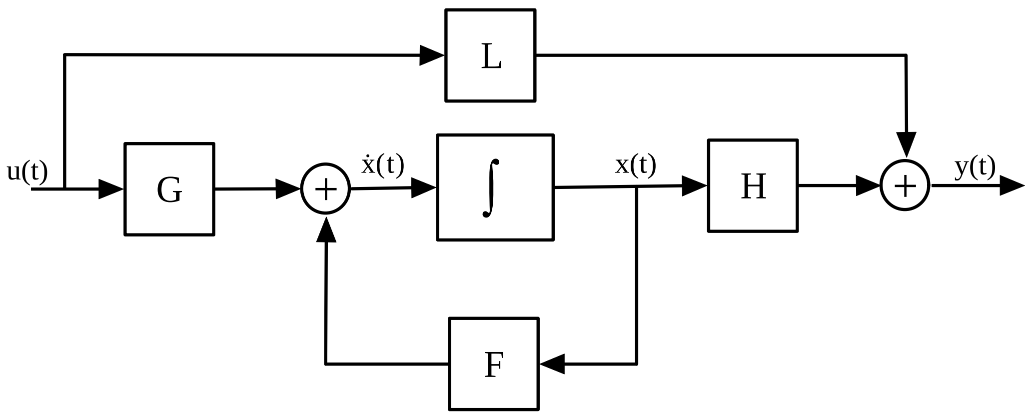
La prima è l’*equazione (differenziale) di stato*, la cui soluzione x(t), ottenibile spesso mediante la *formula di Lagrange*, rappresenta l’equazione del “*movimento (di stato)*”del sistema (cioè l’equazione che regola l’evoluzione temporale dello stato del sistema); la seconda è invece l’*equazione di uscita*, che fornisce il valore istantaneo dell’uscita a partire dai valori istantanei di stato e ingresso. E’ chiaro che ***se il sistema è anche tempo-invariante, in quelle due equazioni deve scomparire la dipendenza dal tempo.***

Ciò significa che le 4 matrici non devono contenere più funzioni del tempo, ma devono essere matrici ad elementi reali.

In definitiva, quindi, diciamo che ***un sistema (dinamico) regolare, a dimensioni finite, lineare e tempo-invariante è descrivibile, in forma di stato, mediante due equazioni nella forma***

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Lu(t) \end{cases}}$$

E' possibile dare la seguente rappresentazione a blocchi di queste due equazioni:



In questo schema, è presente un "*ramo di trasferimento diretto ingresso-uscita*", rappresentativo del termine Lu(t): questo ramo è presente solo nei sistemi che abbiamo definito "impropri", mentre è assente nei sistemi "propri", che sono poi l'oggetto principale delle nostre considerazioni.

Le matrici che definiscono il sistema prendono generalmente i seguenti nomi:

F: "**matrice di stato** "(quadrata di ordine n, dove n è la dimensione dello spazio di stato X)

G: "**matrice di ingresso** "(di ordine n*m, dove m è la dimensione dello spazio di ingresso U)

H: "**matrice di uscita** "(di ordine p*n, dove p è la dimensione dello spazio di uscita Y)

L: "**matrice di trasferimento diretto**" (di ordine p*m)

METODI DI CALCOLO DELLA MATRICE DI TRANSIZIONE DI STATO $\varphi(\tau,\tau)$

Consideriamo dunque sistemi tempo-continui (regolari a dimensioni finite) lineari e tempo-invarianti: per sistemi di questo tipo, vogliamo vedere se e come è possibile calcolare la matrice di transizione di stato $\varphi(t,\tau)$ (matrice quadrata di ordine n), la cui conoscenza è condizione necessaria e sufficiente per la determinazione (tramite la formula di Lagrange) dell'equazione del movimento del sistema.

Nei paragrafi precedenti, quando abbiamo introdotto questa matrice $\varphi(t,\tau)$, abbiamo visto che essa rappresenta l'unica soluzione dell'equazione

$$\dot{\varphi}(t,\tau) = F(t)\varphi(t,\tau)$$

con la condizione iniziale per cui $\varphi(\tau,\tau) = I_n$. Ovviamente, nel caso dei sistemi tempo-invarianti, abbiamo detto che F(t) è una matrice ad elementi reali, per cui l'equazione da risolvere diventa

$$\dot{\varphi}(t,\tau) = F\varphi(t,\tau)$$

Data adesso la matrice F (che, ricordiamo, prende il nome di "*matrice di stato*" ed è quadrata di ordine n), si definisce "**matrice esponenziale di F**" la matrice e^{Ft} definita nel modo seguente:

$$\boxed{e^{Ft} = I + Ft + \frac{1}{2!}(Ft)^2 + \frac{1}{3!}(Ft)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(Ft)^k}$$

E' possibile dimostrare, in modo del tutto analogo a quanto si fa nel caso scalare, che *l'uguaglianza tra i due membri di questa relazione è valida comunque sia fatta F e per qualunque tÎÂ.*

Questa matrice esponenziale e^{Ft} è importante, ai nostri fini, in quanto è possibile dimostrare che essa rappresenta l'unica soluzione dell'equazione $\dot{\varphi}(t,\tau) = F\varphi(t,\tau)$ con la condizione iniziale $\varphi(\tau,\tau) = I_n$; in altre parole, si può dimostrare che sussiste la relazione

$$\boxed{\varphi(t,\tau) = e^{F(t-\tau)}}$$

E' chiaro, allora, che *il problema della determinazione della matrice di transizione di stato j(t,t) si riconduce al problema della determinazione della matrice e^{Ft}.*

Vedremo tra un attimo 3 diversi metodi per il calcolo della matrice esponenziale e^{Ft}. Prima, però, verifichiamo, a scopo esercitativo, che la matrice $e^{F(t-\tau)}$ soddisfa effettivamente l'equazione $\dot{\varphi}(t,\tau) = F\varphi(t,\tau)$. Dobbiamo cioè far vedere che sussiste la relazione

$$\frac{d}{dt} e^{F(t-\tau)} = F e^{F(t-\tau)}$$

Calcoliamo, allora, la derivata di $e^{F(t-\tau)}$: usando la definizione data prima per la matrice esponenziale e facendo qualche semplice manipolazione algebrica, abbiamo che

$$\frac{d}{dt} e^{F(t-\tau)} = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(F(t-\tau)\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{k!}\left(F(t-\tau)\right)^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{d}{dt}\left(F(t-\tau)\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{d}{dt}\left(F^k(t-\tau)^k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}F^k\frac{d}{dt}\left((t-\tau)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}F^k k(t-\tau)^{k-1} = F\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}F^{k-1}k(t-\tau)^{k-1} = F\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\left(F(t-\tau)\right)^{k-1} =$$

$$= F\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(F(t-\tau)\right)^j = Fe^{F(t-\tau)}$$

Abbiamo dunque verificato quanto richiesto.

