Appunti di “Teoria dei sistemi”- Capitolo 5
Stabilità dell’equilibrio (parte I)

Stabilità del movimento

INTRODUZIONE

Cerchiamo di inquadrare rapidamente in cosa consiste il problema della "*stabilità*" di un sistema. Supponiamo di avere un generico sistema descritto dai soliti 8 oggetti $\langle T, U, \Omega, X, Y, \Gamma, \varphi, \eta \rangle$; supponiamo di fissare un istante iniziale τ ed un corrispondente stato iniziale $x(\tau)$; supponiamo anche di conoscere l'andamento $u(\bullet)$ dell'ingresso applicato al sistema (ci interessa, in particolare, in base alla nota proprietà di causalità, la restrizione dell'ingresso all'intervallo $[\tau,t]$); note queste informazioni, sappiamo che il "*movimento*" del sistema (cioè l'evoluzione temporale dello stato) è regolata dalla funzione di transizione di stato η:

$$x(t) = \varphi(t, \tau, \bar{x}, u(\bullet))$$

Questa funzione, al variare di t, ci fornisce il modo con cui lo stato del sistema varia nel tempo, ossia definisce appunto il "*movimento*" del sistema (si sottintende "movimento di stato"). Per ragioni che saranno chiare tra un attimo, a questo movimento si dà il nome di "**movimento nominale**" del sistema, dove l'aggettivo "*nominale*" è in pratica sinonimo di "ideale": esso indica, infatti, che il movimento $x(t)$ prima indicato rappresenta quello che accade realmente allo stato del sistema nel caso in cui non ci sia alcuna variazione né sullo stato iniziale né sull'andamento dell'ingresso (il quale prende perciò il nome di "**ingresso nominale**"). Nella pratica, invece, capita spesso che, per cause di varia natura, si verifichino delle variazioni o sullo stato iniziale $x(\tau)$ o sull'ingresso nominale $u(\bullet)$ o su entrambi: in presenza di queste variazioni, è indispensabile chiedersi cosa accada al sistema, ossia, in definitiva, se e come la sua evoluzione (che adesso diventa una "*evoluzione perturbata*") cambia rispetto a quella "nominale", ossia rispetto a quella prevista in assenza di "*perturbazioni*".

Possiamo dunque affermare che *il **problema della stabilità** consiste nell'esaminare se il comportamento perturbato di un sistema è "simile" al comportamento nominale, in presenza di perturbazioni sufficientemente piccole, dove per "comportamento perturbato" del sistema intendiamo il movimento perturbato corrispondente ad una perturbazione dello stato iniziale $x(t)$ e/o ad una perturbazione dell'ingresso $u(\bullet)$ a partire dall'istante iniziale.*

Al fine di giudicare se il comportamento perturbato e quello nominale sono simili, si confrontano il movimento nominale $x(t)$ ed il movimento perturbato $x_p(t)$; in particolare, il confronto viene fatto verificando se, per $t\to\infty$, il movimento perturbato tende o meno a quello nominale.

> N.B. Ricordiamo che, nei nostri discorsi, quando parliamo semplicemente di "*movimento*" ci riferiamo all'evoluzione temporale dello stato del sistema, mentre, quando parliamo di "*movimento di uscita*" ci riferiamo all'evoluzione temporale dell'uscita del sistema. Di conseguenza, nel seguito si userà la notazione $x(\bullet)$ per indicare il movimento e la notazione $y(\bullet)$ per indicare il movimento di uscita. Ricordiamo, inoltre, che con le notazioni $x(t)$ e $y(t)$ indichiamo, rispettivamente, il valore istantaneo dello stato e quello dell'uscita.

Autore: Sandro Petrizzelli

STABILITÀ DEL MOVIMENTO: DEFINIZIONE DI LIAPUNOV

Quando parliamo di "*comportamento*" del sistema ci riferiamo ad un particolare movimento $x(\bullet)$ individuato da un istante iniziale τ, da uno stato iniziale $\overline{x} = x(\tau)$ e da un ingresso (nominale) $u(\bullet)$:

$$x(\bullet) = \varphi(\bullet, \tau, \overline{x}, u(\bullet))$$

Supponiamo, allora, che, per ragioni che a noi non interessano, ci sia una "perturbazione" sullo stato iniziale $x(\tau)$, ossia una variazione di tale stato rispetto al valore teorico previsto; questa perturbazione fa' si che lo stato iniziale diventi $\overline{x}_p$ e questo genera, ovviamente, un movimento $x_p(\bullet)$ (detto "**movimento perturbato**") diverso dal "**movimento nominale**" $x(\bullet)$ previsto prima: tale movimento perturbato sarà

$$x_p(\bullet) = \varphi(\bullet, \tau, \overline{x}_p, u(\bullet))$$

Allora, volendo dare una definizione del tutto intuitiva, possiamo affermare che *il movimento nominale $x(\bullet)$ in esame è "stabile" se tutti i possibili movimenti perturbati non sono troppo diversi da esso.*

Il fatto di parlare di "*tutti i possibili movimenti perturbati*" dipende dal fatto che non è sempre facile valutare con precisione lo stato iniziale perturbato $\overline{x}_p$ ed il corrispondente movimento perturbato, per cui spesso bisogna ragionare in termini del tutto generali.

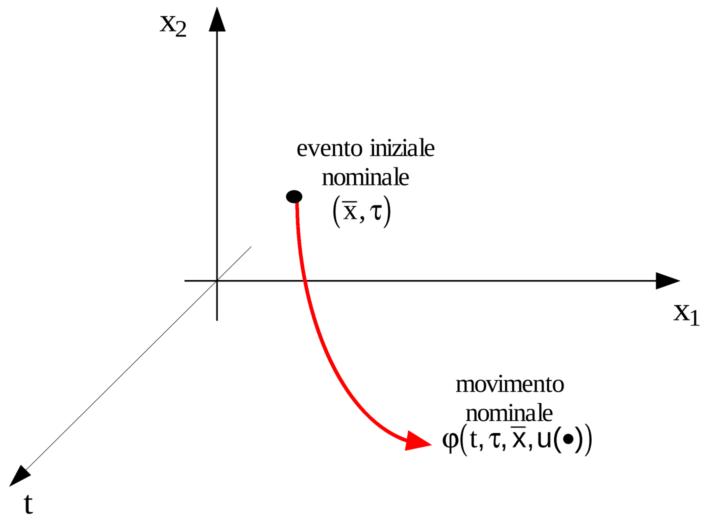
Il modo più naturale e spontaneo per giudicare se due movimenti possono essere considerati simili o no è quello di considerare la "*distanza*" tra gli stati che i due movimenti individuano, istante per istante, a partire dall'istante iniziale τ fissato: in particolare, bisogna verificare se tale distanza resta limitata nel tempo o no. Allora, *per misurare una distanza, è necessario che l'insieme di stato X del sistema sia uno spazio vettoriale normato o, comunque, un sottoinsieme di uno spazio vettoriale normato, in modo tale che sia definibile la "distanza" tra due stati.*

D'ora in poi facciamo perciò l'ipotesi che l'insieme di stato X sia uno spazio vettoriale sul quale è possibile definire almeno una norma. Sotto questa ipotesi, sussiste la seguente definizione di "**stabilità del movimento**" (dovuta a **Liapunov**):

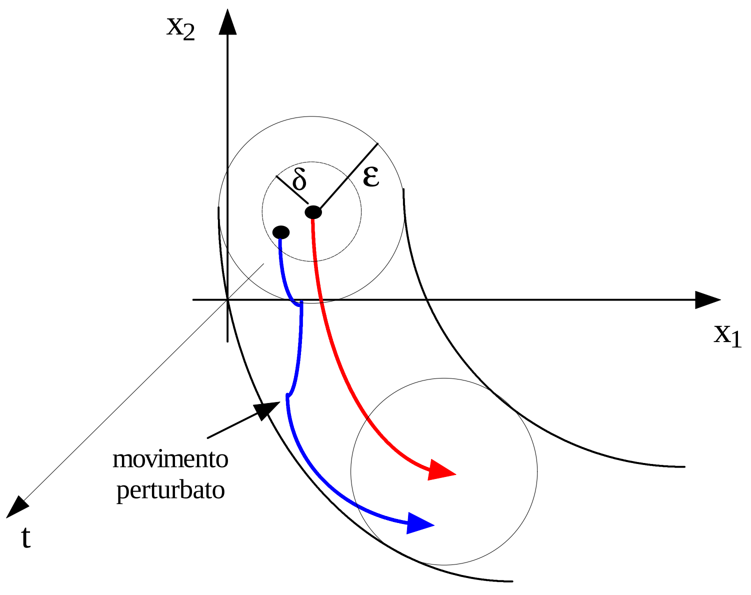
Def. *Fissati un istante iniziale t, uno stato iniziale $\overline{x}$ e un ingresso $u(\bullet)$, un movimento $x(\bullet) = \varphi(\bullet, \tau, \overline{x}, u(\bullet))$ si dice "**stabile**" se, per qualsiasi $\varepsilon > 0$, esiste almeno un $\delta > 0$ tale che, per tutti gli x che soddisfano la relazione $\|x - \overline{x}\| \le \delta$, sia verificata la condizione*

$$\|\varphi(t, \tau, x, u(\bullet)) - \varphi(t, \tau, \overline{x}, u(\bullet))\| \le \varepsilon \qquad \forall t \ge \tau$$

Cerchiamo di capire cosa dice questa definizione. Supponiamo che il sistema in esame sia un sistema tempo-continuo del 2° ordine: ciò significa che lo spazio di stato è il piano $[x_1,x_2]$ e che lo spazio degli eventi è costituito dallo spazio tridimensionale $[x_1,x_2,t]$. In tale spazio, individuiamo l'evento iniziale $(\overline{x}, \tau)$ e supponiamo che, in corrispondenza di un ingresso nominale $u(\bullet)$, il movimento del sistema sia descritto dalla curva tracciata nella figura seguente:

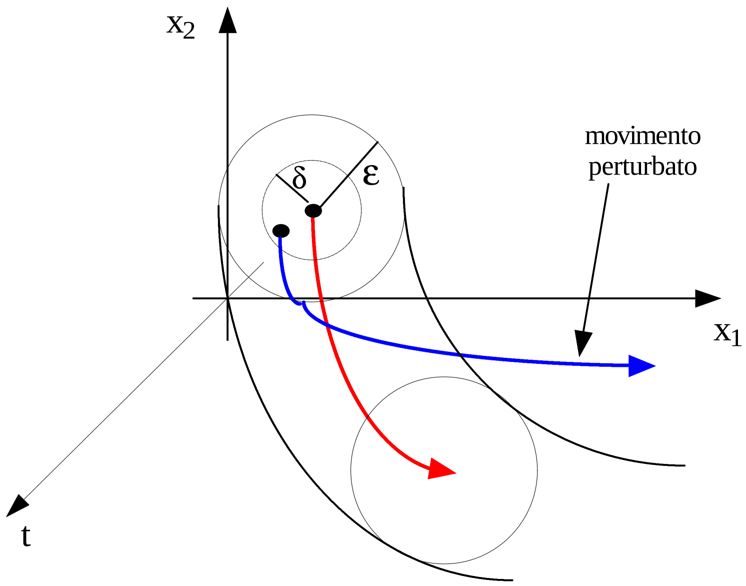


Adesso, fissato uno scalare δ>0, prendiamo un nuovo stato iniziale x (che supponiamo sia frutto di una perturbazione sul sistema) tale che $\|x-\overline{x}\| \le \delta$; consideriamo successivamente il movimento del sistema corrispondente a questo nuovo stato iniziale e supponiamo che sia quello indicato nella figura seguente (disegnato in blu):



Si osserva subito che, per t sufficientemente grande, il movimento perturbato rimane all'interno di quella specie di cilindro avente, per base, una circonferenza di raggio ε finito; in termini concreti, significa che gli stati descritti dal movimento perturbato rimangono ad una <u>distanza ε>0 finita</u> dagli stati descritti dal movimento nominale, il che significa, in base alla definizione fornita prima, che il movimento $x(\bullet)=\varphi(\bullet,\tau,\overline{x},u(\bullet))$ è stabile.

