Appunti di "Teoria dei sistemi" Capitolo IV - Parte 3

Sistemi lineari, a dimensioni finite, tempo-discreti

Sistemi tempo-discreti lineari a dimensioni finite

Fino ad ora, fatta eccezione per gli automi, ci siamo sempre occupati di sistemi tempo-continui, ossia di sistemi in cui l'insieme dei tempi T coincide con l'insieme dei numeri reali. Vogliamo adesso esaminare velocemente le principali caratteristiche dei "**sistemi tempo-discreti**", ossia sistemi il cui insieme dei tempi T coincide con l'insieme dei numeri naturali.

In particolare, la prima classe di sistemi tempo-discreti che prendiamo in considerazione è quella dei "**sistemi tempo-discreti a dimensioni finite**", la cui definizione è del tutto analoga a quella data nel caso tempo-continuo: si tratta di sistemi per i quali gli insiemi di ingresso U, di uscita Y e di stato X sono degli spazi vettoriali di dimensione finita.

Per la descrizione di questi sistemi, partiamo dal fatto che, per un qualsiasi sistema, fissato un istante iniziale τ, fissato uno stato iniziale $x=x(\tau)$ e fissato un certo ingresso $u(\bullet)$, se si vuole conoscere lo stato del sistema ad un generico istante $t\geq\tau$, basta conoscere la *funzione di transizione di stato* φ: si ha infatti che

$$x(t)=\varphi(t,\tau,x,u(\bullet))$$

Questa relazione, in base alle proprietà della funzione φ, è definita sempre per qualsiasi $t \geq \tau$; nessuno ci vieta allora di prendere τ=t e t=t+1: otteniamo in tal modo che

$$x(t+1) = \varphi\left(t+1, t, x(t), u(\bullet)\right)$$

Inoltre, per la proprietà di casualità della funzione di transizione di stato, ciò che serve conoscere, a proposito dell'ingresso, non è tutto l'andamento di $u(\bullet)$, ma solo la sua restrizione all'intervallo [τ,t[di osservazione: avendo preso τ=t e t=t+1, serve dunque la restrizione di $u(\bullet)$ all'intervallo [t,t+1[; dato che stiamo considerando sistemi tempo-discreti, gli istanti t e t+1 sono consecutivi (ossia non ci sono altri istanti intermedi tra di essi), per cui l'intervallo [t,t+1[si riduce semplicemente al solo istante t, il che significa che a noi serve conoscere solo u(t). Possiamo dunque scrivere che

$$x(t+1) = \varphi\left(t+1, t, x(t), u(t)\right)$$

Il secondo membro di questa relazione diventa dunque semplicemente una funzione (vettoriale) di x(t), u(t) e t, per cui possiamo riscrivere quella uguaglianza come

$$\boxed{x(t+1) = f\left[x(t), u(t), t\right]}$$

Questa prende il nome di "**equazione di stato alle differenze**" del sistema in esame: è evidente che si tratta dell'equazione (vettoriale) analoga all'equazione (differenziale vettoriale) di stato $\dot{x}(t) = f\left[x(t), u(t), t\right]$ trovata nel caso tempo-continuo.

La funzione $f\left[x(t), u(t), t\right]$ prende invece il nome di "**funzione generatrice**": è chiaro che *se il sistema dovesse essere tempo-invariante, la funzione generatrice non avrebbe alcuna dipendenza dal tempo t.*

I sistemi tempo-discreti, a dimensioni finite, cui noi siamo interessati sono quelli lineari; la definizione di "**sistema tempo-discreto, lineare, a dimensioni finite**" è analoga a quella dato nel caso continuo:

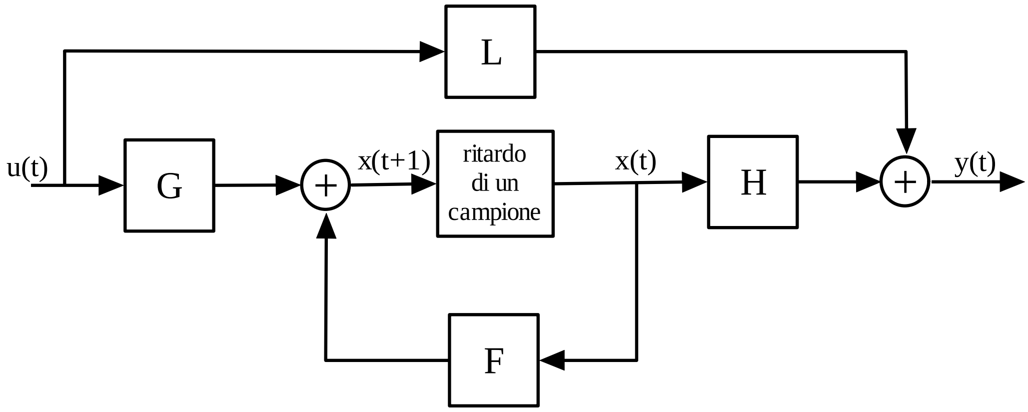
- in primo luogo, gli insiemi U (valori ammissibili di ingresso), Ω (funzioni ammissibili di ingresso), X (insieme di stato), Y (valori ammissibili di uscita) e Γ (funzioni ammissibili di uscita) sono tutti degli spazi vettoriali;
- la funzione di transizione di stato $\varphi\left(t, \tau, x, u(\bullet)\right)$ è lineare in $X \times \Omega$;
- la funzione di uscita $\eta\left(x(t), u(t), t\right)$ è lineare in $X \times U$.

Sempre in modo analogo al caso tempo-continuo, dire che la funzione di transizione di stato è lineare in $X \times \Omega$ e che la funzione di uscita è lineare in $X \times U$ significa dire che tali funzioni sono ottenibili ciascuna come somma di due contributi, di cui uno indipendente dall'ingresso e dipendente dallo stato iniziale (<u>*contributo libero*</u>) e l'altro indipendente dallo stato iniziale e dipendente dall'ingresso (<u>*contributo forzato*</u>). Per questi sistemi, l'equazione di stato e l'equazione di uscita risultano allora avere le seguenti forme:

$$x(t+1) = F(t)x(t) + G(t)u(t) \qquad \text{equazione di stato}$$
$$y(t) = H(t)x(t) + L(t)u(t) \qquad \text{equazione di uscita}$$

Si osserva che le due equazioni che descrivono il sistema sono assolutamente analoghe a quelle viste per i sistemi tempo-continui: si tratta di una analogia formale molto importante, in quanto consente di estendere, in modo estremamente semplice, anche ai sistemi tempo-discreti le stesse proprietà che vedremo in seguito per i sistemi tempo-continui.