L'ultima osservazione che possiamo fare, prima di analizzare i metodi di calcolo della matrice e^{Ft}, è la seguente: è chiaro che *la matrice $e^{F(t-\tau)}$ non dipende in modo assoluto dall'istante finale t e dall'istante iniziale t, ma solo dalla differenza t-t.*

Si tratta, chiaramente, di una conseguenza della tempo-invarianza del sistema.

1° metodo: uso della forma canonica di Jordan

Analizziamo dunque il primo metodo possibile per il calcolo della matrice esponenziale e^{Ft} di una generica matrice F quadrata di ordine n. Siano J la "*matrice di Jordan equivalente ad F*" ed M la "*matrice modale di F*": sappiamo che queste due matrici sono tali da soddisfare la relazione

$$F = MJM^{-1}$$

Usando questa relazione, calcoliamo F^2: abbiamo che

$$F^2 = \left(MJM^{-1}\right)\left(MJM^{-1}\right) = MJM^{-1}MJM^{-1} = MJ^2M^{-1}$$

In modo evidentemente analogo, risulta anche

$$F^3 = \left(MJM^{-1}\right)F^2 = MJM^{-1}MJ^2M^{-1} = MJ^3M^{-1}$$

Si deduce, quindi, che, in generale, risulta

$$\boxed{F^k = MJ^kM^{-1}}$$

Usiamo allora questa relazione nella definizione data in precedenza della matrice esponenziale di F: abbiamo che

$$e^{Ft} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(Ft)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}F^kt^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}MJ^kM^{-1}t^k = M\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}J^kt^k\right)M^{-1} = Me^{Jt}M^{-1}$$

Il risultato che abbiamo trovato è dunque che

$$\boxed{e^{Ft} = Me^{Jt}M^{-1}}$$

Questa relazione dice, in pratica, che *nota F, il calcolo della sua matrice esponenziale e^{Ft} si può ricondurre al calcolo della matrice esponenziale e^{Jt} della forma di Jordan equivalente ad F.*

L'importanza di questa conclusione sta nel fatto che il calcolo di e^{Jt} è relativamente semplice. Vediamo perché accade questo.

Il presupposto di base è che la matrice di Jordan è per definizione una matrice diagonale a blocchi; questo comporta, ad esempio, che la matrice J^2 si ottenga, semplicemente, facendo il quadrato dei singoli blocchi: ad esempio, se J è una matrice formata da 3 blocchi, ossia del tipo

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}$$

allora il suo quadrato corrisponde alla matrice

$$J^2 = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & J_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3^2 \end{bmatrix}$$

In generale, è evidente che la potenza k-sima della matrice di Jordan non è altro che

$$J^k = \begin{bmatrix} J_1^k & 0 & 0 \\ 0 & J_2^k & 0 \\ 0 & 0 & J_3^k \end{bmatrix}$$

In modo analogo, è facile verificare che la matrice che si ottiene moltiplicando J per uno scalare qualsiasi k è data semplicemente da

$$kJ = \begin{bmatrix} kJ_1 & 0 & 0 \\ 0 & kJ_2 & 0 \\ 0 & 0 & kJ_3 \end{bmatrix}$$

Si può allora intuire che sia anche immediata la determinazione dell'esponenziale della matrice di Jordan: *la matrice esponenziale della forma canonica di Jordan si ottiene facendo l'esponenziale dei singoli blocchi di cui J stessa si compone.*

Abbiamo cioè che

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{J_3 t} \end{bmatrix}$$

Oltre a questo, considerando che anche i miniblocchi di Jordan sono delle matrici diagonali, è ovvio che *l'esponenziale del generico miniblocco corrisponde alla matrice, ancora diagonale, ottenuta facendo l'esponenziale degli elementi diagonali.*

Si deduce dunque la facilità del calcolo di e^{Jt}.

Esempio numerico

Vediamo subito un esempio di come si calcola la matrice esponenziale e^{Ft} usando la forma canonica di Jordan e la matrice modale. Consideriamo, in particolare, il caso semplice in cui F presenta n autovalori reali e distinti.

Consideriamo perciò la matrice seguente:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo per prima cosa individuare gli autovalori di questa matrice: il suo polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

dal che si deduce che la matrice possiede due autovalori λ_1=-1 e λ_2=-2 reali e distinti. Noti questi autovalori, possiamo andare a determinare la forma canonica di Jordan equivalente ad F: essendo F una matrice di ordine 2 e avendo trovato 2 autovalori reali e distinti, la matrice di Jordan sarà una matrice di ordine 2 avente miniblocchi, di dimensione 1, coincidenti con i due autovalori, per cui si tratterà della matrice

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Adesso ci serve l'esponenziale di questa matrice, che si ottiene facendo l'esponenziale dei singoli blocchi (ossia, in questo caso, l'esponenziale dei singoli elementi diagonali): otteniamo dunque

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

A questo punto, l'obbiettivo è l'applicazione della relazione $e^{Ft} = Me^{Jt}M^{-1}$, per cui dobbiamo individuare la matrice modale M e, successivamente, anche la sua inversa. A questo scopo, dobbiamo trovare gli autovettori associati ai due autovalori della matrice F.

L'autovalore associato all'autovalore λ_1=-1 si ottiene risolvendo il sistema

$$(\lambda_1 I - F)x = 0$$

In forma estesa, questo sistema è

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = 0$$

I vettori che soddisfano questo sistema sono evidentemente quelli le cui componenti soddisfano all'equazione $x_A + x_B = 0$; possiamo ad esempio prendere

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

per cui questo è l'autovettore associato a λ_1.