Chiaramente diverso è il caso indicato nella figura seguente:



In questo caso, si osserva che il movimento perturbato va via via "allontanandosi" dal movimento nominale, ossia che la distanza tra lo stato perturbato e quello nominale, per $t \to \infty$, diventa ∞. Questo significa che il movimento considerato è instabile, sempre secondo la definizione di Liapunov data prima.

Una considerazione importante, a questo punto, è la seguente: la definizione data prima riguarda quel particolare movimento nominale $x(\bullet) = \varphi(\bullet, \tau, \overline{x}, u(\bullet))$ preso in esame, per cui *il concetto di "stabilità del movimento" è relativa a ciascun movimento in esame.*

E' possibile, quindi, che, dato un sistema, ci siano alcuni movimenti stabili ed altri stabili. Questo per dire che *in generale, la frase "il sistema è stabile" non ha alcun significato.*

L'attributo di "stabilità" è relativo al movimento che si sta esaminando. Vedremo che qualcosa di diverso si ha nei sistemi lineari e regolari: infatti, per questi sistemi è possibile verificare che tutti i possibili movimenti o sono stabili o sono instabili. In altre parole, se si trova almeno un movimento stabile, si può dedurre che sono stabili tutti i movimenti, mentre, se si trova almeno un movimento instabile, si può dedurre che sono instabili tutti i movimenti. In questo caso, ha senso parlare di "sistema stabile" o "sistema instabile".

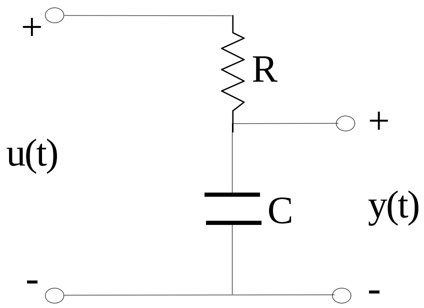
Un'altra osservazione da fare è la seguente: la definizione di "stabilità del movimento" data da Liapunov è una definizione cosiddetta "*locale*": questo perché non ci sono limiti sul valore di δ (che può essere scelto piccolo a piacere) e viene inoltre richiesto l'esame completo (cioè per tutti gli istanti $t \geq \tau$) di tutti i movimenti perturbati che partono in un intorno dello stato iniziale. Vedremo in seguito definizioni più generali.

C'è poi da sottolineare una cosa a proposito dell'importanza dell'ingresso $u(\bullet)$: la definizione di Liapunov esige la conoscenza dell'ingresso $u(\bullet)$ cui è soggetto il sistema, in quanto, senza questa informazione, non sarebbe possibile individuare né il movimento nominale né i movimenti perturbati; è possibile, allora, che uno stesso movimento nominale sia generato da due o più ingressi distinti: in situazioni come questa, non è detto che, per tutti questi ingressi, si debba avere la stessa conclusione nei riguardi della stabilità del movimento. E' possibile, cioè, che il movimento in esame sia stabile quando è dovuto ad un certo ingresso e sia instabile quando è dovuto ad un altro ingresso diverso dal precedente.

L'ultima considerazione da fare è la seguente: sempre con riferimento alla definizione di stabilità indicata prima, si osserva che compare la norma $\|x\|$ del vettore x; è lecito, allora, pensare che, nel caso generale, un determinato movimento risulti stabile o instabile a seconda della norma utilizzata. Naturalmente, questa precisazione scompare se il sistema considerato è a dimensioni finite: sappiamo, infatti, che, per questi sistemi, la dipendenza dalla norma non sussiste, per cui la stabilità del movimento considerato c'è o meno a prescindere dal tipo di norma utilizzata. Considerando che, nel seguito, si farà sempre riferimento a sistemi di dimensioni finite, <u>la norma utilizzata sarà sempre quella euclidea</u>, per cui non faremo mai particolari specifiche a questo proposito.

Esempio

Consideriamo la seguente rete elettrica:



Questa rete (già analizzata in precedenza) può essere modellata come un sistema così caratterizzato:

$$T = U = X = Y = \Re$$

$$\Omega = \{\text{funzioni continue a tratti}\}$$

$$\Gamma = \{\text{funzioni continue}\}$$

equazione di stato: $\quad x(t) = \varphi(t, \tau, x(\tau), u(\bullet)) = x(\tau) + \frac{1}{C}\int_\tau^t u(\xi)d\xi$

equazione di uscita: $\quad y(t) = \eta(x(t), u(t), y =)x(t)$

Consideriamo come istante iniziale l'istante $\tau=0$ e supponiamo che, in corrispondenza di questo istante, il sistema si trovi nello stato iniziale $\bar{x} = x(0) = 0$ (stiamo cioè supponendo che il condensatore sia scarico all'istante $\tau=0$): sotto queste ipotesi, il movimento nominale corrispondente, in base all'equazione di stato, è dato da

$$x(t) = \varphi(t,0,0,u(\bullet)) = \frac{1}{C}\int_0^t u(\xi)d\xi$$

Questa funzione è definita a meno dell'ingresso: per comodità, supponiamo che l'ingresso (cioè la tensione che alimenta la rete) sia costante e pari al valore $\bar{u}$, per cui concludiamo che il movimento nominale del sistema, in corrispondenza di questo ingresso e delle specificate condizioni iniziali, è

$$x(t) = \varphi(t,0,0,\bar{u}) = \frac{1}{C}\bar{u}t \qquad \forall t \geq 0$$

Supponiamo adesso che ci sia una perturbazione sullo stato iniziale del sistema: indicata con x l'entità di questa perturbazione, è chiaro che lo stato iniziale perturbato diventa $x_p(0) = x(0) + x = x$; il corrispondente movimento perturbato, in presenza sempre dello stesso ingresso costante, è evidentemente

$$x_p(t) = \varphi(t,0,x,\overline{u}) = \frac{1}{C}\overline{u}t + x \qquad \forall t \geq 0$$

Ci chiediamo se il movimento nominale x(t) è stabile secondo la definizione di Liapunov. Per rispondere, dobbiamo applicare la definizione: nell'ipotesi che la perturbazione dello stato iniziale sia tale che $\|x - \overline{x}\| = \|x\| \leq \delta$, con δ>0 fissato, dobbiamo controllare se è soddisfatta o meno la condizione $\|\varphi(t,0,0,\overline{u})) - \varphi(t,0,x,\overline{u}))\| \leq \varepsilon$ per ∀t≥τ.

Intanto, dato che conosciamo le espressioni analitiche del movimento perturbato e di quello nominale, possiamo scrivere che

$$\|\varphi(t,0,0,\overline{u})) - \varphi(t,0,x,\overline{u}))\| = \left\| \frac{1}{C}\overline{u}t - \frac{1}{C}\overline{u}t + x \right\| = \|x\|$$

In base a quanto ottenuto, la condizione perché il movimento in esame sia stabile è che risulti $\|x\| < \varepsilon$: allora, è chiaro che, essendo per ipotesi $\|x\| \leq \delta$, se prendiamo δ=ε, questa condizione è senz'altro verificata.

Concludiamo che il movimento considerato è stabile (secondo Liapunov).

Esempio

Consideriamo adesso un sistema tempo-discreto, del 2° ordine, descritto dalla seguente rappresentazione di stato:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) + x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

Prendiamo ancora una volta l'istante τ=0 come istante iniziale; come stato iniziale consideriamo invece lo stato $\overline{x} = x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; infine, facciamo l'ipotesi che l'ingresso sia identicamente nullo, il che comporta che la rappresentazione di stato possa essere scritta nella forma

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

Il movimento libero del sistema, nelle condizioni specificate, si può facilmente ricavare da queste due equazioni ed è costituito dalla seguente sequenza di vettori:

$$x(0) = \overline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x(2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x(3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad x(4) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots$$

Adesso supponiamo che ci sia la solita perturbazione sullo stato iniziale del sistema e, in particolare, supponiamo che questa perturbazione sia tale che il nuovo stato iniziale possa essere valutato come

$$\overline{x}_p = x_p(0) = \begin{bmatrix} 1+\Delta x_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In pratica, stiamo facendo l'ipotesi che la perturbazione concorra a modificare, di una quantità Δx_1, solo la prima componente dello stato, mentre invece lasci invariata la seconda.

Il movimento perturbato che si ottiene in corrispondenza di questo stato iniziale perturbato sarà allora costituito dalla seguente sequenza di vettori:

$$x_p(0) = \overline{x}_p = \begin{bmatrix} 1+\Delta x_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2+\Delta x_1 \end{bmatrix} \quad x(2) = \begin{bmatrix} 2+\Delta x_1 \\ 3+\Delta x_1 \end{bmatrix} \quad x(3) = \begin{bmatrix} 3+\Delta x_1 \\ 4+\Delta x_1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots$$

E' chiaro, senza fare troppi ragionamenti, che, per quanto piccolo possa essere il valore di Δx_1, il movimento perturbato diverge da quello nominale: non è dunque possibile, una volta fissato $\varepsilon>0$, trovare un $\delta>0$ che soddisfi la condizione di Liapunov. Deduciamo che il movimento in esame è un movimento instabile.

STABILITÀ DELLA TRAIETTORIA

In precedenza, abbiamo detto che per "*traiettoria*" di un sistema si intende la successione di stati attraverso i quali passa il sistema durante la sua evoluzione. Da un punto di vista grafico, una volta individuato lo spazio degli eventi del sistema, la traiettoria non è altro che la proiezione del movimento $x(\bullet) = \varphi(\bullet, \tau, x(\tau), u(\bullet))$ sullo spazio di stato. Accanto al concetto di "stabilità del movimento" è possibile allora definire anche quello di "*stabilità della traiettoria*", che poi è spesso quello di maggiore interesse.

La situazione che si può creare è la seguente: supponiamo di considerare un determinato movimento del sistema e di accertare che si tratta di un movimento instabile; questo significa che, all'aumentare di t, il movimento perturbato passi attraverso punti (nello spazio degli eventi) sempre più distanti da quelli descritti dal movimento nominale; tuttavia, è possibile che il movimento perturbato passi comunque attraverso degli stati estremamente vicini a quelli interessati dal movimento nominale: questo significa che la "**traiettoria perturbata**" (cioè la proiezione, sullo spazio di stato, del movimento perturbato) sia estremamente simile a quella nominale. Ha senso, perciò, parlare di "**stabilità della traiettoria**" di un sistema e si adotta, infatti, la seguente definizione:

Def. *Fissati un istante iniziale t, uno stato iniziale $\overline{x}$ e un ingresso $u(\bullet)$, una traiettoria $x(t) = \varphi(t, \tau, \overline{x}, u(\bullet))$ si dice* ***"stabile"*** *se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste almeno un $\delta > 0$ tale che, per tutti gli x che soddisfano la relazione $\|x - \overline{x}\| \leq \delta$, sia possibile determinare, per ogni istante $t_1 \geq t$, un istante $t_2 \geq t$ che verifichi la condizione*

$$\|\varphi(t_1, \tau, x, u(\bullet)) - \varphi(t_2, \tau, \overline{x}, u(\bullet))\| \leq \varepsilon$$

In certe applicazioni, quello che interessa veramente è la stabilità della traiettoria. In quest'ottica si deve tenere conto di un concetto fondamentale: supponiamo di aver studiato un determinato movimento del sistema in esame e di aver tratto delle conclusioni a proposito della sua stabilità; allora, *mentre l'eventuale stabilità di tale movimento implica evidentemente quella della corrispondente traiettoria, l'eventuale instabilità del movimento NON implica necessariamente l'instabilità della traiettoria.*

Questo principio sarà più chiaro nell'esempio seguente.