Prima di proseguire, diamo anche in questo caso una interpretazione di quelle due equazioni mediante un diagramma a blocchi:



Le matrici F,G,H ed L prendono la stessa denominazione delle analoghe matrici che compaiono nella equazione di stato dei sistemi tempo-continui:

- F: "**matrice di stato** "(quadrata di ordine n, dove n è la dimensione dello spazio di stato X)
- G: "**matrice di ingresso** "(di ordine n*m, dove m è la dimensione dello spazio di ingresso U)
- H: "**matrice di uscita** "(di ordine p*n, dove p è la dimensione dello spazio di uscita Y)
- L: "**matrice di trasferimento diretto**" (di ordine p*m)

Anche in questo caso, ricordiamo che il "*ramo di trasferimento diretto ingresso-uscita*", definito dalla matrice L, può essere presente (e si parla di *sistema improprio*), ma può anche essere assente (*sistema proprio*), come capiterà nella maggior parte dei nostri discorsi.

Soluzione dell'equazione di stato

Soffermiamoci adesso sull'equazione di stato, al fine di capire come è possibile risolverla, ossia come è possibile ricavare da essa lo stato del sistema in un generico istante t: una volta fissato l'istante iniziale τ, abbiamo detto che lo stato del sistema nell'istante successivo τ+1 è dato da

$$x(\tau+1) = F(\tau)x(\tau) + G(\tau)u(\tau)$$

In modo analogo, lo stato del sistema nell'istante ancora successivo τ+2 è dato da

$$x(\tau+2) = F(\tau+1)x(\tau+1) + G(\tau+1)u(\tau+1)$$

Sostituendo l'espressione di $x(\tau+1)$ trovata prima, questa relazione diventa

$$x(\tau+2)=F(\tau+1)F(\tau)x(\tau)+F(\tau+1)G(\tau)u(\tau)+G(\tau+1)u(\tau+1)$$

Il discorso non cambia se calcoliamo lo stato del sistema nell'istante $\tau+3$:

$$\begin{aligned}&x(\tau+3)=F(\tau+2)x(\tau+2)+G(\tau+2)u(\tau+2)=\\&=\underbrace{F(\tau+2)F(\tau+1)F(\tau)x(\tau)}_{\text{contributo libero}}+\underbrace{F(\tau+2)F(\tau+1)G(\tau)u(\tau)+F(\tau+2)G(\tau+1)u(\tau+1)+G(\tau+2)u(\tau+2)}_{\text{contributo forzato}}\end{aligned}$$

Ciò che si osserva è che, in ogni caso, abbiamo la somma di due termini, di cui uno dipendente SOLO dallo stato iniziale e l'altro dipendente solo dall'ingresso (in particolare, dalla sua restrizione all'intervallo di osservazione $[t,\tau[$ aperto a destra, ossia con l'istante finale escluso).

Per un istante finale t generico, possiamo dunque scrivere che

$$x(t)=\underbrace{F(t)F(t-1)....F(\tau+1)F(\tau)x(\tau)}_{\text{contributo libero}}+\underbrace{........................}_{\text{contributo forzato}}$$

Reversibilità del sistema

La relazione appena trovata mette in evidenza una importante proprietà di questo tipo di sistemi: infatti, è evidente che, noto lo stato finale $x(t)$, note le matrici F e G calcolate nei vari istanti considerati e noto l'andamento dell'ingresso, l'unica possibilità per calcolare il valore dello stato iniziale $x(\tau)$ è quella di poter invertire quella relazione, ossia di poter scrivere che

$$x(\tau)=\left[F(t)F(t-1)....F(\tau+1)F(\tau)\right]^{-1}\left(x(t)-\underbrace{........................}_{\text{contributo forzato}}\right)$$

Questa relazione ha senso solo se la matrice $F(t)F(t-1)....F(\tau+1)F(\tau)$ è invertibile, ossia se presenta determinante diverso da 0: questo accade solo se le varie matrici $F(t)$, $F(t-1)$,...,$F(\tau+1)$,$F(\tau)$ sono tutte invertibili. Possiamo allora concludere che *i sistemi tempo-discreti, lineari a dimensioni finite sono reversibili (o irreversibili all'indietro) solo se la matrice di stato F(t) è invertibile per "t.*

Questa è una differenza importante con quanto trovato per i sistemi regolari, a dimensioni finite, lineari tempo-continui: abbiamo infatti a suo tempo trovato, analizzando le caratteristiche della formula di Lagrange, che questi sistemi sono SEMPRE reversibili.

SISTEMI TEMPO-DISCRETI LINEARI A DIMENSIONI FINITE TEMPO-INVARIANTI

Così come abbiamo fatto per il caso continuo, concentriamo la nostra attenzione su un generico sistema tempo-discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases}x(t+1)=Fx(t)+Gu(t)\\y(t)=Hx(t)+Lu(t)\end{cases}$$

Come si nota dalla simbologia usata, le 4 matrici F,G,H ed L sono matrici ad elementi reali, a testimonianza del fatto che il sistema, oltre ad essere lineare a dimensioni finite, è anche tempo-invariante. Il nostro scopo è quello di trovare una espressione quanto più comoda è possibile per l' "*equazione del movimento*", ossia per l'equazione che descrive l'evoluzione temporale dello stato del sistema noti che siano lo stato iniziale e l'andamento dell'ingresso.

Facendo un discorso del tutto analogo a quello fatto nel paragrafo precedente, se fissiamo l'istante iniziale τ, lo stato del sistema negli istanti successivi $\tau+1,\tau+2,\tau+3$ e così via è dato da

$$\begin{aligned}
&x(\tau+1) = Fx(\tau) + Gu(\tau)\\
&x(\tau+2) = F^2x(\tau) + FGu(\tau) + Gu(\tau+1)\\
&x(\tau+3) = F^3x(\tau) + F^2Gu(\tau) + FGu(\tau+1) + Gu(\tau+2)\\
&\ldots.
\end{aligned}$$

E' facile accorgersi, dunque, che sussiste la seguente formula generale:

$$\boxed{x(t) = F^{t-\tau}x(\tau) + \sum_{k=\tau}^{t-1} F^{t-k-1}Gu(k)}$$

Questa è dunque l' "**equazione del movimento**" per il sistema in esame. E' immediato accorgersi della stretta analogia esistente tra questa espressione e quella della *formula di Lagrange* e, in effetti, il significato delle due formule è esattamente lo stesso: si tratta, in entrambi i casi, della soluzione (unica) dell'equazione di stato (equazione differenziale nel caso continuo ed equazione alle differenze nel caso discreto).