Discorso analogo dobbiamo fare per l'autovettore associato all'autovalore λ_2=-1: dobbiamo risolvere il sistema $(\lambda_2 I - F)x = 0$, ossia, in forma estesa, il sistema

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = 0$$

I vettori che soddisfano questo sistema sono evidentemente quelli le cui componenti soddisfano all'equazione $2x_A + x_B = 0$ e, tra questi, possiamo ad esempio prendere $x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +2 \end{bmatrix}$.

Ottenuti dunque due autovettori associati ai due autovalori della matrice F, possiamo costruire la matrice modale M, le cui colonne corrispondono proprio ai due autovettori ottenuti: quindi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & +2 \end{bmatrix}$$

Ci serve anche l'inversa di questa matrice, che è

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}(\mathrm{adj}M) = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Siamo infine in grado di determinare e^{Ft}:

$$e^{Ft} = Me^{Jt}M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & +2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{-2t} \\ -e^{-t} & 2e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

2° metodo: uso del teorema di Cayley-Hamilton

Passiamo ad esaminare un secondo possibile metodo per il calcolo della matrice esponenziale e^{Ft} di una generica matrice F quadrata di ordine n. Data questa matrice F, indichiamo con $p(\lambda)$ il suo "*polinomio caratteristico*", ossia

$$p(\lambda) = \det(sI - F)$$

Consideriamo inoltre il polinomio $q(\lambda) = e^{\lambda t}$: se, in questo polinomio, poniamo λ=F, otteniamo $q(F) = e^{Ft}$, per cui il nostro obbiettivo è calcolare q(F).

Dato sempre $q(\lambda)$, sappiamo che esistono sicuramente due altri polinomi $a(\lambda)$ e $r(\lambda)$ tali che sia soddisfatta la relazione

$$q(\lambda) = a(\lambda)p(\lambda) + r(\lambda)$$

In altre parole, $a(\lambda)$ è il risultato del rapporto $q(\lambda)/p(\lambda)$, mentre $r(\lambda)$ è il polinomio resto di tale rapporto. Se usiamo quest'ultima relazione per calcolare q(F), otteniamo

$$q(F) = a(F)p(F) + r(F)$$

Tuttavia, in base al teorema di Cayley-Hamilton, la matrice F è uno zero del suo polinomio caratteristico, per cui p(F)=0 e quindi $q(F) = r(F)$.

Avendo trovato prima che $q(F) = e^{Ft}$, deduciamo che *il calcolo della matrice esponenziale di F si riduce al calcolo del polinomio resto r(l), nel quale dobbiamo poi porre l=F.*

Il vantaggio sta essenzialmente nel fatto che $r(\lambda)$ ha evidentemente grado più piccolo (quindi un minor numero di coefficienti), rispetto a $q(\lambda)$. Si tratta allora di vedere come si calcolano i coefficienti di $r(\lambda)$.

La situazione è diversa a seconda di come sono fatti gli autovalori della matrice F. Di conseguenza, partiamo dal caso più semplice, che è quello in cui F ha n autovalori reali distinti che indichiamo con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

In base alla relazione $q(\lambda) = a(\lambda)p(\lambda) + r(\lambda)$, che è valida per ogni λ, possiamo scrivere che

$$q(\lambda_1) = a(\lambda_1)p(\lambda_1) + r(\lambda_1)$$

Ovviamente, λ_1 è uno zero del polinomio caratteristico $p(\lambda)$, per cui questa si riduce semplicemente a $q(\lambda_1) = r(\lambda_1)$.

In modo del tutto analogo si ottengono altre n-1 relazioni, valide per i rimanenti n-1 autovalori: possiamo dunque costruire il sistema

$$\begin{cases} q(\lambda_1) = r(\lambda_1) \\ q(\lambda_2) = r(\lambda_2) \\ \ldots \\ q(\lambda_n) = r(\lambda_n) \end{cases}$$

In questo sistema, i termini $q(\lambda_1)$, $q(\lambda_2)$,....,$q(\lambda_n)$ sono degli scalari facilmente calcolabili, dato che $q(\lambda) = e^{\lambda t}$ risulta essere o semplicemente un polinomio oppure una serie di potenze. Di conseguenza, le incognite del sistema sono proprio i coefficienti del polinomio resto $r(\lambda)$. Oltre a questo, è possibile dimostrare che il sistema è compatibile ed ammette una sola soluzione (è cioè un sistema di Kramer), per cui, risolvendolo, noi otteniamo effettivamente tali coefficienti e siamo perciò in grado di determinare $q(F) = e^{Ft} = r(F)$.

Si osserva, evidentemente, una cosa: il termine $q(\lambda) = e^{\lambda t}$, se scritto in forma più estesa, è

$$q(\lambda) = e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\lambda t)^k$$

E' chiaro che i coefficienti dello sviluppo in serie a 2° membro dipendono dal tempo t, per cui dipendono dal tempo t anche i termini $q(\lambda_1)$, $q(\lambda_2)$,....,$q(\lambda_n)$, ossia dipendono dal tempo anche i coefficienti del polinomio $r(\lambda)$. Scritto in forma estesa, questo polinomio avrà dunque la seguente forma:

$$r(\lambda) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda + \alpha_2(t)\lambda^2 + \alpha_3(t)\lambda^3 + \ldots + \alpha_{n-1}(t)\lambda^{n-1}$$

Risolvendo il sistema trovato prima, noi andiamo dunque a determinare le funzioni

$$\alpha_0(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_{n-1}(t)$$

che rappresentano appunto i coefficienti di $r(\lambda)$.

Esempio numerico: autovalori reali e distinti

Vediamo subito un esempio di come si calcola la matrice esponenziale e^{Ft} nel caso in cui la matrice F abbia n autovalori reali e distinti.