Esempio

Consideriamo un sistema regolare, a dimensioni finite, tempo-continuo, lineare, tempo-invariante, del 2° ordine descritto dalla seguente equazione di stato:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Gu$$

Scegliamo come istante iniziale τ=0 e, in corrispondenza di questo istante, supponiamo che il sistema si trovi nello stato $\overline{x} = x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; supponiamo inoltre che l'ingresso al sistema sia identicamente nullo. Sotto queste ipotesi, sappiamo che il movimento del sistema è dato dal solo contributo libero (quello cioè legato allo stato iniziale) ed è valutabile come

$$x(t) = e^{Ft}\overline{x}$$

Dato che la matrice di stato F presenta la struttura di un tipico miniblocco di Jordan, è immediato calcolarsi quanto vale la matrice esponenziale e^{Ft}: si ha infatti che

$$e^{Ft} = Me^{Jt}M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il movimento nominale in esame è dunque descritto dalla funzione (vettoriale)

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overline{x} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ci chiediamo ancora una volta se si tratta di un movimento stabile oppure no. Per rispondere a questa domanda, dobbiamo considerare il movimento perturbato, ossia il movimento che si ha quando lo stato iniziale non è più $\overline{x}$, ma un generico stato perturbato x_p: se supponiamo che tale stato iniziale perturbato sia

$$x_p = \begin{bmatrix} 1+\Delta x_1 \\ 1+\Delta x_2 \end{bmatrix}$$

il movimento perturbato sarà

$$x_p(t)=\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}x_p=\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+\Delta x_1\\ 1+\Delta x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\Delta x_1+t(1+\Delta x_2)\\ 1+\Delta x_2\end{bmatrix}$$

E' abbastanza evidente che, per quanto le quantità Δx_1 e Δx_2 possano essere piccole, il movimento perturbato diverge sicuramente da quello nominale per $t\to\infty$. Da un punto di vista analitico, fissato un istante t generico, la differenza (da non confondere con la distanza) tra lo stato nominale e quello perturbato è

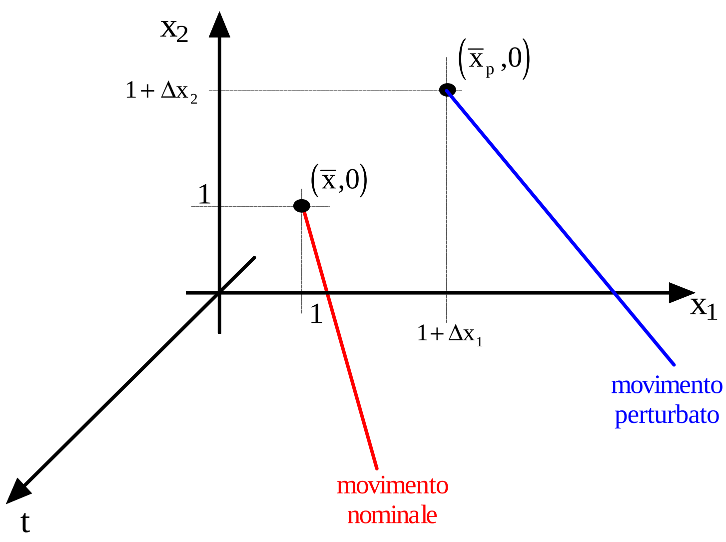
$$x_p(t)-x(t)=\begin{bmatrix}1+\Delta x_1+t(1+\Delta x_2)\\ 1+\Delta x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1+t\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta x_1+t\Delta x_2\\ \Delta x_2\end{bmatrix}$$

Mentre la seconda componente di questa differenza si mantiene costante nel tempo, la prima componente cresce con t e lo stesso accadrà quindi anche per la corrispondente norma:

$$\lim_{t\to\infty}\left\|x_p(t)-x(t)\right\|=\lim_{t\to\infty}\sqrt{(\Delta x_1+t\Delta x_2)^2+(\Delta x_2)^2}=\infty$$

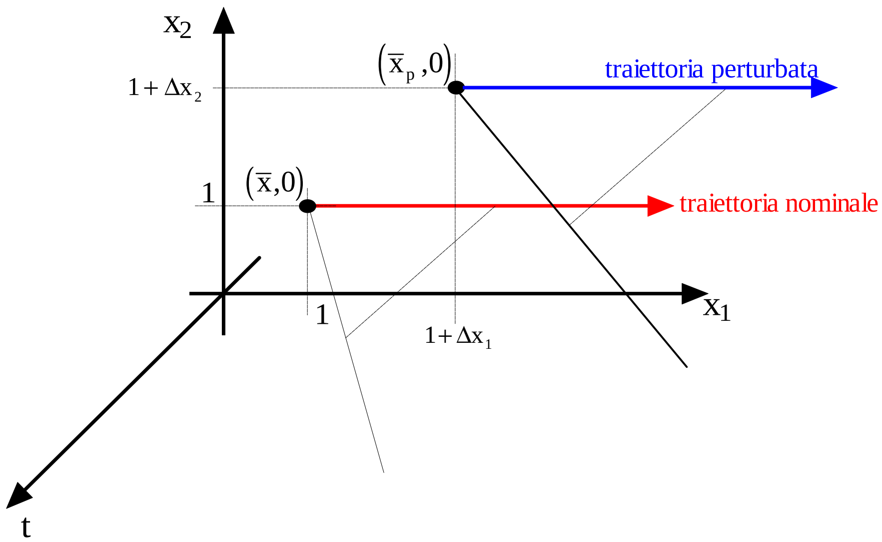
Possiamo dunque concludere che il movimento in esame è instabile.

La cosa risulta ancora più chiara a livello grafico; infatti, possiamo rappresentare i due movimenti nello spazio degli eventi, nel quale essi rappresentato, evidentemente, due semirette che partono dallo spazio di stato:



Da questa figura si evince chiaramente che, per $t\to\infty$, i due movimenti (perturbato e nominale) divergono.

Vediamo invece cosa accade alle rispettive traiettorie, che sono le proiezioni dei due movimenti sul piano di stato $[x_1, x_2]$:



Si osserva chiaramente che la distanza tra le due traiettorie rimane costante; non solo, ma questa distanza è pari evidentemente a Δx_2, per cui essa può essere ridotta a proprio piacimento semplicemente agendo su Δx_2.

Siamo dunque in un tipico caso in cui, nonostante il movimento in esame sia instabile, la corrispondente traiettoria sia invece stabile.

STABILITÀ DEGLI STATI DI EQUILIBRIO

Quando, a suo tempo, abbiamo introdotto il concetto di "movimento" del sistema, inteso come evoluzione temporale del suo stato, abbiamo detto che esistono dei movimenti particolari (detti "*movimenti costanti*") che sono quelli in cui lo stato del sistema rimane invariato nel tempo. In termini formali, vale cioè la seguente definizione: fissato un istante iniziale τ, fissato il corrispondente stato iniziale $\overline{x} = x(t)$ e fissato l'andamento dell'ingresso, si dice che $\overline{x}$ è uno "**stato di equilibrio**" se il sistema rimane in tale stato al passare del tempo, ossia se è verificata la condizione

$$\overline{x} = \varphi\left(t, \tau, \overline{x}, u(\bullet)\right) \quad \forall t \geq \tau$$

In questo senso, quindi, gli stati di equilibrio possono essere visti come dei particolari movimenti del sistema, cioè appunto dei movimenti durante i quali lo stato rimane invariato nel tempo. Di conseguenza, anche a questi movimenti possiamo applicare le definizioni di "stabilità del movimento" e di "stabilità della traiettoria" citate in precedenza. La definizione rigorosa di "**stabilità di uno stato di equilibrio**" è la seguente:

Def. *Uno stato di equilibrio $\overline{x}$, corrispondente ad un determinato ingresso $u(\bullet)$ e ad un determinato istante iniziale t, si dice "**stabile**" se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste almeno un $\delta > 0$ tale che, per tutti gli x che soddisfano la relazione $\left\|x - \overline{x}\right\| \leq \delta$, sia verificata la condizione*

$$\left\|\varphi\left(t, \tau, x, u(\bullet)\right) - \overline{x}\right\| \leq \varepsilon \qquad \forall t \geq \tau$$

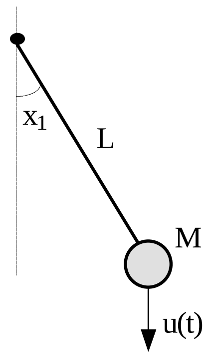
Si osserva subito che esiste solo una minima differenza formale tra questa definizione e quella data in precedenza per un movimento generico: infatti, in quel caso, il movimento nominale (cioè appunto il movimento in esame) era indicato da $x(\bullet)=\varphi(\bullet,\tau,\overline{x},u(\bullet))$, mentre, in questo caso, proprio per il fatto che lo stato è di equilibrio e quindi vale la relazione $\overline{x}=\varphi(t,\tau,\overline{x},u(\bullet)) \quad \forall t\geq\tau$, il movimento nominale coincide con lo stato di equilibrio $\overline{x}$.

Per questa definizione di stabilità, valgono ovviamente le stesse considerazioni fatte a proposito della definizione di stabilità di un generico movimento; in particolare, però, è bene sottolineare due aspetti:

- in primo luogo, è chiaro che *per gli stati di equilibrio il concetto di stabilità del movimento ed il concetto di stabilità della corrispondente traiettoria coincidono,* il che significa, in questo caso, che la stabilità del movimento implica quella della traiettoria e viceversa;
- in secondo luogo, ricordiamo, anche in questo caso, che, se lo stato di equilibrio è ottenibile mediante due o più ingressi distinti, è possibile che esso sia stabile rispetto solo a qualcuno di questi ingressi e instabile rispetto agli altri.

Esempio: pendolo non smorzato

Consideriamo un sistema formato dal pendolo non smorzato indicato nella figura seguente:



Se indichiamo con x_1 la posizione del pendolo, con x_2 la sua velocità angolare e con u(t) la forza complessiva (somma della forza peso e di una forza variabile esercitata, ad esempio, per mezzo di calamita) agente su di esso, è facile verificare che il sistema è descritto dalle seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{u(t)\sin x_1}{ML} \end{cases}$$

Uno stato di equilibrio per questo sistema è sicuramente lo stato $\overline{x}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$: la verifica di questo è sia intuitiva (visto che questo stato corrisponde al pendolo perfettamente verticale e immobile) sia analitica, dato che, per definizione di stato di equilibrio, i valori x_1=0 e x_2=0 soddisfano le equazioni caratteristiche dell'equilibrio, ossia

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 = -\dfrac{u(t)\sin x_1}{ML} \end{cases}$$

Per ragionare in termini di stabilità, dobbiamo fissare un istante iniziale τ e un ingresso $u(\bullet)$ e dobbiamo poi vedere se lo stato di equilibrio individuato è stabile o meno, secondo la definizione data prima, rispetto a questo stato iniziale e a questo ingresso.........

Si verifica che, in effetti, lo stato di equilibrio è stabile nei confronti dell'ingresso $u(\bullet): u(t) \equiv 1$, mentre è instabile nei confronti dell'ingresso $u(\bullet): u(t) \equiv -1$.

Questo è dunque un tipico caso in cui lo stato di equilibrio si ottiene in corrispondenza di più ingressi e solo rispetto ad alcuni di essi risulta essere stabile.

STABILITÀ UNIFORME DI UNO STATO DI EQUILIBRIO

Consideriamo ancora la definizione di stabilità di uno stato di equilibrio: essa dice, in pratica, che, perché uno stato di equilibrio $\bar{x}$ sia stabile, la distanza tra esso e lo stato perturbato non deve essere superiore ad $\varepsilon>0$ per $\forall t\geq\tau$. Questo comporta che il valore $\delta>0$ (dove δ è la massima distanza dello stato iniziale perturbato dallo stato iniziale nominale) dipenda in generale dall'istante iniziale τ, per cui possiamo scrivere $\delta=\delta(\tau)$. Una situazione che può capitare è la seguente: supponiamo di aver individuato uno stato di equilibrio $\bar{x}$ per il nostro sistema continuo e supponiamo anche di aver verificato che tale stato è stabile a partire da qualsiasi istante iniziale τ; in base alla definizione, questo significa che, quale che sia l'istante iniziale τ, è sempre possibile individuare una sfera di raggio $\delta>0$ tale che, preso un qualsiasi stato perturbato x situato in tale sfera, il corrispondente movimento perturbato $\varphi(\bullet,\tau,x,u(\bullet))$ abbia una distanza dal movimento nominale $\bar{x}=\varphi(\bullet,\tau,\bar{x},u(\bullet))$ non superiore ad ε.