(dispense) Si nota, inoltre, come, anche in questo caso, lo stato x(t) sia dato dalla somma di due contributi, uno dipendente dallo stato iniziale e indipendente dall'ingresso (*movimento libero*) e l'altro dipendente dall'ingresso e indipendente dallo stato iniziale (*movimento forzato*). Naturalmente, il movimento libero è a sua volta lineare in X (cioè rispetto allo stato iniziale), mentre il movimento forzato è lineare in Ω (cioè rispetto alla sequenza di ingresso).

Matrice di transizione di stato

In base alla formula trovata poco fa per il calcolo di x(t), deduciamo che, per un sistema discreto, la "**matrice di transizione di stato**" è

$$\varphi(t,\tau) = F^{t-\tau}$$

E' facile verificare che questa matrice gode delle seguenti proprietà, del tutto analoghe a quelle esaminate nel caso tempo-continuo:

- $\varphi(\tau,\tau) = F^{\tau-\tau} = I$
- $\varphi(t+1,\tau) = F^{t+1-\tau} = FF^{t-\tau} = F\varphi(t,\tau)$
- $\varphi(t_2,t_1)\varphi(t_1,t_0) = F^{t_2-t_1}F^{t_1-t_0} = F^{t_2-t_0} = \varphi(t_2,t_0)$

C'è invece una proprietà che differenziale la matrice di transizione di stato di un sistema tempo-discreto da quella di un sistema tempo-continuo. Nel caso tempo-continuo, abbiamo trovato che la matrice di transizione è sempre una matrice non singolare; vediamo allora se lo stesso accade nel caso tempo-discreto.

In base ad una nota proprietà delle matrici, una qualsiasi matrice A^k è non singolare se e solo se risulta non singolare la matrice A: nel nostro caso, quindi, possiamo affermare che *la matrice di transizione di stato $\varphi(t,\tau)=F^{t-\tau}$ è non singolare se e solo se risulta non singolare la matrice di stato F.*

Nel caso in cui $\varphi(t,\tau)=F^{t-\tau}$ sia non singolare, la possiamo invertire ed è facile verificare che

$$[\varphi(t,\tau)]^{-1}=\left[F^{t-\tau}\right]^{-1}=F^{\tau-t}=\varphi(\tau,t)$$

Esempio: Piano di ammortamento di un capitale

Supponiamo di aver ricevuto un prestito da una banca e indichiamo con C l'entità di tale prestito. Supponiamo inoltre che la condizione per l'estinzione del debito sia la seguente: dobbiamo restituire il prestito in un numero N (fissato) di rate, tutte pari ad un importo (costante) pari a p. Il nostro obbiettivo è quello di calcolare quanto vale p.

Per effettuare questo calcolo possiamo ragionare "costruendo" un sistema opportuno e sfruttando poi quanto sappiamo a proposito di tale sistema.

La prima cosa che possiamo fare è quella di fissare la variabile di stato (scalare o vettoriale) per il sistema: possiamo ad esempio indicare con x(t) l'importo che rimane ancora da versare alla banca prima del t° versamento. Si tratta, chiaramente, di una variabile scalare che può assumere valori reali compresi tra 0 (valore che corrisponde all'estinzione del debito) e C (valore corrispondente alla situazione iniziale, ossia a quando non è stato ancora effettuato alcun versamento).

Possiamo inoltre indicare con u(t) l'importo del t° versamento: si tratta dell'ingresso del nostro sistema.

Con queste posizioni, ci chiediamo quanto vale x(t+1), ossia l'importo ancora da versare prima del (t+1)° versamento (o, ciò che è lo stesso, dopo il t° versamento). Se indichiamo con R il tasso di interesse (costante) relativo al periodo tra due versamenti successivi, possiamo senz'altro scrivere che

$$x(t+1)=x(t)+Rx(t)-u(t)$$

Questa formula di giustifica nel modo seguente: prima del t° versamento, l'importo complessivo che resta da pagare alla banca è x(t); una volta effettuato il t° versamento, il debito ancora presente è x(t), al quale dobbiamo però sottrarre l'importo u(t) del versamento effettuato e al quale dobbiamo inoltre sommare l'importo corrispondente al tasso di interesse R relativo al periodo compreso tra il t° versamento ed il (t+1)° versamento.

Possiamo dunque concludere che l'equazione di stato del sistema in esame è

$$x(t+1)=(1+R)x(t)-u(t)$$

Di che tipo di sistema si tratta? Intanto, è chiaro che abbiamo a che fare con un sistema tempo-discreto, visto che gli istanti t sono numeri naturali; vediamo se si tratta anche di un sistema a dimensioni finite:

- l'ingresso u(t) rappresenta l'entità dei vari versamenti e può assumere, perciò, un qualsiasi valore reale compreso nell'intervallo $[0,C]$; di conseguenza, l'insieme di ingresso U coincide con l'intervallo di numeri reali $[0, C]$ ed è perciò un sottoinsieme di uno spazio vettoriale di dimensione 1;

- per la variabile di stato x(t), corrispondente all'importo ancora da pagare prima del t° versamento, vale lo stesso discorso di u(t): anch'essa può assumere un qualsiasi valore reale compreso nell'intervallo $[0, C]$;

- per quanto riguarda l'uscita non abbiamo alcuna specifica, per cui assumiamo che anche l'insieme di uscita Y siano uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Deduciamo che il sistema può ritenersi a dimensioni finite. Si tratta, in particolare, di un sistema di ordine 1, dove 1 è la dimensione dello spazio di stato. Inoltre, è chiaro che il sistema è anche lineare e tempo-invariante: basta osservare la forma in cui è stata posta l'equazione di stato prima ricavata.

Appurato questo, il nostro scopo è quello di trovare l'equazione del movimento del sistema, in modo da poter conoscere il valore di x(t), per un t generico, noti che siano l'andamento dell'ingresso u(t) e lo stato iniziale. Prima di trovare l'equazione, vediamo a cosa corrisponde lo stato iniziale: in primo luogo, l'istante iniziale è evidentemente l'istante t=1, in quanto non ha senso considerare l'istante t=0, cui corrisponderebbe lo stato iniziale x(0), cioè l'importo ancora da pagare alla banca prima dello 0° versamento. Lo stato iniziale è dunque x(1): il valore x(1) corrisponde all'importo da pagare alla banca prima del 1° versamento, ossia corrisponde all'entità dell'intero prestito C concesso dalla banca. Possiamo dunque concludere che lo stato iniziale è $x(1) = C$.