Consideriamo perciò la matrice seguente (che è la stessa dell'esempio usato per verificare il primo metodo di calcolo di e^{Ft}):

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo per prima cosa individuare gli autovalori di questa matrice: il suo polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

dal che si deduce che la matrice possiede due autovalori λ_1=-1 e λ_2=-2 reali e distinti. Noti questi autovalori, dobbiamo determinare i coefficienti del polinomio resto $r(\lambda)$: dato che F è una matrice di ordine n=2, il polinomio resto sarà un polinomio di grado n-1=1, per cui sarà nella forma

$$r(\lambda) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda$$

Per determinare i due coefficienti $\alpha_0(t), \alpha_1(t)$ dobbiamo andare a risolvere il sistema

$$\begin{cases} q(\lambda_1) = r(\lambda_1) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 \\ q(\lambda_2) = r(\lambda_2) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 \end{cases}$$

per cui dobbiamo calcolare i termini $q(\lambda_1)$ e $q(\lambda_2)$: considerando che $q(\lambda) = e^{\lambda t}$, il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 \\ e^{\lambda_2 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 \end{cases}$$

La risoluzione è immediata (per sostituzione):

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = e^{-t} - e^{-2t} \\ \alpha_0(t) = 2e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} = 2e^{-t} - e^{-2t} \end{cases}$$

Il polinomio resto ha dunque espressione

$$r(\lambda) = \left(2e^{-t} - e^{-2t}\right) + \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\lambda$$

Ponendo λ=F, deduciamo che

$$e^{Ft} = r(F) = \left(2e^{-t} - e^{-2t}\right)I + \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)F$$

Eseguendo i vari prodotti, abbiamo che

$$e^{Ft} = \left(2e^{-t} - e^{-2t}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 0 \\ 0 & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2\left(e^{-t} - e^{-2t}\right) & -3\left(e^{-t} - e^{-2t}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2\left(e^{-t} - e^{-2t}\right) & 2e^{-t} - e^{-2t} - 3\left(e^{-t} - e^{-2t}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2\left(e^{-t} - e^{-2t}\right) & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

<u>Una verifica della bontà dei calcoli effettuati consiste nell'accertarsi che la matrice e^{Ft} ottenuta coincida con la matrice identità quando t=0</u>: nel nostro caso, questo effettivamente avviene.

Abbiamo dunque visto come si procede nel caso in cui la matrice di stato F presenta tutti autovalori reali e distinti, ossia tutti autovalori di molteplicità algebrica 1. E' chiaro che subentrano dei problemi se questa matrice presenta 1 o più autovalori multipli, ossia uno o più autovalori di molteplicità algebrica >1: se, ad esempio, F presenta un autovalore λ_1 doppio e poi tutti autovalori semplici, è chiaro che il problema viene dal fatto che λ_1 ci fornisce 1 sola equazione (ottenuta calcolando $r(\lambda)$ in λ_1), per cui, alla fine, ci troviamo con 1 equazione in meno rispetto a quelle che ci servono per calcolare i coefficienti di $r(\lambda)$. Si tratta, allora, di capire come si trovano le equazioni rimanenti.

Il metodo da seguire si basa sull'uso delle derivate del polinomio $q(\lambda)$: infatti, dato $q(\lambda) = a(\lambda)p(\lambda) + r(\lambda)$, se deriviamo rispetto a λ otteniamo

$$q'(\lambda) = a'(\lambda)p(\lambda) + a(\lambda)p'(\lambda) + r'(\lambda)$$

Se λ_1 è un autovalore di F di molteplicità 2, è chiaro che esso soddisfa alle condizioni

$$\begin{cases} p(\lambda_1) = 0 \\ p'(\lambda_1) = 0 \end{cases}$$

per cui, ponendo $\lambda=\lambda_1$ in quella relazione, essa diventa $q'(\lambda_1) = r'(\lambda_1)$.

Considerando poi che $q(\lambda) = e^{\lambda t}$ e che il polinomio $r'(\lambda)$ ha gli stessi coefficienti di $r(\lambda)$, fatta eccezione per il termine noto, otteniamo l'equazione

$$\lambda_1 e^{\lambda_1 t} = r'(\lambda_1)$$

Questa equazione è indipendente dall'altra equazione $q(\lambda_1) = r(\lambda_1)$, per cui abbiamo ancora una volta tante equazioni quant'è la molteplicità algebrica dell'autovalore.

E' chiaro che, se λ_1 fosse un autovalore di molteplicità algebrica 3, le 3 equazioni da impiegare sarebbero

$$\begin{cases} q(\lambda_1) = r(\lambda_1) \\ q'(\lambda_1) = r'(\lambda_1) \\ q''(\lambda_1) = r''(\lambda_1) \end{cases}$$

In generale, possiamo dunque affermare che *dato un autovalore l (per la matrice F) di molteplicità algebrica m, le corrispondenti m equazioni da utilizzare per il calcolo dei coefficienti di r(l) si ottengono dalla relazione* $q(\lambda)=e^{\lambda t}=r(\lambda)$ *derivandola m volte, a partire dall'ordine 0.*

E' ovvio che questo discorso vale per tutti gli eventuali autovalori non semplici presentati dalla matrice F.

Esempio numerico: autovalore doppio

Chiariamo con un esempio il metodo appena esposto per il calcolo dei coefficienti di $r(\lambda)$, e quindi della matrice esponenziale e^{Ft}, nel caso in cui la matrice F abbia uno o più autovalori con molteplicità algebrica >1.

Consideriamo perciò la matrice seguente:

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

Gli autovalori di questa matrice corrispondono agli zeri del suo polinomio caratteristico, che è

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-F)=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2$$

Si osserva dunque che F presenta un unico autovalore λ_1=-1 di molteplicità algebrica 2 (cioè un autovalore doppio). Nota questa informazione, dobbiamo determinare i coefficienti del polinomio resto $r(\lambda)$: dato che F è una matrice di ordine n=2, il polinomio resto sarà un polinomio di grado n-1=1, per cui sarà nella forma

$$r(\lambda)=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda$$

Per determinare i due coefficienti $\alpha_0(t),\alpha_1(t)$ abbiamo dunque bisogno di due equazioni: la prima si ottiene imponendo che sia $q(\lambda_1)=r(\lambda_1)$.

La seconda, dato che l'autovalore è doppio, si ottiene imponendo che sia $q'(\lambda_1)=r'(\lambda_1)$.