Allo stesso tempo, però, supponiamo che questa stabilità sia verificata solo a patto che, quanto più l'istante iniziale è piccolo, tanto più venga diminuito il valore di δ, ossia tanto più ravvicinati siano x e $\bar{x}$. In questo caso, nonostante lo stato di equilibrio sia stabile per $\forall\tau$, non è possibile individuare un unico valore di δ che possa garantire la stabilità dello stato di equilibrio per tutti gli istanti τ. Questa proprietà non è certo auspicabile in un sistema, in quanto è invece preferibile che lo stato di equilibrio sia stabile per qualsiasi istante iniziale τ e che, inoltre, sia possibile individuare un unico $\delta>0$ che verifichi la stabilità a prescindere dal τ fissato. In altre parole, è auspicabile avere una indipendenza di δ da τ.

Sussiste allora la seguente definizione di "**uniforme stabilità di uno stato di equilibrio**":

Def. *Uno stato di equilibrio $\bar{x}$, corrispondente ad un determinato ingresso $u(\bullet)$ e ad un determinato istante iniziale t, si dice **"uniformemente stabile"** se è stabile e se d non dipende da t*

L'uniforme stabilità consiste dunque in una ulteriore particolarizzazione della definizione di stato di equilibrio stabile: oltre la stabilità, essa richiede anche l'indipendenza di δ da τ. E' chiaro, perciò, che *l'uniforme stabilità implica la stabilità, mentre non vale il viceversa.*

Vedremo, in seguito, che, se il sistema è tempo-invariante e se lo stato di equilibrio in esame corrisponde ad un ingresso costante, allora vale anche l'implicazione inversa, ossia che la stabilità implica l'uniforme stabilità.

STABILITÀ ASINTOTICA

Torniamo adesso a parlare del movimento di un sistema in generale, al fine di enunciare un nuovo concetto di stabilità, il quale, oltre alla stabilità così come è stata definita prima, richiede anche una condizione sul comportamento asintotico del movimento perturbato. Definiamo dunque la cosiddetta "**stabilità asintotica del movimento**", che è caratterizzata dalla seguente definizione:

Def. *Fissati un istante iniziale t, uno stato iniziale $\overline{x}$ e un ingresso $u(\bullet)$, un movimento $x(\bullet)=\varphi(\bullet,\tau,\overline{x},u(\bullet))$ si dice "**asintoticamente stabile**" se, per qualsiasi $\varepsilon>0$, esiste almeno un $\delta>0$ tale che, per tutti gli x che soddisfano la relazione $\|x-\overline{x}\|\le\delta$, sono verificate le condizioni*

$$\text{a)}\quad \left\|\varphi(t,\tau,x,u(\bullet))-\varphi(t,\tau,\overline{x},u(\bullet))\right\|\le\varepsilon \qquad \forall t\ge\tau$$

$$\text{b)}\quad \lim_{t\to\infty}\left\|\varphi(t,\tau,x,u(\bullet))-\varphi(t,\tau,\overline{x},u(\bullet))\right\|=0$$

Si osserva, dunque, come la stabilità asintotica del movimento richieda sia la stabilità (condizione (a)) sia anche la **convergenza** (condizione (b)), per $t\to\infty$, di ogni movimento perturbato al movimento nominale in esame.

Una osservazione importante da fare è che la condizione (b) ha senso solo se ha senso il limite che in essa compare e la possibilità di definire questo limite è legata a come è strutturato l'insieme dei tempi T che caratterizza il sistema: i sistemi tempo-continui (T=numeri reali) e dei sistemi tempo-discreti (T=numeri interi), soddisfano a questo requisito.

In modo del tutto analogo a quanto fatto in precedenza, sulla base della definizione appena fornita è possibile definire anche i concetti di "**asintotica stabilità della traiettoria**", "**asintotica stabilità di uno stato di equilibrio**" e di "**uniforme asintotica stabilità di uno stato di equilibrio**".

E' superfluo sottolineare, infine, che *l'asintotica stabilità implica la stabilità, mentre non vale il viceversa.*

Ecco perché, nel seguito, distingueremo tra l' "*asintotica stabilità*" e la "**semplice stabilità**" (o anche "*stabilità non asintotica*").

SIGNIFICATO PRATICO DI STABILITÀ: STABILITÀ ALLA LIAPUNOV

Tutte le definizioni di stabilità date finora fanno riferimento al cosiddetto "movimento perturbato" del sistema, ossia al movimento del sistema corrispondente ad una perturbazione dello stato iniziale nominale. In generale, nei sistemi fisici, la perturbazione iniziale è dovuta alla presenza di cause (o ingressi) minori, cui diamo il nome di "**disturbi**", che agiscono sul sistema, ma non sono state incluse nella schematizzazione matematica del sistema stesso. Talvolta, può accadere che questi disturbi siano tali da non generare una perturbazione qualsiasi, bensì una perturbazione con particolari caratteristiche: questo suggerirebbe di pensare ad una definizione leggermente modificata di stabilità, ossia ad una definizione che, al posto di considerare tutte le condizioni iniziali tali che $\|x-\overline{x}\|\le\delta$, consideri solo quelle che soddisfano qualche altra proprietà specifica. Un procedimento del genere, però, richiederebbe la conoscenza dell'influenza che i disturbi hanno sullo stato del sistema: questa conoscenza spesso non c'è, per cui si preferisce sempre porsi nelle condizioni più sfavorevoli, cioè si preferisce supporre che la perturbazione possa essere di tipo qualsiasi.

D'altra parte, si osserva che le definizioni di stabilità che abbiamo elencato partono dal presupposto fondamentale che i disturbi agiscano sul sistema prima dell'istante iniziale (in modo tale da perturbare, appunto, lo stato iniziale), ma poi cessino del tutto. Nella realtà, questo spesso non è vero, nel senso che spesso le perturbazioni rimangono anche dopo l'istante iniziale, tanto che si parla di "**perturbazioni persistenti**". Questo fatto può indurre a pensare che la stabilità e l'asintotica stabilità, così come le abbiamo definite in precedenza, non implichino, di fatto, la reale stabilità del sistema in esame, proprio perché <u>sembra</u> che non tengano conto delle eventuali perturbazioni persistenti sul sistema. Questa considerazione viene parzialmente smentita da un fondamentale risultato dovuto a **Malkin**:

<u>Teorema</u> - *Dato un generico sistema, fissati l'istante iniziale t, lo stato iniziale $\overline{x}=x(\tau)$ e l'ingresso $u(\bullet)$, se lo stato iniziale $\overline{x}$ è uno stato di equilibrio ed è anche asintoticamente stabile, allora esso è stabile anche in presenza di perturbazioni persistenti*

Vediamo di capire bene cosa afferma questo risultato.

Per comodità, facciamo riferimento ad un sistema regolare, per il quale, quindi, l'equazione (differenziale) di stato è nella forma

$$\dot{x} = f\left(x(t), u(t), t\right)$$

Supponiamo che lo stato $\overline{x}$ sia uno stato di equilibrio in corrispondenza di un ingresso nominale costante $u(t)=\overline{u}$: sotto questa ipotesi, il movimento del sistema sarà regolato da una equazione del tipo

$$\dot{x} = \dot{x} = f\left(x(t), \overline{u}, t\right) = g(x,t)$$

ossia sarà funzione solo dello stato e del tempo (mentre non compare l'ingresso che ormai è fissato).

Nel caso, invece, l'ingresso sia un generico ingresso perturbato, il corrispondente movimento perturbato potrà essere espresso come

$$\dot{x} = g(x,t) + p(x,t)$$

Allora, *dire che lo stato di equilibrio $\overline{x}$ è "stabile in presenza di perturbazioni persistenti" significa dire che, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono almeno un $\delta > 0$ e un $\eta > 0$ tali che, per tutti gli x che soddisfano la relazione $\|x - \overline{x}\| \le \delta$ e per tutti i disturbi p(x,t) che soddisfano la relazione $\|p(x,t)\| \le \eta$, il movimento perturbato $\varphi_p\left(t,\tau,x,\overline{u}(\bullet)\right)$ soddisfi la condizione*

$$\left\|\varphi_p\left(t,\tau,x,\overline{u}(\bullet)\right) - \overline{x}\right\| \le \varepsilon \qquad \forall t \ge \tau$$

Possiamo allora dire, in base al teorema di Malkin, che, *se $\overline{x}$ è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile, siamo certi che il movimento perturbato, dovuto alla presenza di disturbi agenti sul sistema, non si allontani troppo dal movimento nominale, a patto però che i disturbi siano sufficiente limitati (cioè $\|p(x,t)\| \le \eta$).*

La conseguenza più immediata di questo risultato è che è lecito esaminare solo perturbazioni sullo stato iniziale del sistema, supponendo sempre che l'ingresso al sistema non risenta di disturbi (ossia che esso coincida sempre con l'ingresso nominale). E' abbastanza evidente che si tratta di un risultato molto importante, soprattutto per il fatto che l'analisi della stabilità in presenza di perturbazioni solo sullo stato iniziale è senz'altro la più comoda.

*Il problema dello studio della stabilità di un sistema in presenza di perturbazioni solo sullo stato iniziale prende il nome di **"problema di stabilità alla Liapunov"**.*

Legame tra stabilità del movimento e stabilità dell'uscita

Sempre a proposito delle definizioni di stabilità secondo Liapunov, si osserva che tali definizioni fanno riferimento solo allo stato del sistema, quando invece, nella maggior parte dei casi, la variabile che ha un reale interesse è l'uscita. Ai fini pratici, sarebbe cioè più importante lo studio della stabilità dell'uscita rispetto a quello della stabilità dello stato. In effetti, <u>anche per l'uscita si possono definire i concetti di stabilità e di asintotica stabilità</u>. Il problema è che, mentre esistono (e li vedremo) metodi per lo studio della stabilità del movimento (di stato), non esistono metodi per lo studio del movimento di uscita. Tuttavia, c'è anche qui un risultato fondamentale, che, nella maggior parte dei casi, risolve il problema:

<u>Teorema</u> *- Sia dato un generico sistema descritto dalle equazioni*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ y = \eta(x) \end{cases}$$

> *Se la trasformazione di uscita* $\eta(\bullet)$ *è uniformemente continua in X, la stabilità del movimento (di stato)* $\varphi(\bullet,\tau,\bar{x},u(\bullet))$ *implica la stabilità del movimento di uscita* $\eta(\varphi(\bullet,\tau,\bar{x},u(\bullet)))$

Ancora una volta, l'utilità di questo risultato è evidente: se accertiamo che il movimento (di stato) del sistema è stabile (o asintoticamente stabile), siamo certi che il corrispondente movimento di uscita è anch'esso stabile (o asintoticamente stabile). Di qui l'opportunità e la necessità di studiare sempre e solo la stabilità del movimento (di stato) del sistema.

Prima di passare avanti, chiariamo, con delle definizioni formali, cosa si intende per "trasformazione di uscita uniformemente continua" e per "stabilità del movimento di uscita":

- la funzione (o trasformazione) di uscita $\eta(\bullet)$ è una funzione che, in generale, ha come argomenti il valore istantaneo dello stato, quello istantaneo dell'ingresso e, eventualmente, il tempo; nel teorema, si considera invece una funzione $\eta(\bullet)$ legata solo allo stato; allora *richiedere che* $\eta(\bullet)$ *sia **uniformemente continua** nello spazio di stato X significa richiedere che, per "e>0, esista almeno un d>0 tale che, presi due generici stati* $\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \in X$ *tali che* $\|x_1 - x_2\| \le \delta$*, sia soddisfatta la condizione* $\|\eta(x_1) - \eta(x_2)\| \le \varepsilon$

- per quanto riguarda, invece, il movimento di uscita, la definizione di "stabilità" è del tutto analoga a quella fornita per il movimento di stato: *fissati un istante iniziale t, uno stato iniziale* $\bar{x}$ *e un ingresso* $u(\bullet)$, *un movimento di uscita* $y(\bullet)=\eta(\varphi(\bullet,\tau,\bar{x},u(\bullet)))$ *si dice "**stabile**" se, per qualsiasi* $\varepsilon>0$, *esiste almeno un* $\delta>0$ *tale che, per tutti gli x che soddisfano la relazione* $\|x-\bar{x}\|\le\delta$, *sia verificata la condizione*

$$\Bigg\| \underbrace{\eta(\varphi(t,\tau,x,u(\bullet)))}_{\text{uscita nominale } y(t)} - \underbrace{\eta(\varphi(t,\tau,\bar{x},u(\bullet)))}_{\text{uscita perturbata } y_p(t)} \Bigg\| \le \varepsilon \qquad \forall t \ge \tau$$

L'equilibrio nei sistemi regolari

DETERMINAZIONE DEGLI STATI DI EQUILIBRIO

Il principale argomento di cui ci occuperemo d'ora in poi è quello della stabilità degli stati di equilibrio (o, brevemente, della "*stabilità dell'equilibrio*") dei sistemi regolari, a dimensioni finite e tempo-invarianti. Abbiamo in precedenza visto che questi sistemi sono descritti da 2 equazioni vettoriali del tipo seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t), u(t)] \\ y(t) = \eta(x(t)) \end{cases}$$

La prima equazione è l' "*equazione di stato*" del sistema e rappresenta n equazioni differenziali del 1° ordine (dove n è la dimensione dello spazio di stato); la seconda equazione è invece l' "*equazione di uscita*", che si suppone essere continua nel suo argomento.