Premesso questo, andiamo a individuare l'equazione del movimento: dobbiamo semplicemente applicare la relazione

$$x(t) = F^{t-\tau} x(\tau) + \sum_{k=\tau}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k)$$

Considerando che τ=1 e che x(1)=C, abbiamo allora che

$$x(t) = F^{t-1} C + \sum_{k=1}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k)$$

In base all'equazione di stato trovata prima, è chiaro che F=1+R e G=-1, per cui possiamo ancora scrivere che

$$x(t) = (1+R)^{t-1} C + \sum_{k=1}^{t-1} (1+R)^{t-k-1} (-1) u(k) = (1+R)^{t-1} C - \sum_{k=1}^{t-1} (1+R)^{t-k-1} u(k)$$

Facciamo adesso l'ulteriore ipotesi che le rate da pagare siano costanti e pari ad un certo valore p: questo significa che $u(t) = p \quad \forall t$, per cui quella relazione diventa

$$x(t) = (1+R)^{t-1} C - p \sum_{k=1}^{t-1} (1+R)^{t-k-1}$$

Un possibile uso che possiamo fare di questa relazione è il seguente: una volta fissati l'entità C del prestito concesso e l'entità R del tasso di interesse, vogliamo calcolare il valore p delle rate in modo tale da poter restituire il prestito in un numero prefissato N di rate.

Il calcolo si può fare semplicemente imponendo che il debito ancora presente, prima dell’ (N+1)° versamento sia nullo: dobbiamo cioè imporre che risulti x(N+1)=0. Usando quella relazione, abbiamo allora che

$$x(N+1) = (1+R)^{N+1-1} C - p\sum_{k=1}^{N+1-1} (1+R)^{N+1-k-1} = (1+R)^{N} C - p\sum_{k=1}^{N} (1+R)^{N-k} =$$
$$= (1+R)^{N} C - p(1+R)^{N} \sum_{k=1}^{N} (1+R)^{-k}$$

Imponendo che x(N+1)=0, otteniamo allora che

$$p = \frac{C}{\sum_{k=1}^{N} (1+R)^{-k}}$$

ESEMPIO: PRODOTTO INTERNO (NAZIONALE) LORDO

Per prima cosa, definiamo cosa si intende per “prodotto interno (nazionale) lordo” relativo ad un anno:

$$PIL = \begin{pmatrix} \text{spese di consumo delle imprese e} \\ \text{delle famiglie nell'anno considerato} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{spese per investimenti} \\ \text{nell'anno considerato} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{spese dello stato} \\ \text{nell'anno considerato} \end{pmatrix}$$

Fissato, allora, un certo anno t, facciamo le seguenti posizioni:

- y(t): PIL all’anno t;
- c(t): spese di consumo, delle imprese e delle famiglie, nell’anno t;
- i(t): spese per investimenti nell’anno t;
- u(t): spese dello stato nell’anno t.

Con queste posizioni, l’economista Samuelson ha ideato il seguente modello:

$$\begin{aligned} c(t) &= \alpha y(t-1) \\ i(t) &= \beta[c(t) - c(t-1)] \end{aligned}$$

In base a queste due equazioni, proviamo a trovare una espressione per y(t):

$$y(t) = c(t) + i(t) + u(t) = \alpha y(t-1) + \beta[c(t) - c(t-1)] + u(t) =$$
$$= \alpha y(t-1) + \beta[\alpha y(t-1) - \alpha y(t-2)] + u(t) = (\alpha + \alpha\beta) y(t-1) - \alpha\beta y(t-2) + u(t)$$

Ponendo $a = \alpha + \alpha\beta$ e $b = -\alpha\beta$, possiamo dunque concludere che

$$y(t) = ay(t-1) + by(t-2) + u(t)$$

Questa relazione lega il valore istantaneo dell'uscita y(t) del sistema al valore istantaneo dell'ingresso x(t) ed ha quindi il significato di una equazione di uscita per il sistema. In particolare, essa mostra come il sistema sia di tipo dinamico: infatti, per calcolare il valore dell'uscita nell'istante t, non è sufficiente conoscere il valore dell'ingresso nello stesso istante t, ma è necessario conoscere i valori dell'uscita nei due istanti precedenti t-1 e t-2.

Il nostro scopo è quello di trovare, per questo sistema, una rappresentazione in termini di stato. Per fare questo, dobbiamo per prima cosa individuare in cosa consiste lo stato del sistema; la scelta non è, ovviamente, univoca, ma, per esempio, possiamo procedere nel modo seguente: <u>dato un qualsiasi istante t, lo stato del sistema è rappresentato dai valori dell'uscita negli istanti t-1 e t-2</u>. Con questa scelta, il vettore di stato, nel generico t, è

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y(t-2) \\ y(t-1) \end{bmatrix}$$

Ci siamo dunque messi nell'ipotesi di un sistema del 2° ordine, visto che lo stato ha 2 componenti. Cerchiamo, allora, di individuare l'equazione di stato e l'equazione di uscita del sistema da mettere nella forma

$$\begin{cases} x(t+1)=F(+1)x(t)+G(t)u(t) \\ y(t)=H(t)x(t)+L(t)u(t) \end{cases}$$

L'equazione di uscita non è altro che l'equazione

$$y(t)=ay(t-1)+by(t-2)+u(t)=ax_2(t)+bx_1(t)+u(t)$$

da porre, però, in forma matriciale: abbiamo facilmente che

$$y(t)=\begin{bmatrix} b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}u(t)$$

dal che deduciamo quindi che

$$H(t)=H=\begin{bmatrix} b & a \end{bmatrix}$$
$$L(t)=L=\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Leggermente più complessa è invece l'individuazione dell'equazione di stato.

Sempre usando la relazione $y(t)=ax_2(t)+bx_1(t)+u(t)$, possiamo scrivere che

$$x_1(t+1)=y(t-1)=x_2(t)$$
$$x_2(t+1)=y(t)=ax_2(t)+bx_1(t)+u(t)$$

In forma matriciale queste due equazioni corrispondono a

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

dal che si deduce che

$$F(t) = F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$G(t) = G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A questo punto, se volessimo determinare l'equazione del movimento (cioè la soluzione, unica, dell'equazione di stato appena trovata), sarebbe sufficiente applicare la relazione