Il sistema da risolvere è dunque il seguente:

$$\begin{cases}q(\lambda_1)=r(\lambda_1)=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda_1\\ q'(\lambda_1)=r'(\lambda_1)=\alpha_1(t)\end{cases}$$

Considerando che $q(\lambda)=e^{\lambda t}$, il sistema da risolvere è

$$\begin{cases}e^{-t}=\alpha_0(t)-\alpha_1(t)\\ -te^{-t}=\alpha_1(t)\end{cases}$$

La risoluzione è immediata:

$$\begin{cases}\alpha_0(t) = (1-t)e^{-t} \\ \alpha_1(t) = -te^{-t}\end{cases}$$

Il polinomio resto ha dunque espressione

$$r(\lambda) = (1-t)e^{-t} - te^{-t}\lambda$$

Ponendo λ=F, deduciamo che

$$e^{Ft} = r(F) = (1-t)e^{-t}I - te^{-t}F$$

Eseguendo i vari prodotti, abbiamo che

$$e^{Ft} = (1-t)e^{-t}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - te^{-t}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(1-t)e^{-t} & 0\\ 0 & (1-t)e^{-t}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -te^{-t}\\ te^{-t} & 2te^{-t}\end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix}(1-t)e^{-t} & -te^{-t}\\ te^{-t} & (1+t)e^{-t}\end{bmatrix}$$

Matrice di trasferimento di un sistema

Al fine di vedere un terzo possibile metodo per la determinazione della matrice esponenziale e^{Ft}, dobbiamo adesso introdurre un importante concetto generale relativo ai sistemi.

Consideriamo dunque un sistema regolare, a dimensioni finite, lineare e tempo-invariante, descritto perciò dalle equazioni

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Lu(t)\end{cases}$$

Il nostro intento è quello di applicare l'operatore "*trasformata di Laplace*" a quelle due equazioni. Per fare questo, dato che il primo membro dell'equazione di stato impone l'applicazione del teorema di derivazione nel tempo, dobbiamo scegliere un istante cui fare riferimento: considerando che il sistema è tempo-invariante, possiamo scegliere un istante qualsiasi senza perdere di generalità e prendiamo perciò l'istante t=0.

In tal modo, applicando la trasformata di Laplace all'equazione di stato, otteniamo

$$sX(s) - x(0) = FX(s) + GU(s)$$

dove, chiaramente X(s) e U(s) sono le trasformate, rispettivamente, dello stato e dell'ingresso. Mettendo insieme i termini simili, possiamo riscrivere quella equazione nella forma

$$(sI - F)X(s) = GU(s) + x(0)$$

Questa relazione rappresenta una *equazione matriciale algebrica*, ossia una equazione vettoriale che rappresenta n diverse equazioni algebriche scalari. E' chiaro che essa è risolvibile (cioè è determinabile il valore di X(s)) solo nel caso in cui la matrice (sI-F) è invertibile. Ci chiediamo, dunque, se (sI-F) è una matrice invertibile. Essendo F una matrice ad elementi reale, (sI-F) è una matrice polinomiale, nel senso che i suoi elementi sono dei polinomi in s; di conseguenza, il suo determinante è a sua volta un polinomio in s: richiedere che (sI-F) sia invertibile equivale dunque a richiedere che il determinante sia diverso dal polinomio nullo per $\forall$s. Ma, a ben vedere, il determinante di (sI-F) non è altro che il polinomio caratteristico di F: tale polinomio non è mai nullo, ma è sempre di grado n pari alla dimensione dello spazio di stato: deduciamo quindi che *la matrice (sI-F) è sempre una matrice invertibile.*

Appurata questa proprietà, possiamo dunque riscrivere la relazione di prima nella forma

$$\boxed{X(s) = \underbrace{(sI-F)^{-1}GU(s)}_{\text{movimento forzato}} + \underbrace{(sI-F)^{-1}x(0)}_{\text{movimento ibero}}}$$

Osserviamo le caratteristiche di questa equazione: la trasformata X(s) dello stato è somma di due termini, di cui uno dipendente solo dall'ingresso (o meglio dalla sua trasformata) e indipendente dallo stato iniziale e l'altro, viceversa, dipendente solo dallo stato iniziale e indipendente dall'ingresso. Deduciamo allora quanto segue:

- il termine $(sI-F)^{-1}GU(s)$ rappresenta la "**trasformata del movimento forzato**";
- il termine $(sI-F)^{-1}x(0)$ rappresenta la "**trasformata del movimento libero**".

A questo punto, seguiamo lo stesso procedimento al fine di applicare l'operatore trasformata di Laplace anche all'equazione di uscita $y(t) = Hx(t) + Lu(t)$ del sistema: abbiamo che

$$Y(s) = HX(s) + LU(s)$$

In questa relazione, sostituiamo l'espressione di X(s) trovata prima: otteniamo

$$Y(s) = H(sI-F)^{-1}GU(s) + H(sI-F)^{-1}x(0) + LU(s)$$

Mettendo insieme i termini simili, possiamo concludere che

$$\boxed{Y(s) = \underbrace{\left[H(sI-F)^{-1}G + L\right]U(s)}_{\text{uscita forzata}} + \underbrace{H(sI-F)^{-1}x(0)}_{\text{uscita libera}}}$$

Ancora una volta abbiamo ottenuto l'uscita come somma di due diversi componenti:

- il termine $\left[H(sI-F)^{-1}G + L\right]U(s)$ rappresenta la "**trasformata dell'uscita libera**", in quanto dipende solo dall'ingresso, mentre è indipendente dallo stato iniziale;

- il termine $H(sI-F)^{-1}x(0)$ rappresenta invece la "**trasformata dell'uscita forzata**", in quanto dipende solo dallo stato iniziale, mentre non dipende in alcun modo dall'ingresso.

Nel caso particolare in cui lo stato iniziale x(0) sia nullo, la relazione di prima si riduce a

$$Y(s) = \left[H(sI-F)^{-1}G + L\right]U(s)$$

In base a questa relazione, l'uscita (o meglio la sua trasformata) si ottiene direttamente dall'ingresso moltiplicandolo (a sinistra) per la matrice $H(sI-F)^{-1}G+L$: per questo motivo, tale matrice prende il nome di "**matrice delle funzioni di trasferimento**" (o, più semplicemente, "**matrice di trasferimento**") del sistema.

E' chiaro che, se l'uscita e l'ingresso sono vettori ad 1 sola componente (ossia se il sistema presenta 1 solo ingresso e 1 sola uscita), la matrice di trasferimento diventa semplicemente una "**funzione di trasferimento**".