Il primo passo per lo studio della stabilità degli stati equilibrio di un sistema di questo tipo consiste nell'individuare un metodo che consenta di determinare tutti gli stati di equilibrio che il sistema stesso possiede. A questo scopo, riportiamo ancora una volta la definizione di "*stato di equilibrio*" di un sistema: fissato un istante iniziale τ, fissato il corrispondente stato iniziale $\bar{x}=x(t)$ e fissato l'andamento dell'ingresso, si dice che $\bar{x}$ è uno "**stato di equilibrio**" se il sistema rimane in tale stato al passare del tempo, ossia se è verificata la condizione

$$\bar{x} = \varphi(t,\tau,\bar{x},u(\bullet)) \quad \forall t \ge \tau$$

Da questa definizione si intuisce che *uno stato di equilibrio* $\bar{x}$, *corrispondente ad un ingresso* $\bar{u}(\bullet)$, *è caratterizzato dal fatto che la funzione generatrice* $f[x(t),u(t)]$, *valutata in corrispondenza di tale stato, si annulla per tutti i valori u(t) assunti dalla funzione di ingresso.*

Uno stato di equilibrio $\bar{x}$, in corrispondenza di un ingresso $\bar{u}(\bullet)$, è cioè tale da soddisfare la condizione

$$\boxed{f(\bar{x},\bar{u}(t)) = 0 \qquad \forall \bar{u}(t)}$$

Solo in questo caso, infatti, risulta $\dot{x} = 0$, come deve appunto essere perché il movimento (di stato) del sistema sia costante nel tempo.

Quindi, se riusciamo in qualche modo a trovare tutti gli stati x che soddisfano quella condizione, siamo certi di aver trovato, in corrispondenza dell'ingresso $\overline{u}(\bullet)$ prefissato, tutti e soli gli stati di equilibrio del sistema; cominciamo allora a indicare con $\overline{X}$ $(\subseteq X)$ l'insieme degli stati ottenuti risolvendo quella equazione:

$$\overline{X} = \left\{ \overline{x} \in X \middle| f(\overline{x}, u) = 0 \quad \text{per qualche } u \in \Omega \right\}$$

Adesso facciamo la seguente osservazione: data la funzione di ingresso $\overline{u}(\bullet)$ e fissato un istante preciso $\overline{t}$, se $\overline{x}$ è uno stato di equilibrio del sistema in corrispondente dell'ingresso specificato, sarà sicuramente soddisfatta la condizione

$$f\left(\overline{x}, \overline{u}(\overline{t})\right) = 0$$

Allora, consideriamo un nuovo ingresso $u_0(\bullet)$ che sia costante e pari proprio a $\overline{u}(\overline{t})$: sicuramente, sarà soddisfatta la condizione

$$f\left(\overline{x}, \overline{u}_0(t)\right) = 0 \qquad \forall t$$

Questa relazione ci dice che *dovendo ricercare tutti gli stati di equilibrio di un sistema regolare a dimensioni finite e <u>tempo-invariante</u>, non è necessario considerare tutti i possibile ingressi, ma è sufficiente considerare solo quelli costanti,*

In altre parole, <u>nell'ipotesi fondamentale che il sistema sia tempo-invariante</u>, siamo certi che *tutti gli stati di equilibrio del sistema possono essere "generati" da ingressi costanti nel tempo.*

In altre parole ancora, se Ω è l'insieme delle funzioni di ingresso ammissibili per il sistema e $\overline{\Omega}$ è il sottoinsieme di Ω costituito dalle sole funzioni costanti, nel determinare gli stati di equilibrio ci si può limitare a considerare solo l'insieme $\overline{\Omega}$. Naturalmente, bisogna stare attenti a questo concetto, perché esso non implica assolutamente che ad ogni ingresso costante corrisponda almeno uno stato di equilibrio del sistema: <u>ogni ingresso costante può o meno generare uno o più stati di equilibrio</u>.

Come detto, questa proprietà è valida solo per sistemi tempo-invarianti (oltre che regolari e a dimensioni finite), mentre viene a mancare per quelli tempo-varianti: infatti, in questi sistemi, la dipendenza dal tempo della funzione generatrice $f[x(t), u(t), t]$ può richiedere una dipendenza esplicita dal tempo dell'ingresso u in modo che la derivata dello stato sia identicamente nulla.

Premesso questo, avendo indicato con $\overline{\Omega}$ l'insieme delle funzioni di ingresso costanti ammissibili per il sistema, abbiamo detto che, verosimilmente, solo una parte di queste funzioni genera degli stati di equilibrio: indichiamo allora con $\overline{U}$ $(\subseteq \overline{\Omega})$ il cosiddetto "**insieme degli ingressi di equilibrio**", ossia l'insieme di tutti gli ingressi costanti cui corrispondono stati di equilibrio. E' chiaro che gli elementi dell'insieme $\overline{U}$ e dell'insieme $\overline{X}$ si determinano trovando tutte le possibili soluzione dell'equazione

$$f(\overline{x}, u_0) = 0$$

dove le incognite sono appunto u_0 e $\overline{x}$.

STATI DI EQUILIBRIO ISOLATI

Supponiamo adesso di conoscere un ingresso costante $u_0 \in \overline{\Omega}$ e di chiederci se ad esso corrispondono o meno degli stati di equilibrio del sistema; se indichiamo con $\overline{X}_{u_0}$ $\left(\subseteq \overline{X}\right)$ l'insieme degli eventuali stati di equilibrio corrispondenti a questo ingresso, è ovvio che ci sono solo due possibilità:

- la prima è che $u_0 \in \overline{U}$, ossia che u_0 generi almeno uno stato di equilibrio: in questo caso, risulterà certamente $\overline{X}_{u_0} \neq \varnothing$;
- la prima è invece che $u_0 \notin \overline{U}$, il che significa che non ci sono stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso u_0: in questo caso, risulterà $\overline{X}_{u_0} = \varnothing$.

Supponiamo allora che $\overline{X}_{u_0} \neq \varnothing$ e sia $\overline{x} \in \overline{X}_{u_0}$ un generico stato di equilibrio corrispondente all'ingresso specificato; se rappresentiamo questo stato di equilibrio nello spazio di stato, esso corrisponderà ad un punto; in quanto tale, esso potrà essere o meno un punto di accumulazione per l'insieme $\overline{X}_{u_0}$: dire che $\overline{x}$ è di accumulazione per $\overline{X}_{u_0}$ significa dire che, preso un intorno $I_{\overline{x}}$ (piccolo a piacere) di $\overline{x}$, al suo interno ci sarà almeno un altro elemento di $\overline{X}_{u_0}$, ossia un altro stato di equilibrio del sistema (corrispondente sempre all'ingresso u_0).

Allora, se $\overline{x}$ NON risulta essere un punto di accumulazione per $\overline{X}_{u_0}$, diremo che si tratta di uno stato di equilibrio "**isolato**" per il sistema: in termini formali, possiamo dunque affermare che *uno stato di equilibrio $\overline{x}$ è "isolato" se e solo se*

$$\boxed{\exists I_{\overline{x}} \quad \text{tale che} \quad I_{\overline{x}} \cap \overline{X}_{u_0} = \left\{\overline{x}\right\}}$$

N.B. Abbiamo appena detto che uno stato di equilibrio $\overline{x}$, corrispondente ad un ingresso u_0, può o meno essere di accumulazione per l'insieme $\overline{X}_{u_0}$ degli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso u_0; in effetti, $\overline{x}$ può essere o meno di accumulazione anche per l'insieme $\overline{X}$ di tutti gli stati di equilibrio del sistema: se si tratta di un punto di accumulazione per tale insieme, significa che molto vicino ad $\overline{x}$ ci sarà un altro stato di equilibrio del sistema, che, però, non necessariamente corrisponde allo stesso ingresso u_0. Di conseguenza, la definizione di stato di equilibrio "isolato" potrebbe essere data anche con riferimento a tutto $\overline{X}$. In realtà, invece, quello che interessa di più è vedere se $\overline{x}$ è isolato rispetto a $\overline{X}_{u_0}$ ed è per questo che abbiamo dato la definizione rispetto a tale insieme.

Spesso è utile sapere se un dato stato di equilibrio è isolato o meno. Per rispondere alla domanda, si fa uso di un preciso risultato che andiamo ad esaminare.

Intanto, sia $u_0 \in \overline{U}$ un ingresso costante al quale corrisponde uno stato di equilibrio $\overline{x} \in \overline{X}_{u_0}$; se la funzione generatrice $f(\bullet, u_0)$ è continua insieme alle sue derivate parziali $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}(\bullet, u_0)$ (fatte rispetto alle componenti dello stato x), è possibile costruire una particolare matrice, detta "**matrice Jacobiana di f**":

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bullet, u_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Questa matrice, una volta costruita, diventa una matrice di numeri nel momento in cui la si calcola in corrispondenza di un preciso stato. Allora, la calcoliamo in corrispondenza dello stato di equilibrio $\bar{x}$; sotto queste ipotesi, sussiste il seguente risultato:

Teorema - *Se la matrice jacobiana di f, calcolata in corrispondenza dell'ingresso u_0 e dello stato di equilibrio $\bar{x}$, risulta non singolare, allora $\bar{x}$ è uno stato di equilibrio isolato*

Criteri di stabilità alla Liapunov

INTRODUZIONE

Fino ad ora, abbiamo dunque esaminato le varie definizioni di stabilità e di asintotica stabilità, riferite al movimento, alla traiettoria e a quei particolari movimenti che sono gli stati di equilibrio. Negli esempi considerati, abbiamo sempre applicato direttamente queste definizioni alle soluzioni delle equazioni che descrivono il sistema in esame. Sappiamo, però, che, spesso, un sistema è descritto da un sistema di equazioni differenziali la cui soluzione esplicita non è facilmente determinabile: di conseguenza, *è assolutamente necessario individuare dei criteri che consentano di studiare la stabilità di un sistema utilizzando direttamente le equazioni differenziali che descrivono il comportamento del sistema stesso, senza quindi dover risolvere tali equazioni.*

Ci concentriamo, perciò, sulla ricerca di tali metodi, con riferimento sempre a sistemi regolari, a dimensioni finite e tempo-invarianti, ossia a sistemi per i quali l'equazione (differenziale vettoriale) di stato è nella forma

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Per arrivare ad enunciare questi metodi, dobbiamo preventivamente introdurre delle nozioni propedeutiche.

FUNZIONI DEFINITE POSITIVE E DEFINITE NEGATIVE

Supponiamo di avere una generica funzione V definita nel modo seguente:

$$\begin{aligned} V \;:\; X &\longrightarrow \Re \\ x &\longrightarrow V(x) \end{aligned}$$

Fissato un generico elemento $\bar{x} \in X$ nel dominio della funzione, si dice che V è "**definita positiva**" in tale elemento se sono soddisfatte contemporaneamente due condizioni:

$$\begin{aligned} &1)\ V(\bar{x}) = 0 \\ &2)\ \exists I_{\bar{x}} \quad \text{tale che} \quad \forall x \in I_{\bar{x}} - \{\bar{x}\}:\ V(x) > 0 \end{aligned}$$

Quindi, perché V sia definita positiva in $\bar{x} \in X$, essa si deve annullare in tale punto e deve esistere almeno un intorno di tale punto nel quale essa risulta strettamente positiva (fatta eccezione che nel punto stesso).