$$x(t) = F^{t-\tau}x(\tau) + \sum_{k=\tau}^{t-1} F^{t-k-1}Gu(k)$$

METODI DI CALCOLO DELLA MATRICE POTENZA F^T

Da quanto detto nei paragrafi precedenti si capisce che, nota la rappresentazione del sistema (tempo-discreto) in termini di stato, la complicazione principale, ai fini della determinazione dell'equazione del movimento, è nel calcolo della matrice F^t, che prende il nome di "**matrice potenza**" della matrice F. Si tratta, in definitiva, del problema analogo a quello che si pone nei sistemi tempo-continui (regolari, a dimensioni finite, lineari, tempo-invarianti), per i quali è necessario il calcolo della *matrice esponenziale* e^{Ft} (la quale permette l'applicazione della *formula di Lagrange*). Lo scopo di questo paragrafo è dunque quello di illustrare i tre principali metodi analitici per il calcolo di F^t: i primi due metodi che esporremo sono uguali ai primi due visti a proposito del calcolo della matrice esponenziale e^{Ft}, per cui, anziché illustrarne i presupposti teorici, passeremo direttamente alla loro applicazione in casi concreti; il terzo metodo, invece, differisce da quello esaminato per i sistemi tempo-continui in virtù di un ostacolo fondamentale: nei sistemi tempo-continui, il terzo metodo era quello basato sull'applicazione dell'operatore "trasformata di Laplace", il quale è applicabile SOLO a funzioni continue nel tempo; nel caso dei sistemi tempo-discreti, invece, abbiamo a che fare con funzioni tempo-discrete, per cui tale operatore non è applicabile. Allora, il terzo metodo che analizzeremo si basa sull'impiego di un altro operatore, che prende il nome di "*trasformata Z*", che è in pratica l'analogo della trasformata di Laplace nel caso tempo-discreto.

Esempio: uso della forma canonica di Jordan

Consideriamo la matrice

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Vogliamo calcolare la matrice potenza F^t. Come metodo di calcolo usiamo quello che prevede l'impiego della forma canonica di Jordan equivalente alla matrice F e della matrice modale M di F: infatti, lo scopo è quello di applicare la relazione

$$F^t = MJ^tM^{-1}$$

In base a questa relazione, il calcolo di F^t si riconduce, in definitiva, al calcolo di J^t; quest'ultima matrice è senz'altro più facile da calcolare: infatti, in primo luogo, si tratta di una matrice diagonale a blocchi, il che significa che, dovendone fare la potenza t°, è sufficiente fare la potenza t° di ciascun miniblocco; in secondo luogo, ciascun miniblocco ha una struttura particolare:

$$J_{kk} = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & 1 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .... & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Si tratta cioè di una matrice avente tutti elementi nulli, tranne quelli diagonali (che sono uguali all'autovalore di F corrispondente al miniblocco) e quelli della sopradiagonale (che sono tutti unitari). Ciò significa che la potenza del generico miniblocco è

$$J_{kk}^t = \begin{bmatrix} \lambda_k^t & \frac{t\lambda_k^{t-1}}{1!} & \frac{t(t-1)\lambda_k^{t-2}}{2!} & \frac{t(t-1)(t-2)\lambda_k^{t-3}}{3!} & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_k^t & \frac{t\lambda_k^{t-1}}{1!} & \frac{t(t-1)\lambda_k^{t-2}}{2!} & \dots & .... \\ 0 & 0 & \lambda_k^t & \frac{t\lambda_k^{t-1}}{1!} & .. & \frac{t(t-1)(t-2)\lambda_k^{t-3}}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k^t & .... & \frac{t(t-1)\lambda_k^{t-2}}{2!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .... & \lambda_k^t \end{bmatrix}$$

Vediamo dunque cosa succede nell'esempio che stiamo considerando.

La matrice in esame F presenta un solo autovalore λ_1=-1 di molteplicità algebrica 2; è facile verificare che due autovettori ad esso associati sono $\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$ e $\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T$, per cui la matrice modale M (costruita usando come colonne tali autovettori) è

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{invertendola}} M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vediamo come è fatta la forma canonica di Jordan. Avendo trovato 1 solo autovalore doppio, essa sarà

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Per farne la potenza t°, dobbiamo fare la potenza t° di ciascun miniblocco; in questo caso, il miniblocco è unico, per cui possiamo direttamente applicare la regola citata prima per scrivere che

$$J^t = \begin{bmatrix} \lambda_1^t & t\lambda_1^{t-1} \\ 0 & \lambda_1^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^t & t(-1)^{t-1} \\ 0 & (-1)^t \end{bmatrix}$$

A questo punto siamo in grado di calcolare F^t:

$$F^t = MJ^tM^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^t & t(-1)^{t-1} \\ 0 & (-1)^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^t & t(-1)^{t-1} \\ -(-1)^t & -t(-1)^{t-1} + (-1)^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)^t + t(-1)^{t-1} & t(-1)^{t-1} \\ -(-1)^t - t(-1)^{t-1} + (-1)^t & -t(-1)^{t-1} + (-1)^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^t + t(-1)^{t-1} & t(-1)^{t-1} \\ -t(-1)^{t-1} & -t(-1)^{t-1} + (-1)^t \end{bmatrix}$$

Esempio: uso del polinomio resto

Consideriamo adesso la matrice

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & +3 \end{bmatrix}$$

Vogliamo anche qui calcolare la matrice potenza F^t e lo facciamo questa volta applicando il metodo del polinomio resto.

La prima cosa da fare è sempre quella di calcolarsi gli autovalori di F: il polinomio caratteristico risulta essere $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 9$, per cui gli autovalori sono

$$\lambda_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

E' consigliabile porli in forma polare, per sui scriviamo

$$\lambda_1 = 3e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$\lambda_2 = 3e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

Il metodo del polinomio resto, nel caso di una matrice, di ordine 2, con 2 autovalori distinti, prevede che i coefficienti del polinomio $r(\lambda) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda$ si calcolino andando a risolvere il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1^t = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 \\ \lambda_2^t = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 \end{cases}$$

In questo caso, allora, abbiamo che

$$\begin{cases} \left(3e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^t = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)3e^{j\frac{\pi}{3}} \\ \left(3e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)^t = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)3e^{-j\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

Se sottraiamo membro a membro le due equazioni, siamo subito in grado di calcolarci il coefficiente $\alpha_1(t)$: con l'aiuto delle formule di Eulero, risulta

$$\alpha_1(t) = \frac{3^{t-1}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

Se, invece, sommiamo membro a membro le due equazioni ed andiamo a sostituire l'espressione appena trovata per $\alpha_1(t)$, siamo in grado di calcolarci anche il coefficiente $\alpha_0(t)$: sempre tramite le formule di Eulero, si trova che

$$\alpha_0(t) = \frac{3^t}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - \frac{3^{t-1}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

Una volta individuati i coefficienti del polinomio resto, la matrice Ft si calcola sostituendo nell'espressione di $r(\lambda)$, F al posto di λ:

$$F^t = r(F) = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)F$$

Esempio: uso della trasformata Z

Vediamo adesso il 3° possibile metodo di calcolo della matrice potenza Ft. Così come, nel caso dei sistemi tempo-continui, il 3° metodo si basava sull'impiego della trasformata di Laplace, nel caso dei sistemi tempo-discreti esso si basa sull'impiego della "**trasformata Z**", che è l'operatore analogo a quello di Laplace, ma valido per i segnali tempo-discreti (altrimenti detti "*sequenze*").