L'altro caso particolare è evidentemente quello in cui è l'ingresso che è identicamente nullo: se u(t)=0, si ha che U(s)=0 e quindi le equazioni di stato e di uscita, sempre nel dominio di Laplace, si riducono alle sole componenti libere, ossia a

$$X(s) = (sI-F)^{-1}x(0)$$
$$Y(s) = HX(s) = H(sI-F)^{-1}x(0)$$

3° metodo: uso della trasformata di Laplace

Fatta tutta questa premessa, siamo ora in grado di esporre il terzo ed ultimo metodo per il calcolo della matrice esponenziale e^{Ft} della matrice di stato F del sistema. Il punto di partenza, per questo terzo metodo, è nella formula di Lagrange, la quale fornisce lo stato x(t) del sistema, nel generico istante t:

$$x(t) = \varphi(t,\tau)x(\tau) + \int_\tau^t \varphi(t,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi$$

Abbiamo dimostrato in precedenza che la matrice di transizione di stato $\varphi(t,\tau)$ è ottenibile mediante la relazione $\varphi(t,\tau) = e^{F(t-\tau)}$, per cui, andando a sostituire in quella formula, troviamo

$$x(t) = e^{F(t-\tau)}x(\tau) + \int_\tau^t e^{F(t-\xi)}G(\xi)u(\xi)d\xi$$

Essendo il sistema tempo-invariante, possiamo scegliere in modo del tutto arbitrario l'istante iniziale τ e quindi, per comodità, prendiamo τ=0: con questa posizione, la formula di Lagrange diventa

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\xi)}G(\xi)u(\xi)d\xi$$

Se facciamo l'ipotesi che l'ingresso u(t) al sistema sia nullo, questa relazione si riduce ancora a

$$x(t) = e^{Ft}x(0)$$

ossia si riduce al semplice movimento libero. D'altra parte, nel paragrafo precedente, abbiamo trovato che, in presenza di un ingresso nullo, l'equazione di stato del sistema, nel dominio della trasformata di Laplace, è

$$X(s) = (sI - F)^{-1}x(0)$$

Confrontando tra loro le due ultime relazioni, deduciamo che deve necessariamente risultare

$$(sI - F)^{-1}x(0) = L\left[e^{Ft}x(0)\right]$$

Lo stato iniziale x(0) rappresenta un vettore (ad n componenti) di valori reali, per cui si può portare fuori dall'operatore trasformata di Laplace e si può anche semplificare con l'altro x(0) che compare a primo membro (dato che quella relazione deve valere per x(0) qualsiasi): possiamo dunque concludere che

$$\boxed{(sI - F)^{-1} = L\left[e^{Ft}\right]}$$

In base a questa relazione, deduciamo che *il terzo metodo di calcolo della matrice esponenziale e^{Ft} consiste nel calcolare la matrice $(sI - F)^{-1}$ e, successivamente, nell'antitrasformare secondo Laplace ogni suo elemento.*

Si ha cioè che

$$\boxed{e^{Ft} = L^{-1}\left[(sI - F)^{-1}\right]}$$

Esempio numerico

Ancora una volta, applichiamo il metodo della trasformata di Laplace considerando l'esempio già risolto con gli altri due metodi.

La matrice di cui dobbiamo trovare l'esponenziale è dunque la seguente:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo per prima cosa individuare la matrice (sI-F) e invertirla: la matrice è

$$sI - F = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

e quindi la sua inversa risulta essere

$$(sI-F)^{-1}=\frac{1}{\det(sI-F)}\mathrm{adj}(sI-F)=\frac{1}{s(s+3)+2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Il passo successivo è quello di antitrasformare i singoli termini di questa matrice. Cominciamo dal termine $\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$. In primo luogo, possiamo usare la tecnica dei fratti semplici per scomporlo nel modo seguente:

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{(s+1)}+\frac{B}{(s+2)}$$

Imponendo l'uguaglianza dei due membri di questa relazione, si trova, con le tecniche ben note, che A=2 e B=-1, per cui

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{2}{(s+1)}-\frac{1}{(s+2)}$$

A questo punto, le due frazioni a secondo membro sono delle trasformate note e, in particolare, si ha che

$$L^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right]=2L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)}\right]=2e^{-t}-e^{-2t}$$

Ripetiamo adesso lo stesso procedimento per gli termini della matrice $(sI-F)^{-1}$:

- la scomposizione in fratti semplici del termine $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ risulta essere

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{(s+1)}-\frac{1}{(s+2)}$$

  per cui l'antitrasformata è

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)}\right]=e^{-t}-e^{-2t}$$

- la scomposizione in fratti semplici del termine $\frac{-2}{(s+1)(s+2)}$ è uguale a quella del termine precedente, a meno della costante moltiplicativa -2, per cui risulta

$$L^{-1}\left[\frac{-2}{(s+1)(s+2)}\right]=-2e^{-t}+2e^{-2t}$$

- la scomposizione in fratti semplici del termine $\frac{s}{(s+1)(s+2)}$ risulta essere

$$\frac{s}{(s+1)(s+2)}=-\frac{1}{(s+1)}+\frac{2}{(s+2)}$$

per cui l'antitrasformata è

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)(s+2)}\right]=-L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right]+2L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)}\right]=-e^{-t}+2e^{-2t}$$

In conclusione, il risultato finale è ancora una volta la matrice

$$e^{Ft}=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2\left(e^{-t}-e^{-2t}\right) & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Casi particolari di calcolo della matrice esponenziale

Nei paragrafi precedenti abbiamo dunque esposto 3 diversi metodi di calcolo della matrice esponenziale e^{Ft}; ci serve calcolare questa matrice perché, nei sistemi regolari, a dimensioni finite, lineari e tempo-invarianti, essa corrisponde alla matrice di transizione di stato $\varphi(t,\tau)$, la cui conoscenza è indispensabile per l'applicazione della formula di Lagrange e cioè per la conoscenza dell'equazione di stato del sistema in esame.