In modo analogo, si dice che V è "**semi-definita positiva**" in $\bar{x} \in X$ se sono soddisfatte contemporaneamente due condizioni:

$$\begin{aligned} &1)\ V(\bar{x}) = 0 \\ &2)\ \exists I_{\bar{x}} \quad \text{tale che} \quad \forall x \in I_{\bar{x}} - \{\bar{x}\}:\ V(x) \ge 0 \end{aligned}$$

Quindi, mentre prima era richiesto che $V(\bullet)$ fosse strettamente positiva nell'intorno, perché sia semidefinita positiva è sufficiente che sia positiva o al più nulla in tale intorno. E' chiaro che *una funzione definita positiva in* $\bar{x} \in X$ *è ivi anche semi-definita positiva.*

E' chiaro che, in modo del tutto analogo, si possono dare i concetti di funzione "definita negativa" o "semi-definita negativa":

- si dice che V è "**definita negativa**" in $\bar{x} \in X$ se sono soddisfatte contemporaneamente due condizioni:

$$\begin{aligned} &1)\ V(\bar{x}) = 0 \\ &2)\ \exists I_{\bar{x}} \quad \text{tale che} \quad \forall x \in I_{\bar{x}} - \{\bar{x}\}:\ V(x) < 0 \end{aligned}$$

- si dice che V è "**semi-definita negativa**" in $\bar{x} \in X$ se sono soddisfatte contemporaneamente due condizioni:

$$\begin{aligned} &1)\ V(\bar{x}) = 0 \\ &2)\ \exists I_{\bar{x}} \quad \text{tale che} \quad \forall x \in I_{\bar{x}} - \{\bar{x}\}:\ V(x) \le 0 \end{aligned}$$

Anche in questo caso, è ovvio che *una funzione definita negativa in* $\bar{x} \in X$ *è ivi anche semi-definita negativa.*

Vediamo velocemente alcuni esempi di funzioni che godano o meno di queste particolari proprietà.

Consideriamo ad esempio la funzione

$$\begin{aligned} V \;:\; \Re &\longrightarrow \Re \\ x &\longrightarrow V(x) = x^2 \end{aligned}$$

I punti in cui questa funzione può essere definita positiva (o semi-definita positiva) oppure definita negativa (o semi-definita negativa) sono ovviamente solo quelli in cui la funzione si annulla e l'unico punto in cui ciò accade è x=0. Si osserva, inoltre, che questa funzione, tranne che nel punto 0, assume sempre valori positivi, dal che deduciamo che essa è definita positiva in (0,0).

Consideriamo ora la funzione

$$\begin{aligned} V \ : \ \Re^2 &\longrightarrow \Re \\ x &\longrightarrow V(x) = x_1^2 + 2x_2^2 \end{aligned}$$

Anche in questo caso, l'origine (0,0) è un punto in cui la funzione si annulla; si osserva anche che la funzione, tranne che nel punto (0,0), assume sempre valori positivi, dal che deduciamo che essa è definita positiva in (0,0).

Consideriamo adesso la funzione

$$\begin{aligned} V \ : \ \Re^2 &\longrightarrow \Re \\ x &\longrightarrow V(x) = x_1^2 \end{aligned}$$

Ancora una volta, il punto (0,0) è un punto in cui la funzione si annulla. Tuttavia, dato che l'espressione della funzione non pone vincoli sul valore della componente x_2, deduciamo che non esiste alcun intorno di (0,0) in cui V(x) sia sempre positiva, visto che la componente x_2 può anche assumere valore =0; di conseguenza, deduciamo che la funzione è semi-definita positiva.

Ancora, consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} V \ : \ \Re^2 &\longrightarrow \Re \\ x &\longrightarrow V(x) = x_1^2 - x_2^2 \end{aligned}$$

Anche in questo caso, la funzione si annulla in (0,0); tuttavia, l'espressione della funzione indica che non si possa stabilire quale segno prenda la funzione in un intorno, per quanto piccolo, di (0,0), per cui non possiamo stabilire di quale proprietà goda tale funzione in (0,0).

Consideriamo infine la funzione

$$\begin{aligned} V \ : \ \Re^2 &\longrightarrow \Re \\ x &\longrightarrow V(x) = x_1^4 - x_1^2 - 2x_2^2 \end{aligned}$$

Il punto (0,0) è sempre un punto in cui la funzione si annulla; ci chiediamo se la funzione è definita negativa in tale punto, per cui dobbiamo verificare se è possibile prendere un qualsiasi intorno di (0,0) in cui V(x) è strettamente negativa. Possiamo allora ragionare nel modo seguente: se prendiamo un intorno piccolissimo di (0,0), sicuramente il valore assunto dal termine x_1^4 risulterà trascurabile rispetto al valore assunto dal termine $-x_1^2 - 2x_2^2$; di conseguenza, in questo piccolo intorno di (0,0) possiamo affermare che la funzione è data da $V(x) \cong -x_1^2 - 2x_2^2$ ed essa assume evidentemente sempre valori negativi. Possiamo perciò concludere che la funzione è definita negativa in (0,0).

MATRICI DEFINITE POSITIVE E DEFINITE NEGATIVE

A questo punto, consideriamo una funzione dall'espressione molto particolare: consideriamo una matrice quadrata, di ordine n, del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Usando i coefficienti di questa matrice, possiamo definire la seguente funzione:

$$V \; : \; X \subseteq \Re^n \longrightarrow \Re$$

$$x \longrightarrow V(x) = x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

Questa particolare funzione reale V(x) prende il nome di "**forma quadratica della matrice A**": sviluppando parzialmente la sua espressione, essa corrisponde a

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \ldots + a_{1n} x_1 x_n +$$
$$+ a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2 + \ldots + a_{2n} x_2 x_n + \ldots..$$

Da questa espressione più estesa si intuisce una interessante proprietà della funzione V(x), legata alla struttura della matrice A: infatti, mettendo da parte i termini diagonali della matrice, si osserva che non sono tanto importanti i termini extradiagonali a_{ik} in assoluto, mentre sono più importanti i termini $a_{ik} + a_{ki}$, i quali rappresentano i coefficienti dei prodotti $x_i x_k$. Detto in altre parole, una volta fissata la matrice A, se troviamo un'altra matrice $B = [b_{ik}]$, sempre quadrata di ordine n, tale che

$$a_{ik} + a_{ki} = b_{ik} + b_{ki} \qquad \forall \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \in \{1,2,\dots,n\} \quad \text{con } i \neq k$$

allora siamo certi che

$$V(x) = x^T A x = x^T B x$$

E' chiaro che ci sono infinite matrici che godano di questa proprietà, il che significa che *non esiste una corrispondenza biunivoca tra una forma quadratica* $V(x) = x^T A x$ *e la matrice A usata per costruirla.*

Al contrario, la matrice A diventa unica nel momento in cui imponiamo che essa goda di qualche caratteristica particolare: ad esempio, se imponiamo che A sia una matrice simmetrica (tale cioè che $A = A^T$, ossia anche che $a_{ik} = a_{ki}$), è certo che essa sia unica, ossia che esista una corrispondenza biunivoca tra A e la corrispondente forma quadratica $V(x)=x^T Ax$. <u>D’ora in poi, supporremo dunque che la matrice A sia simmetrica</u>.

Fatto questo, possiamo dare la seguente definizione: fissato un generico elemento $\bar{x}\in X$ nel dominio della funzione V(x), si dice che la matrice A è “**definita positiva**” in tale elemento se e solo se è ivi definita positiva la corrispondente forma quadratica V(x), ossia se sono verificate le solite due condizioni

$$1)\ V(\bar{x})=0$$
$$2)\ \exists I_{\bar{x}} \text{ tale che } \forall x\in I_{\bar{x}}-\{\bar{x}\}:\ V(x)>0$$

Ovviamente, in modo del tutto analogo si forniscono le definizioni di matrice A “*semi-definita positiva*” o “*definita negativa*” o “*semi-definita negativa*”.

Test di Sylvester

Ci chiediamo, a questo punto, se sia possibile individuare un criterio che ci dica, data una generica matrice A quadrata simmetrica di ordine n, se essa sia o meno definita positiva, senza però andare a studiare la corrispondente forma quadratica: questo criterio esiste e prende il nome di “**test di Sylvester**” sulla matrice in esame. Vediamo di che si tratta.

Sia data dunque la matrice A quadrata, <u>simmetrica</u>, di ordine n:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Questa matrice possiede un certo numero di MINORI, tra i quali spiccano in particolari i cosiddetti “<u>*minori principali dominanti*</u>”, che sappiamo essere in numero pari ad n (cioè all’ordine della matrice): il generico “**minore principale dominante di ordine k**” si ottiene eliminando le ultime k righe e le ultime k colonne della matrice e calcolando il determinante: per esempio, il minore principale dominante di ordine 4 si ottiene eliminando le ultime 4 righe e le ultime 4 colonne, in modo da ottenere una matrice di ordine n-4 di cui bisogna calcolare il determinante.

Più nei dettagli, abbiamo quanto segue:

minore principale dominante di ordine 0 : $\det A$

minore principale dominante di ordine 1 : $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$

minore principale dominante di ordine 2 : $\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n-2} & a_{2,n-2} & \dots & a_{n-2,n-2} \end{bmatrix}$

....

minore principale dominante di ordine n-1: a_{11}

Una volta individuati tutti gli n minori principali dominanti della matrice A in esame, la prima parte del "**test di Sylvester**" afferma quanto segue:

- *condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice quadrata simmetrica di ordine n sia definita positiva è che siano strettamente positivi tutti gli n minori principali dominanti da essa estraibili;*

- *condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice quadrata simmetrica di ordine n sia definita negativa è che siano strettamente negativi tutti gli n minori principali dominanti da essa estraibili.*

Quindi, basta verificare il segno di tutti i minori principali dominanti per capire se la matrice è definita positiva, definita negativa e nessuna delle due cose.

Leggermente più complesso è invece il modo per stabilire se A è semi-definita positiva o semi-definita negativa; infatti, in questo caso, non bisogna considerare i minori principali dominanti, ma solo i "*minori principali*" di A: in generale, ricordiamo che il generico minore principale di ordine k (con k=1,2...,n) si ottiene calcolando il determinante della sottomatrice ottenuta eliminando $|k-n+1|$ righe della matrice A e le corrispondenti colonne. Allora, la seconda parte del teorema di Sylvester dice quanto segue:

- *condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice quadrata simmetrica di ordine n sia semi-definita positiva è che siano ³0 tutti i minori principali da essa estraibili;*

- *condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice quadrata simmetrica di ordine n sia semi-definita negativa è che siano £0 tutti i minori principali da essa estraibili.*

Esempio

Per capirci meglio, consideriamo un esempio concreto. Consideriamo in particolare la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Si tratta di una matrice (quadrata) simmetrica di ordine 3. Abbiamo 1 minore di ordine 2, che corrisponde a detA; poi abbiamo 3 minori di ordine 1, che sono i determinanti delle sottomatrici ottenute eliminando una riga e la corrispondente colonna; abbiamo infine 3 minori di ordine 0, che sono i determinanti delle sottomatrici ottenute eliminando 2 righe e le corrispondenti 2 colonne:

minore princ. di ordine 2 : $\det A = 2 > 0$

minore princ. di ordine 1 : $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0$

minore princ. di ordine 1 : $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$

minore princ. di ordine 1 : $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

minore princ. di ordine 0 : $2 > 0$

minore princ. di ordine 0 : 0

minore princ. di ordine 0 : $1 > 0$

Poiché ci sono sia minori principali positivi sia minori principali negativi sia minori principali nulli, deduciamo che A non gode di alcuna proprietà particolare.