Tra le proprietà fondamentali della trasformata Z, abbiamo visto quella secondo cui

$$a^t = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\} = Z^{-1}\left\{z(z-a)^{-1}\right\}$$

Allora, in modo del tutto analogo, si può far vedere che sussiste la seguente relazione:

$$\boxed{F^t = Z^{-1}\left\{z(zI-F)^{-1}\right\}}$$

In base a questa relazione, il calcolo della matrice potenza F^t si può effettuare seguendo i seguenti passi:

- in primo luogo si determina la matrice $z(zI-F)^{-1}$;
- in secondo luogo, si calcola l'antitrasformata Z di ciascun suo termine.

Vediamo, dunque, come si procede nel dettaglio usando un esempio. Supponiamo di voler trovare la matrice potenza della matrice

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo per prima cosa trovare $z(zI-F)^{-1}$: considerando che

$$zI-F=\begin{bmatrix} z & -1 \\ 1 & z+2 \end{bmatrix}$$

abbiamo che

$$z(zI-F)^{-1}=z\begin{bmatrix} z & -1 \\ 1 & z+2 \end{bmatrix}^{-1}=z\frac{1}{z(z+2)+1}\begin{bmatrix} z+2 & 1 \\ -1 & z \end{bmatrix}$$

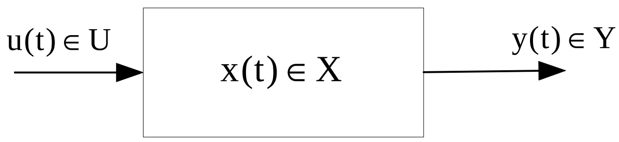
Nota la matrice $z(zI-F)^{-1}$, dobbiamo antitrasformare ciascun suo termine per ottenere la matrice potenza ricercata:

$$F^t=Z^{-1}\left\{z(zI-F)^{-1}\right\}=\begin{bmatrix} Z^{-1}\left\{\dfrac{z(z+2)}{z(z+2)+1}\right\} & Z^{-1}\left\{\dfrac{z}{z(z+2)+1}\right\} \\ Z^{-1}\left\{\dfrac{-z}{z(z+2)+1}\right\} & Z^{-1}\left\{\dfrac{z^2}{z(z+2)+1}\right\} \end{bmatrix}=\ldots.$$

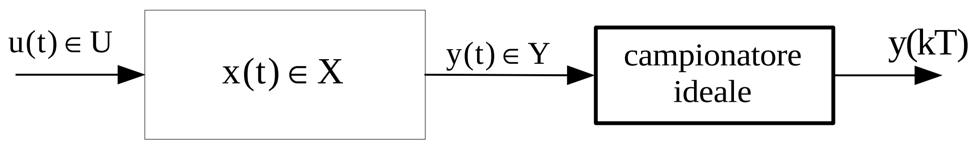
Sistemi a dati campionati

INTRODUZIONE

Supponiamo di avere un generico sistema tempo-continuo; siano u(t) il vettore di ingresso, x(t) il vettore di stato e y(t) il vettore di uscita, definiti tutti e tre in ogni istante $t \in \Re$:

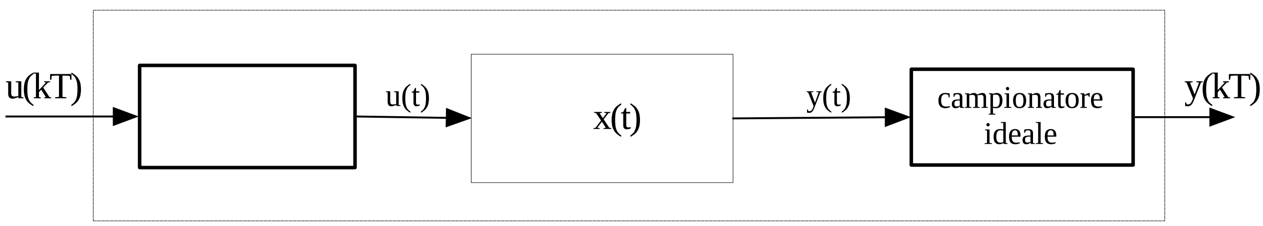


Supponiamo di porre, in cascata al sistema, un "*dispositivo campionatore*", come nello schema seguente:



La funzione di questo campionatore è quello appunto di campionare, secondo un "*periodo di campionamento*" T fissato, i valori di ciascuna componente dell'uscita: l'uscita y(kT) del campionatore è dunque rappresentata da una "*sequenza*" (vettoriale), ossia da un segnale tempo-discreto che in ogni istante assume lo stesso valore che in quell'istante assume l'uscita y(t) del sistema tempo-continuo di partenza.

In questo modo, abbiamo realizzato un particolare sistema, il quale ha in ingresso una funzione (vettoriale) tempo-continua e fornisce in uscita una funzione (vettoriale) tempo-discreta. Possiamo fare anche qualcosa in più, nel senso che possiamo supporre che la funzione di ingresso u(t) rappresenti a sua volta l'uscita di un sistema il cui ingresso è un'altra sequenza u(kT):

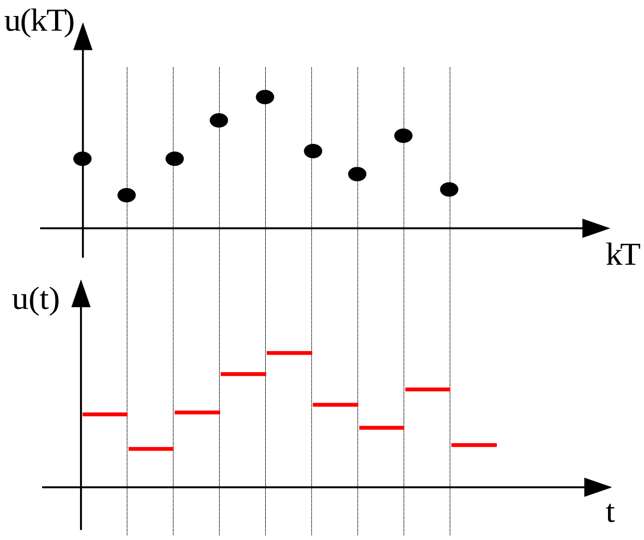


In questo modo, abbiamo realizzato un sistema complessivo che riceve in ingresso un segnale tempo-discreto, lo elabora in un qualche modo e fornisce una uscita a sua volta tempo-discreta. La particolare struttura di questo sistema (ossia, in definitiva, il fatto che esso contenga al suo interno tre sottosistemi di natura diversa) fa' si che esso prenda il nome di "**sistema a dati campionati**": la cosa interessante è che un sistema fatto in questo modo può essere studiato, nel modo che vedremo, come un tipico sistema tempo-discreto.