Tuttavia, il calcolo analitico della matrice $\varphi(t,\tau)$ può anche essere fatto per particolari sistemi che, pur essendo regolari, a dimensioni finite e lineari, non siano tempo-invarianti. Un caso in cui questo è possibile è ad esempio il seguente: consideriamo due istanti diversi t_1 e t_2 e supponiamo di conoscere, o comunque di poter calcolare, il valore che gli elementi della matrice F(t) assumono in tali istanti; nel caso in cui valga la proprietà per cui

$$F(t_1)F(t_2)=F(t_2)F(t_1) \qquad \forall \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix}$$

si può dimostrare che la matrice di transizione di stato è data da

$$\boxed{\varphi(t,\tau)=e^{\int_\tau^t F(\xi)d\xi}}$$

Un caso in cui la proprietà citata prima vale senz'altro è quello in cui la matrice di stato F(t) è una matrice triangolare (superiore o inferiore) oppure addirittura diagonale, ossia una matrice avente tutti gli elementi nulli tranne quelli diagonali (che corrispondono poi agli autovalori di F), dei quali almeno 1 è non nullo.

Vediamo subito un esempio in cui il procedimento appena esposto può essere applicato. Consideriamo perciò la seguente matrice di stato:

$$F(t)=\begin{bmatrix} t & t \\ 0 & t \end{bmatrix}$$

E' facile verificare che questa matrice gode della proprietà "commutativa" citata prima, per cui possiamo calcolare la matrice di transizione di stato $\varphi(t,\tau)$. Possiamo intanto porre

$$A(t)=\int_{\tau}^{t} F(\xi)d\xi$$

In base a questa scrittura, la matrice A(t) si ottiene, a partire da F(t), integrando ogni suo termine tra t e τ:

$$A(t)=\begin{bmatrix} \int_{\tau}^{t}\xi d\xi & \int_{\tau}^{t}\xi d\xi \\ 0 & \int_{\tau}^{t}\xi d\xi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right) & \frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right) \\ 0 & \frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right) \end{bmatrix}$$

A questo punto dobbiamo calcolare $\varphi\left(t,\tau\right)=e^{A(t)}$, ossia dobbiamo calcolare la matrice esponenziale di A(t). Per fare questo calcolo, possiamo usare uno qualsiasi dei 3 metodi esposti nei paragrafi precedenti. Per esempio possiamo usare il metodo del polinomio resto.

Essendo A(t) una matrice di ordine 2, il polinomio resto è di grado 1, ossia è nella forma

$$r(\lambda)=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda$$

Per calcolare i coefficienti $\alpha_0(t)$ e $\alpha_1(t)$ ci serve intanto conoscere gli autovalori della matrice A: essendo quest'ultima una matrice triangolare (superiore), gli autovalori corrispondono agli elementi diagonali; deduciamo che A(t) presenta un autovalore doppio che vale $\lambda_1=\frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right)$. Allora, in questo caso, sappiamo che il sistema da risolvere è nella forma seguente:

$$\begin{cases} e^{\lambda_1}=r(\lambda_1)=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda_1 \\ e^{\lambda_1}=r'(\lambda_1)=\alpha_1(t) \end{cases}$$

Sostituendo l'espressione dell'autovalore, abbiamo dunque

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right)}=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right) \\ e^{\frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right)}=\alpha_1(t) \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema è immediata: si ha infatti che

$$\begin{cases} \alpha_0(t) = \left(1 - \frac{1}{2}\left(t^2 - \tau^2\right)\right) e^{\frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right)} \\ \alpha_1(t) = e^{\frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right)} \end{cases}$$

Il polinomio resto ha dunque l'espressione

$$r(\lambda) = \left(1 - \frac{1}{2}\left(t^2 - \tau^2\right)\right) e^{\frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right)} + \lambda e^{\frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right)}$$

Ponendo λ=A, abbiamo che

$$\varphi(t,\tau) = e^{A(t)} = r(A) = \left(1 - \frac{1}{2}\left(t^2 - \tau^2\right)\right) e^{\frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right)} I + A(t) e^{\frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\left(t^2 - \tau^2\right)\right) e^{\frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(t^2 - \tau^2\right) & \frac{1}{2}\left(t^2 - \tau^2\right) \\ 0 & \frac{1}{2}\left(t^2 - \tau^2\right) \end{bmatrix} e^{\frac{1}{2}\left(t^2-\tau^2\right)} = \ldots$$

Una osservazione conclusiva su queste situazioni particolari è la seguente: è ovvio che la matrice di transizione di stato, a prescindere da come sia stata ricavata, deve comunque soddisfare le due proprietà secondo cui deve essere non singolare e deve essere tale che $\varphi(\tau,\tau) = I_n$. Di conseguenza, una parziale verifica dei calcoli fatti può essere proprio quella di controllare che $\varphi(t,\tau)$ soddisfi tali due proprietà.

Osservazione sul calcolo dell'esponenziale di matrice

Introducendo la matrice esponenziale e^{Ft} di una matrice quadrata F, abbiamo detto che tale matrice è in generale definita dalla relazione

$$e^{Ft} = I + Ft + \frac{1}{2!}(Ft)^2 + \frac{1}{3!}(Ft)^3 + \ldots$$

dove la convergenza della serie a secondo membro è verificata per qualsiasi t e per qualsiasi F. Questa stessa relazione suggerisce un ulteriore metodo (approssimato) di calcolo di e^{Ft}: infatti, possiamo pensare (magari usando un calcolatore) di calcolare e^{Ft} considerando tanti termini della serie a secondo membro quanti ce ne servono per raggiungere il grado di precisione voluto. In termini più concreti, possiamo ragionare nel modo seguente: supponiamo, arbitrariamente, di calcolare e^{Ft} usando i primi 3 termini della serie:

$$e^{Ft} = I + Ft + \frac{1}{2!}(Ft)^2$$

Successivamente, andiamo a calcolare anche il termine $\frac{1}{3!}(Ft)^3$: se ci accorgiamo che questo termine NON modifica i valori degli elementi nella matrice oltre il limite richiesto dalla precisione voluta, allora lo trascuriamo e quindi tronchiamo la serie; viceversa, se la modifica apportata dal termine $\frac{1}{3!}(Ft)^3$ è consistente, allora consideriamo anche questo termine e ripetiamo la verifica considerando il termine successivo $\frac{1}{4!}(Ft)^4$. Procedendo in questo modo, dopo un numero più o meno alto di verifiche, otteniamo la matrice e^{Ft} con il grado di precisione voluto.