CRITERIO DI STABILITÀ (SEMPLICE E ASINTOTICA) DI LIAPUNOV

Dopo le nozioni propedeutiche finora esposte, possiamo finalmente fornire un importante criterio che consenta di stabilire se lo stato di equilibrio di un sistema sia stabile oppure no. Questo criterio prende il nome di "**criterio di stabilità di Liapunov**" ed ha il seguente enunciato:

Teorema - *Sia dato un sistema regolare, a dimensioni finite, tempo-invariante descritto da una equazione (differenziale vettoriale) di stato* $\dot{x} = f(x,u)$*; sia* $u(\bullet) = \bar{u} \in \bar{U}$ *un ingresso (costante) di equilibrio per il sistema e sia* $\bar{x} \in \bar{X}_{\bar{u}}$ *uno stato di equilibrio corrispondente a tale ingresso. Condizione sufficiente affinché lo stato* $\bar{x}$ *sia di equilibrio stabile è che esista una funzione* $V(\bullet)$ *che goda delle seguenti proprietà*

1) $V(\bullet)$ *continua insieme alle sue derivate prime;*
2) $V(\bullet)$ *definita positiva in* $\bar{x}$*;*
3) $\dot{V}(x) = \dfrac{dV(x)}{dt}$ *semidefinita negativa in* $\bar{x}$

Prima ancora di dimostrare questo teorema, vediamo di capire bene cosa esso afferma.

In primo luogo, vediamo di trovare una espressione più comoda per la funzione $\dot{V}(x)$: cominciamo col dire che, mentre $V(\bullet)$ e $\dot{V}(\bullet)$ rappresentano le espressioni analitiche della funzione V e della sua derivata, con i simboli $V(x)$ e $\dot{V}(x)$ noi identifichiamo l'andamento della funzione V e della sua derivata lungo un generico "movimento perturbato" x. Essendo V una funzione vettoriale (ad n componenti, dove n è l'ordine del sistema, ossia la dimensione dello spazio di stato), la sua derivata rispetto al tempo, calcolata sempre lungo il generico movimento perturbato x, è definita come

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial V(x)}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

D'altra parte, se $\dot{x} = f(x,u)$ è l'equazione differenziale di stato del sistema, nel momento in cui poniamo $u(\bullet) \equiv \bar{u}$, essa diventa $\dot{x} = f(x,\bar{u}) = f(x)$: in tal modo, $\dot{x} = f(x)$ viene a rappresentare l'equazione di stato del sistema autonomo (cioè con ingresso fissato che non influenza lo stato) che rappresenta i movimenti perturbati. Scrivendo in forma estesa tale equazione, abbiamo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x) \\ \dot{x}_2 = \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x) \\ \ldots \\ \dot{x}_n = \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x) \end{cases}$$

Andando allora a sostituire nella espressione di $\dot{V}(x)$, abbiamo che

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} f_2(x) + \ldots + \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} f_n(x)$$

Il fatto che il sistema sia tempo-invariante implica che la funzione generatrice f(x) non dipenda dal tempo e si nota quindi che anche $\dot{V}(x)$ non risulta dipendere dal tempo. Se, allora consideriamo la funzione

$$\text{gradiente di } V = \frac{\partial V}{\partial x} = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \middle| \frac{\partial V}{\partial x_2} \middle| \ldots \middle| \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]$$

possiamo concludere che

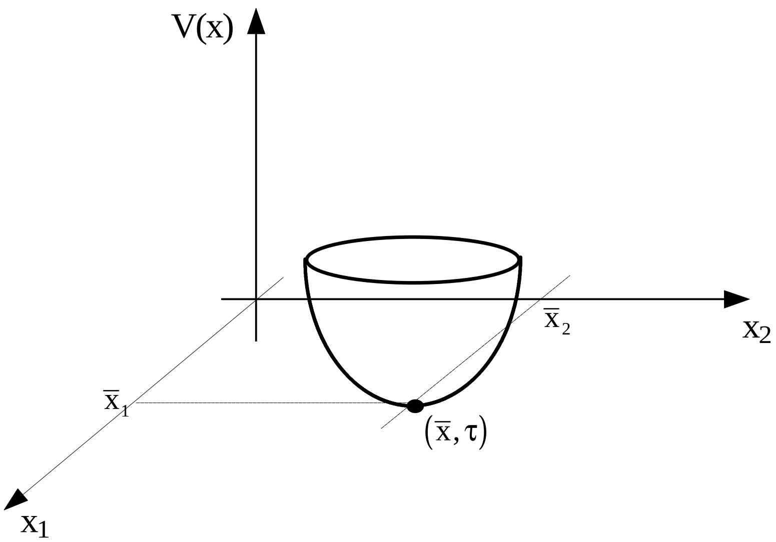
$$\boxed{\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)}$$

Detto questo, il teorema afferma che lo stato di equilibrio $\bar{x}$ è stabile se V è definita positiva in $\bar{x}$ e se $\dot{V}$ è semidefinita negativa in $\bar{x}$.

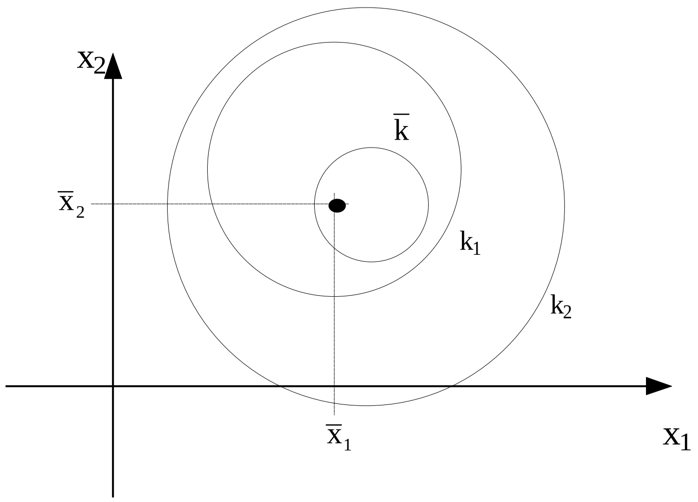
<u>Dimostrazione</u>

Vediamo di dimostrare il teorema in modo essenzialmente intuitivo.

Per semplicità, facciamo l'ipotesi che il sistema in esame sia del 2° ordine, il che significa che il suo spazio di stato X può essere geometricamente rappresentato con un normale piano cartesiano di due dimensioni. In tale piano cartesiano, individuiamo il punto $\bar{x}$ corrispondente allo stato di equilibrio in esame. Tra le ipotesi del teorema, c'è quella per cui la funzione $V(\bullet)$ è continua e definita positiva in tale punto: questo significa che essa abbia la forma di una "scodella" almeno nell'intorno di tale punto. La situazione grafica è cioè del tipo seguente:



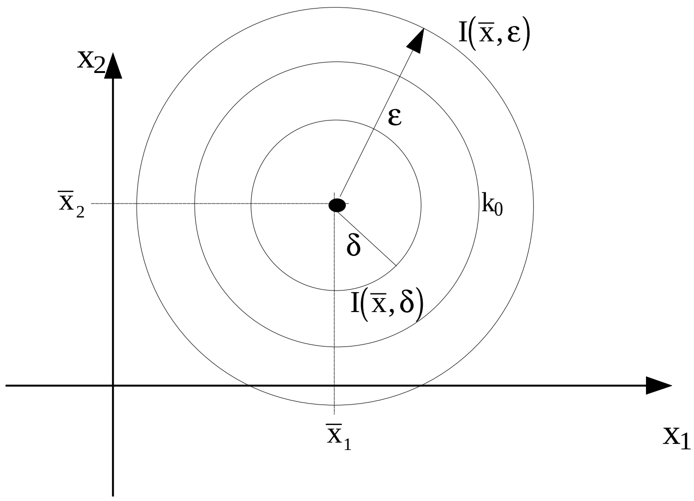
Supponiamo allora di fissare diversi valori $\bar{k} < k_1 < k_2$ (sufficientemente piccoli) assunti dalla funzione V e di intersecare il "solido" descritto dalla V stessa mediante dei piani paralleli al piano di stato: otteniamo in tal modo delle curve che possiamo proiettare facilmente sul piano di stato, ottenendo qualcosa del tipo illustrato nella figura seguente:



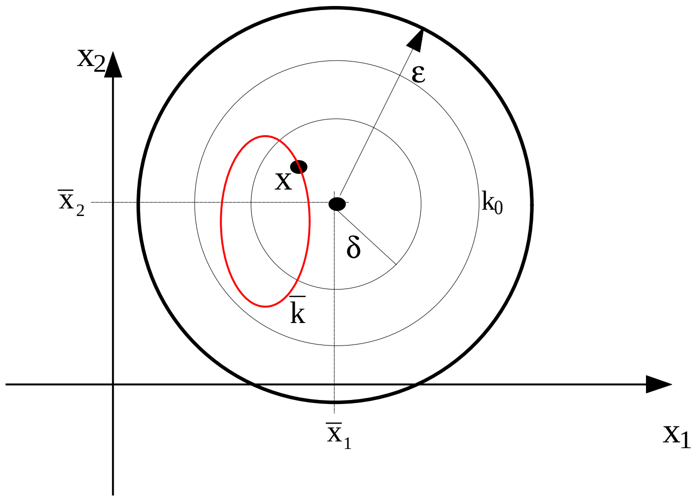
Queste curve (che non sono necessariamente delle circonferenze come in figura) prendono il nome di "**curve di livello**" e racchiudono regioni via via più estese man mano che cresce il valore di V cui corrispondono.

In base alla definizione di stabilità di un punto di equilibrio data in precedenza, dobbiamo dimostrare che, per ogni ε>0, è possibile trovare un δ>0 tale che, per tutti gli stati x che sono racchiusi nel cerchio di centro $\bar{x}$ e di raggio δ, il corrispondente movimento perturbato $x_p(\bullet)$ soddisfi alla condizione $\left\|x_p(t)-\bar{x}\right\|<\varepsilon$ per ∀t≥τ. In altre parole, dobbiamo far vedere che, per ogni ε>0, è possibile trovare un δ>0 tale che, preso un qualsiasi stato x a distanza da $\bar{x}$ non superiore a δ, la corrispondente traiettoria perturbata (cioè la proiezione di $x_p(\bullet)$ sul piano di stato) resti sempre all'interno di un cerchio di centro $\overline{x}$ e raggio ε.

Abbiamo detto che la funzione V è definita positiva in $\overline{x}$, per cui abbiamo individuato un intorno di $\overline{x}$ in cui la V è strettamente positiva; scegliamo allora un valore di ε>0 tale che l'intorno $I(\overline{x},\varepsilon)$ di centro $\overline{x}$ e raggio ε sia contenuto nell'intorno in cui V è strettamente positiva; all'interno di $I(\overline{x},\varepsilon)$ ci sarà almeno 1 curva di livello e supponiamo allora che sia k_0 il valore di V cui corrisponde tale curva di livello. Scegliamo infine δ>0 in modo tale che l'intorno $I(\overline{x},\delta)$ sia a sua volta contenuto nella curva di livello corrispondente a k_0:



All'interno di $I(\overline{x},\delta)$ fissiamo ora un generico stato iniziale perturbato x e supponiamo che sia $\overline{k}$ il valore della funzione V la cui corrispondente curva di livello passante proprio per x:

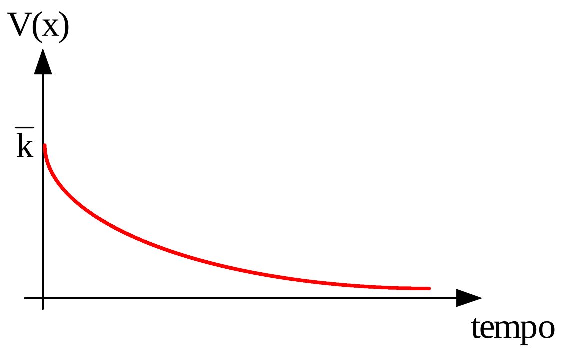


Poiché $x \in I(\overline{x},\delta)$, sarà sicuramente $\overline{k} < k_0$. D'altra parte, se la curva di livello corrispondente a $\overline{k}$ passa per lo stato perturbato x, sarà $V(x) = \overline{k}$ nell'istante iniziale τ; subentra allora l'altra ipotesi del teorema, ossia il fatto per cui $\dot{V}$ è semi-definita negativa in $\overline{x}$: questa ipotesi dice infatti che la traiettoria (perturbata) che parte da x non potrà mai tagliare la curva di livello corrispondente a k_0, in quanto ciò corrisponderebbe ad un aumento di V e questo non è possibile, proprio perché $\dot{V}$, essendo definita negativa, indica che V può o diminuire o al più restare costante sul valore $\overline{k} < k_0$. Ma, dire che la traiettoria perturbata che parte da x non interseca la curva di livello corrispondente a k_0 significa dire che tale traiettoria rimane sempre all’interno di tale curva e quindi rimane anche all’interno di $I(\overline{x},\varepsilon)$, come volevamo che fosse.