Dispositivo di tenuta

Prima di studiare nel dettaglio un sistema a dati campionati, ci si può chiedere come possa essere fatto il primo sottosistema di cui il sistema complessivo è costituito, ossia come possa essere fatto un sistema che, ricevendo in ingresso una funzione u(kT) tempo-discreta, fornisca come uscita una funzione u(t) tempo-continua.

Una possibilità molto semplice è quella di un "**dispositivo di mantenimento**" (o "*dispositivo di tenuta*"), il quale si comporta nel modo seguente: in corrisponde di un generico campione u(kT) in ingresso, il dispositivo fornisce in uscita una funzione continua nel tempo e pari a u(kT); non appena arriva il campione successivo $u((k+1)T)$, il dispositivo fornisce in uscita sempre una funzione continua nel tempo, ma pari questa volta a $u((k+1)T)$. Il diagramma seguente mostra in modo più evidente il principio di funzionamento di questo dispositivo:



In generale, sistemi di questo tipo sono frequenti nelle applicazioni in cui vengono usati dei calcolatori per generare la funzione di ingresso: durante il generico intervallo di tempo T, il calcolatore elabora le informazioni ricevute e determina il valore del vettore di ingresso da applicare durante il successivo intervallo di tempo; questo vettore di ingresso, in uscita dal calcolatore, viene poi trasformato in un segnale continuo nel modo appena descritto, ossia mediante appositi dispositivi di tenuta.

DESCRIZIONE DEL SISTEMA IN FORMA DI STATO

Fatte queste premesse, andiamo a vedere come è possibile rappresentare, in forma di stato, un sistema a dati campionati come quello descritto nel paragrafo precedente.

Partiamo dalle equazioni del sistema tempo-continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

N.B. Per semplicità, stiamo facendo riferimento ad un sistema tempo-continuo (regolare a dimensioni finite) lineare, tempo-invariante proprio (nel quale cioè, l'uscita sia legata direttamente solo allo stato e non all'ingresso).

In base all'equazione di Lagrange, fissato l'istante iniziale τ e lo stato iniziale x(τ), lo stato del sistema, in un generico istante t≥τ, è

$$x(t) = e^{F(t-\tau)}x(\tau) + \int_{\tau}^{t} e^{F(t-\xi)}Gu(\xi)d\xi$$

mentre la corrispondente uscita è

$$y(t) = Hx(t) = He^{F(t-\tau)}x(\tau) + H\int_{\tau}^{t} e^{F(t-\xi)}Gu(\xi)d\xi$$

Consideriamo, allora, l'istante iniziale τ=kT e l'istante finale $t = (k+1)T$: l'equazione di stato diventa

$$x((k+1)T) = e^{FT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{F((k+1)T-\xi)}Gu(\xi)d\xi =$$

$$= e^{FT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{F(k+1)T}e^{-F\xi}Gu(\xi)d\xi = (?) = e^{FT}x(kT) + \left(\int_{0}^{T} e^{F\xi}d\xi\right)Gu(k)$$

(dove abbiamo posto $u(k) = u(t) \quad \forall t \in [kT,(k+1)T]$ in accordo a come è stato costruito il sistema a dati campionati), e quindi l'equazione di uscita diventa a sua volta

$$y(kT) = Hx(kT) = He^{FT}x(kT) + H\left(\int_{0}^{T} e^{F\xi}d\xi\right)Gu(k)$$

Allora, se poniamo

$$\boxed{\begin{aligned} F_C &= e^{FT} \\ G_C &= \left(\int_{0}^{T} e^{F\xi}d\xi\right)G \\ H_C &= H \end{aligned}}$$

possiamo riscrivere le due equazioni nella forma

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= F_C x(kT) + G_C u(k) \\ y(kT) &= H_C x(kT) \end{aligned}$$

Infine, se sottintendiamo il "*periodo di campionamento T*", possiamo scrivere che il sistema è rappresentato, in forma di stato, dalle equazioni

$$\boxed{\begin{cases} x(k+1) = F_C x(k) + G_C \tilde{u}(k) \\ y(k) = H_C x(k) \end{cases}}$$

Da queste equazioni si deduce una prima fondamentale caratteristica dei sistemi a dati campionati: infatti, avendo posto $F_C = e^{FT}$ e sapendo che la matrice e^{FT} è sempre non singolare, deduciamo che *il sistema è "reversibile"*, il che significa che la sua funzione di transizione di stato gode della proprietà di irreversibilità all'indietro. In base a questa proprietà, se è noto lo stato finale del sistema, è possibile risalire, in modo univoco, allo stato iniziale da cui è partito il sistema, noti che siano, ovviamente, l'istante finale, l'istante iniziale e l'andamento dell'ingresso.

Un'altra osservazione importante è la seguente: *ad ogni sistema continuo* (F,G,H) *è associata una intera famiglia* (F_C,G_C,H_C) *di sistemi a dati campionati.*

Infatti, anche se la notazione adottata non lo mette in evidenza, la terna (F_C,G_C,H_C) dipende dal valore del periodo di campionamento T.

ESERCIZIO (APPELLO DI GIUGNO 1994 - ES.1)

Un sistema lineare tempo-invariante e tempo-continuo è caratterizzato dalle seguenti matrici:

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini il modello del corrispondente sistema a dati campionati ottenuto con un dispositivo di tenuta di ordine 0 e se ne calcoli la risposta libera a partire dallo stato $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Risoluzione

Le equazioni del sistema a dati campionati sono nella forma

$$\begin{cases} x(k+1) = F_C x(k) + G_C u(k) \\ y(k) = H_C x(k) \end{cases}$$

dove

$$F_C = e^{FT}$$

$$G_C = \left(\int_0^T e^{F\xi} d\xi \right) G$$

$$H_C = H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Applichiamo allora queste ultime forme per determinare la terna di matrici (F_C,G_C,H_C) che definisce questo sistema.

Cominciamo dal calcolare la matrice $F_C = e^{FT}$: si tratta della matrice esponenziale della matrice F calcolata per t=T. Abbiamo 3 diversi modi di procedere: scegliamo, ad esempio, il metodo del "polinomio resto".