MATRICE DI TRASFERIMENTO E REALIZZABILITÀ FISICA DI UN SISTEMA

Facciamo adesso un piccolo passo indietro per parlare nuovamente di quella che abbiamo chiamato "matrice di trasferimento" di un sistema.

Supponiamo di avere il generico sistema descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Lu(t) \end{cases}$$

Abbiamo visto che, applicando l'operatore "*<u>trasformata di Laplace</u>*" alle due equazioni, si trova facilmente la seguente espressione per la trasformata dell'uscita del sistema:

$$Y(s) = \underbrace{\left[H(sI-F)^{-1}G + L\right]U(s)}_{\text{uscita forzata}} + \underbrace{H(sI-F)^{-1}x(0)}_{\text{uscita libera}}$$

L'uscita Y(s) risulta cioè espressa come somma di due contributi, che rappresentano uno l'uscita libera (dipendente solo dall'ingresso e indipendente dallo stato iniziale), l'altro l'uscita forzata (dipendente solo dallo stato iniziale e indipendente dall'ingresso). Abbiamo poi detto che, nel caso particolare di stato iniziale x(0) nullo, la relazione di prima si riduce a

$$Y(s) = \left[H(sI-F)^{-1}G + L\right]U(s)$$

In questa relazione, abbiamo detto che la matrice $W(s) = H(sI-F)^{-1}G + L$ prende il nome di "**matrice di trasferimento**" del sistema e *rappresenta, appunto, il legame tra l'ingresso e l'uscita del sistema, nel dominio di Laplace, nell'ipotesi di stato iniziale nullo.*

Le dimensioni di W(s) dipendono chiaramente dal numero di uscite e dal numero di ingressi del sistema: il caso generale è quello in cui ci sono m ingressi e p uscite, per cui W(s) è una matrice di dimensione <u>p*m</u>; il caso particolare è, invece, quello in cui c'è 1 solo ingresso e 1 sola uscita, per cui W(s) ha dimensione 1, ossia si riduce ad una funzione, che prende perciò il nome di "**funzione di trasferimento**".

Nel caso in cui W(s) sia una generica matrice p*m, possiamo riscrivere la relazione di prima in forma estesa:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \dots \\ Y_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \dots & W_{1m}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \dots & W_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{m1}(s) & W_{m2}(s) & \dots & W_{mm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \dots \\ U_m(s) \end{bmatrix}$$

In base a questa relazione, la k-sima componente dell'uscita è data (sempre nel dominio di Laplace) da

$$Y_k(s) = W_{k1}(s)U_1(s) + W_{k2}(s)U_2(s) + \ldots + W_{km}(s)U_m(s)$$

$Y_k(s)$ si ottiene, cioè, sommando i contributi di tutti gli ingressi, ciascuno pesato dal corrispondente coefficiente (che poi è, in generale, una funzione) fornito dalla matrice di trasferimento.

Chiaramente, quindi, il generico termine $W_{ik}(s)$ della matrice di trasferimento rappresenta il rapporto $Y_i(s)/U_k(s)$ nell'ipotesi che tutti gli altri ingressi siano nulli.

Un altro aspetto importante della matrice di trasferimento è il seguente: supponiamo che il sistema sia proprio, ossia che il valore istantaneo dell'uscita non abbiamo alcuna dipendenza dal valore istantaneo dell'ingresso; in questa ipotesi, l'equazione di uscita si riduce semplicemente a $y(t) = Hx(t)$ e, di conseguenza, la matrice di trasferimento assume l'espressione

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}G$$

Ci chiediamo come siano fatte le funzioni che costituiscono W(s): la matrice $(sI - F)^{-1}$ è una matrice di <u>*funzioni razionali strettamente proprie*</u>, ossia tali che il grado del numeratore sia strettamente minore del grado del denominatore; moltiplicandola a sinistra per H, si ottiene la matrice $H(sI - F)^{-1}$ che opera una combinazione lineare delle righe di $(sI - F)^{-1}$: questo significa che si ottiene ancora una matrice di funzioni strettamente proprie; stesso discorso per la matrice $W(s) = H(sI - F)^{-1}G$, che si ottiene tramite la matrice G che opera una combinazione lineare delle colonne di $H(sI - F)^{-1}$. Possiamo dunque affermare che *la matrice di trasferimento W(s) è una matrice strettamente propria quando il sistema è proprio.*

Appurato questo, vediamo come cambiano le cose quando il sistema è improprio, ossia quando l'equazione di uscita è $y(t) = Hx(t) + Lu(t)$ e quindi quando la matrice di trasferimento è $W(s) = H(sI - F)^{-1}G + L$: in questo caso, la matrice $H(sI - F)^{-1}G$ è ancora strettamente propria, ma il fatto di dover sommare, a ciascun suo elemento, il corrispondente elemento di L (che è una matrice ad elementi reali), può comportare una perdita di questa proprietà.

Tanto per fare un esempio, supponiamo che l'elemento ik della matrice $H(sI - F)^{-1}G$ sia la funzione

$$\frac{s+2}{s^2 - s + 1}$$

che è una funzione strettamente propria. Supponiamo anche che il corrispondente elemento ik della matrice L sia 2: facendo la somma, otteniamo

$$\frac{s+2}{s^2-s+1}+2=\frac{s+2+2s^2-2s+2}{s^2-s+1}=\frac{2s^2-s+4}{s^2-s+1}$$

e questa funzione, che rappresenta evidentemente la componente ik della matrice di trasferimento, non è più strettamente propria, ma solo propria.

Possiamo dunque trarre la seguente conclusione: *la matrice di trasferimento W(s) di un qualsiasi sistema (dinamico) regolare, a dimensioni finite, lineare e tempo-invariante è sempre razionale propria, ossia composta da funzioni razionali aventi grado del numeratore minore o al più uguale a quello del denominatore; nel caso particolare in cui il sistema è proprio (cioè L è la matrice ad elementi tutti nulli), allora W(s) è una matrice razionale strettamente propria.*

Quando un sistema presenta, come nel caso dei sistemi che stiamo esaminando adesso, una matrice di trasferimento propria, si dice che esso è "**fisicamente realizzabile**".

Nel seguito ci occuperemo più nel dettaglio della matrice di trasferimento di un sistema e del suo legame con le equazioni di stato e di uscita di un sistema.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1