Consideriamo perciò la matrice

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice è triangolare alta, dal che deduciamo che i suoi autovalori coincidono con gli elementi diagonali: abbiamo perciò l'autovalore λ=-1 con molteplicità algebrica 2. Nota questa informazione, dobbiamo determinare i coefficienti del polinomio resto $r(\lambda)$: dato che F è una matrice di ordine n=2, il polinomio resto sarà un polinomio di grado n-1=1, per cui sarà nella forma

$$r(\lambda) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda$$

Per determinare i due coefficienti $\alpha_0(t), \alpha_1(t)$ abbiamo dunque bisogno di due equazioni: la prima si ottiene imponendo che sia

$$q(\lambda_1) = r(\lambda_1)$$

La seconda, dato che l'autovalore è doppio, si ottiene imponendo che sia

$$q'(\lambda_1) = r'(\lambda_1)$$

Il sistema da risolvere è dunque il seguente:

$$\begin{cases} q(\lambda_1) = r(\lambda_1) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 \\ q'(\lambda_1) = r'(\lambda_1) = \alpha_1(t) \end{cases}$$

Considerando che $q(\lambda) = e^{\lambda t} = e^{-t}$, il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} e^{-t} = \alpha_0(t) - \alpha_1(t) \\ -te^{-t} = \alpha_1(t) \end{cases}$$

La risoluzione è immediata:

$$\begin{cases} \alpha_0(t) = (1-t)e^{-t} \\ \alpha_1(t) = -te^{-t} \end{cases}$$

Il polinomio resto ha dunque espressione

$$r(\lambda) = (1-t)e^{-t} - te^{-t}\lambda$$

Ponendo λ=F, deduciamo che

$$e^{Ft} = r(F) = (1-t)e^{-t}I - te^{-t}F$$

Eseguendo i vari prodotti, abbiamo che

$$e^{Ft} = (1-t)e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - te^{-t}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-t)e^{-t} & 0 \\ 0 & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} te^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & te^{-t} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Ponendo infine t=T, concludiamo che la matrice di stato del sistema a dati campionati è

$$F_C = e^{FT} = \begin{bmatrix} e^{-T} & -Te^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix}$$

Per il calcolo della matrice di ingresso, dobbiamo invece usare la relazione

$$G_C = \left(\int_0^T e^{F\xi} d\xi \right) G$$

Dobbiamo cioè integrare tutti gli elementi della matrice e^{Ft} trovata prima e poi moltiplicare per la matrice G del sistema tempo-continuo di partenza: intanto, abbiamo che

$$\int_0^T e^{F\xi} d\xi = \begin{bmatrix} \int_0^T e^{-\xi} d\xi & -\int_0^T \xi e^{-\xi} d\xi \\ 0 & \int_0^T e^{-\xi} d\xi \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} -\left(e^{-T}-1\right) & (T+1)e^{-T}-1 \\ 0 & -\left(e^{-T}-1\right) \end{bmatrix}$$

per cui possiamo concludere che

$$G_C = \left(\int_0^T e^{F\xi} d\xi \right) G = \begin{bmatrix} -\left(e^{-T}-1\right) & (T+1)e^{-T}-1 \\ 0 & -\left(e^{-T}-1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (T+1)e^{-T}-1 \\ -\left(e^{-T}-1\right) \end{bmatrix}$$

Adesso, per determinare la risposta libera a partire dallo stato $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, ci basta tenere conto che un sistema a dati campionati è un sistema (tempo-discreto) lineare tempo-invariante (oltre che regolare e a dimensione finite), per cui la risposta complessiva, in corrispondenza di una specificata condizione iniziale $x(\tau)$ e di uno specificato ingresso è data in generale da

$$x(t) = F_C^{t-\tau} x(\tau) + \sum_{k=\tau}^{t-1} F_C^{t-k-1} G_C u(k)$$

A noi interessa solo la risposta libera in corrispondenza della condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, per cui si tratta della funzione

$$x(t) = F_C^t x(0) = F_C^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si pone allora il problema di calcolare la matrice potenza di F_C........

ESERCIZIO (APPELLO DI GENNAIO 1989 - ES.3)

Un sistema tempo-continuo è caratterizzato dalle seguenti matrici di stato e di uscita:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si determinino le matrici di stato e di uscita relative al corrispondente modello a dati campionati, ottenuto con un dispositivo di tenuta di ordine 0 e con periodo di campionamento T.

<u>Risoluzione</u>

Sapendo che

$$F_C = e^{FT}$$
$$H_C = H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

deduciamo che, mentre la matrice di uscita del sistema a dati campionati coincida con quella del sistema tempo-continuo di partenza, la matrice di stato corrisponde alla matrice esponenziale della matrice F calcolata per t=T. Abbiamo 3 diversi modi di procedere: scegliamo, ad esempio, il metodo del "polinomio resto".

Consideriamo perciò la matrice

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ci servono intanto gli autovalori di questa matrice: considerando che il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$$

deduciamo che gli autovalori sono $\lambda_1 = j$ e $\lambda_2 = -j$. Noti questi autovalori, dobbiamo determinare i coefficienti del polinomio resto r(λ): dato che F è una matrice di ordine n=2, il polinomio resto sarà un polinomio di grado n-1=1, per cui sarà nella forma

$$r(\lambda) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda$$

Per determinare i due coefficienti $\alpha_0(t), \alpha_1(t)$ dobbiamo andare a risolvere il sistema

$$\begin{cases} q(\lambda_1) = r(\lambda_1) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 \\ q(\lambda_2) = r(\lambda_2) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 \end{cases}$$

per cui dobbiamo calcolare i termini q(λ_1) e q(λ_2): considerando che $q(\lambda) = e^{\lambda t}$, il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 \\ e^{\lambda_2 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 \end{cases}$$

ossia, sostituendo i valori numerici, il sistema

$$\begin{cases} e^{jt} = \alpha_0(t) + j\alpha_1(t) \\ e^{-jt} = \alpha_0(t) - j\alpha_1(t) \end{cases}$$

La risoluzione è immediata:

$$\begin{cases} \alpha_0(t) = \dfrac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} = \cos t \\ \alpha_1(t) = \dfrac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} = \sin t \end{cases}$$

Il polinomio resto ha dunque espressione

$$r(\lambda) = \cos(t) + \lambda \sin(t)$$

Ponendo λ=F, deduciamo che

$$e^{Ft} = r(F) = \cos(t)I + F\sin(t)$$

Eseguendo i vari prodotti, abbiamo che

$$e^{Ft} = \cos(t)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin(t)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 \\ 0 & \cos(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sin(t) \\ -\sin(t) & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

Ponendo infine t=T, concludiamo che la matrice di stato del sistema a dati campionati è

$$F_C = e^{FT} = \begin{bmatrix} \cos(T) & \sin(T) \\ -\sin(T) & \cos(T) \end{bmatrix}$$

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1