A questo punto, si può capire facilmente cosa accade se, nel teorema appena enunciato, l’ipotesi di $\dot{V}$ semi-definita negativa in $\overline{x}$ viene sostituita dall’ipotesi $\dot{V}$ definita negativa in $\overline{x}$:

- la prima cosa che osserviamo è che, se $\dot{V}$ è definita negativa in $\overline{x}$, essa è anche semi-definita negativa in $\overline{x}$, per cui siamo comunque nelle ipotesi del teorema di prima, ossia lo stato $\overline{x}$ è ancora di equilibrio stabile;

- tuttavia, abbiamo in questo caso qualcosa in più rispetto a prima: infatti, dire che $\dot{V}$ è definita negativa in $\overline{x}$ significa dire che V decresce nel tempo; ma sappiamo anche che V è definita positiva in $\overline{x}$, ossia è positiva nell’intorno di $\overline{x}$: allora, una funzione che è positiva e decresce, deve necessariamente tendere a 0.



In base all’interpretazione geometrica data prima per la dimostrazione, appare evidente che dire che $\dot{V}$ è definita negativa in $\overline{x}$ equivale a dire che lo stato del sistema tende proprio a $\overline{x}$ per $t \to \infty$: questa non è altro che l’ipotesi di convergenza che, unita all’ipotesi di stabilità, fa’ si che $\overline{x}$ sia uno stato di equilibrio asintoticamente stabile.

Possiamo dunque riepilogare quanto detto in queste ultime righe fornendo il seguente “**criterio di asintotica stabilità di Liapunov**”:

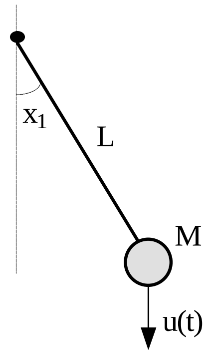
Teorema - *Sia dato un sistema regolare, a dimensioni finite, tempo-invariante descritto da una equazione (differenziale vettoriale) di stato* $\dot{x} = f(x,u)$; *sia* $u(\bullet) = \overline{u} \in \overline{U}$ *un ingresso (costante) di equilibrio per il sistema e sia* $\overline{x} \in \overline{X}_{\overline{u}}$ *uno stato di equilibrio corrispondente a tale ingresso. Condizione sufficiente affinché lo stato* $\overline{x}$ *sia di equilibrio stabile è che esista una funzione* $V(\bullet)$ *che goda delle seguenti proprietà*

1) $V(\bullet)$ *continua insieme alle sue derivate prime;*
2) $V(\bullet)$ *definita positiva in* $\bar{x}$*;*
3) $\dot{V}(x) = \dfrac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$ *definita negativa in* $\bar{x}$

Nel caso in cui sia verifica la condizione di stabilità, ma non quella di convergenza, si dice che lo stato $\bar{x}$ è uno "**stato di equilibrio semplicemente stabile**".

Esempio: pendolo semplice smorzato

Consideriamo un sistema formato da un pendolo semplice, sottoposto ad una forza di attrito (proporzionale alla velocità angolare) come indicato nella figura seguente:



Se indichiamo con x_1 la posizione del pendolo (individuata dall'angolo rispetto alla verticale), con x_2 la sua velocità angolare, con u(t) la somma della forza peso e di una forza variabile (esercitata, ad esempio, per mezzo di calamita) agenti su di esso e infine con $F_{ATT}=ax_2$ la forza di attrito, è facile verificare che il sistema è descritto dalle seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{u(t)\sin x_1}{ML} - ax_2 \end{cases}$$

Per comodità, poniamo $b = 1/ML$ e sottintendiamo la dipendenza dell'ingresso dal tempo (così come abbiamo fatto per le variabili di stato), per cui le due equazioni sono

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -b(\sin x_1)u - ax_2 \end{cases}$$

Il primo obbiettivo che ci poniamo è la determinazione degli stati di equilibrio del sistema in corrispondenza di un ingresso costante $u(\bullet) = \bar{u} > 0$.

Intanto, se l'ingresso è fissato, possiamo porre $b\bar{u} = k$, per cui l'equazione di stato diventa

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k(\sin x_1) - ax_2 \end{cases}$$

Siamo dunque passati dal sistema iniziale nella forma $\dot{x} = f(x,u)$ al sistema autonomo nella forma $\dot{x} = f(x)$. Possiamo allora determinare gli stati di equilibrio, corrispondenti all'ingresso prescelto, come quegli stati tali che $\dot{x} = f(x) = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow -k(\sin x_1) = 0 \Rightarrow \sin x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = n\pi \quad n \in N + \{0\} \end{cases}$$

Abbiamo dunque trovato che gli stati di equilibrio, corrispondenti all'ingresso prescelto, sono

$$x = \begin{bmatrix} n\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

con n che può assumere i valori interi 0,1,....,∞.

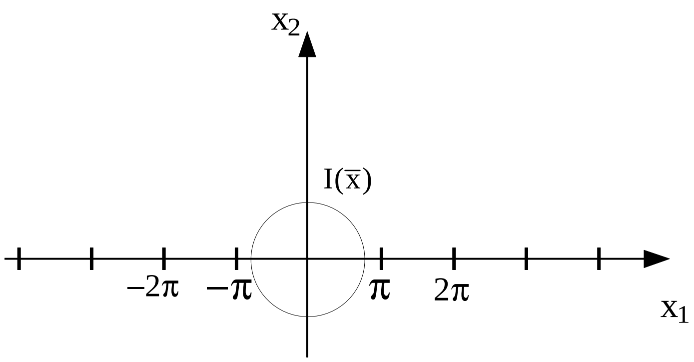
Tra questi stati di equilibrio compare anche l'origine (che si ottiene evidentemente per n=0): ci chiediamo allora che di tipo di stabilità (semplice o asintotica) si abbia in questo stato.

Volendo applicare il criterio di Liapunov, dobbiamo individuare una funzione $V(\bullet)$ che faccia al caso nostro. <u>Nel seguito verranno esposti i criteri di scelta di questa funzione</u>, per cui, in questo primo esempio, consideriamo direttamente la funzione

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + k(1 - \cos x_1)$$

La prima cosa da verificare è che questa funzione sia continua in X insieme alle sue derivate parziali ed è una ipotesi evidentemente verificata.

La seconda condizione, per l'applicazione del criterio di Liapunov, è che si tratti di una funzione definita positiva nello stato di equilibrio $\overline{x} = (0,0)$ prescelto. Effettivamente, risulta $V(\overline{x}) = 0$, per cui dobbiamo solo verificare se esiste un intorno di (0,0) in cui la funzione assume solo valori positivi:



Con riferimento alla figura precedente, si osservano tre cose:

- la prima è che nell'intorno indicato con $I(\overline{x})$ con ci sono punti in cui $V(x)$ si annulla, fatta eccezione ovviamente per l'origine, in quanto i termini $\frac{1}{2}x_2^2$ e $k(1 - \cos x_1)$ non si annullano mai contemporaneamente;

- la seconda è che, sempre in $I(\overline{x})$, i termini $\frac{1}{2}x_2^2$ e $k(1-\cos x_1)$ assumono solo valori positivi o al più nulli.

E' evidente, allora, che V(x) è strettamente positiva in $I(\overline{x})$, per cui possiamo concludere che essa è definita positiva in (0,0).

A questo punto, dobbiamo determinare la funzione $\dot{V}(x)$: abbiamo che

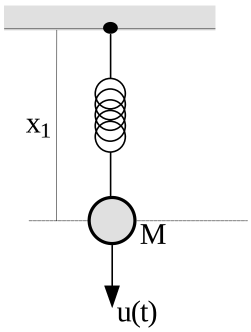
$$\dot{V}(x)=\frac{\partial V(x)}{\partial x}f(x)=\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}f_1(x)+\frac{\partial V(x)}{\partial x_2}f_2(x)=\left(k\sin x_1\right)f_1(x)+\left(x_2\right)f_2(x)=$$
$$=\left(k\sin x_1\right)x_2+\left(x_2\right)\left(-k\sin x_1-ax_2\right)=kx_2\sin x_1-kx_2\sin x_1-ax_2^2=-ax_2^2$$

Abbiamo dunque trovato che $\dot{V}(x)=-ax_2^2$: abbiamo già avuto modo di verificare, in precedenza, che una funzione di questo tipo (con a coefficiente positivo) è semi-definita negativa, per cui possiamo senz'altro affermare, in base al criterio di Liapunov, che lo stato $\overline{x}=(0,0)$ è di equilibrio stabile in corrispondenza dell'ingresso $u(\bullet)=\overline{u}>0$ fissato. Non possiamo invece dire niente, per il momento, circa l'asintotica stabilità di questo stato.

Inoltre, come già sottolineato in precedenza, è possibile che questo stesso stato di equilibrio si ottenga in corrispondenza di un altro ingresso al sistema: le caratteristiche di stabilità andranno allora ristudiate.

Esempio

Consideriamo una pallina di massa M fissata all'estremità di una molla, come illustrato nella figura seguente:



La pallina è soggetta a due forze: una forza $u(t)$ (somma della forza peso Mg e di una eventuale forza applicata dall'esterno) è diretta verso il basso, mentre la forza elastica è diretta verso l'alto. Indicata con $\frac{F(x_1)}{M}$ questa forza elastica e con x_1 la distanza della pallina dal riferimento, possiamo senz'altro descrivere il sistema mediante le seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=\dfrac{u-F(x_1)}{M}\end{cases}$$

Facciamo l'ipotesi che non ci sia alcuna forza applicata dall'esterno sulla pallina, il che significa che l'ingresso del sistema è $u(t) \equiv \bar{u} = Mg$: sotto tale ipotesi, le equazioni differenziale diventano

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{Mg - F(x_1)}{M} \end{cases}$$

Siamo dunque passati dal sistema iniziale nella forma $\dot{x} = f(x,u)$ al sistema autonomo nella forma $\dot{x} = f(x)$.

Determiniamo gli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso prescelto; basta determinare gli stati tali che $\dot{x} = f(x) = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow F(x_1) = Mg \end{cases}$$

Abbiamo dunque trovato che gli stati di equilibrio, corrispondenti all'ingresso $u(t) \equiv \bar{u} = Mg$, sono tutti quelli aventi x_2=0 e x_1 tale da soddisfare la relazione $F(x_1) = Mg$. Il valore di x_1 dipende dunque dall'espressione della forza elastica F(x). Supponiamo, ad esempio che sia $F(x_1) = kx_1^2$: in questo caso, è evidente che gli unici due stati di equilibrio, in corrispondenza dell'ingresso prefissato, sono

$$\begin{cases} x_1 = \pm\sqrt{\dfrac{Mg}{k}} \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Poniamo per semplicità $a = \sqrt{\dfrac{Mg}{k}}$ e indaghiamo sulla stabilità dello stato di equilibrio $\bar{x} = (a,0)$.

Dobbiamo per prima cosa individuare una opportuna funzione $V(\bullet)$: possiamo scegliere la variazione della funzione energia (dove l'energia è data dalla somma dell'energia elastica accumulata nella molla e della energia potenziale e cinetica della pallina), ossia

$$V(x) = \int_0^{x_1} F(\xi)d\xi - Mgx_1 + \frac{1}{2}Mx_2^2 - \int_0^{\bar{x}_1} F(\xi)d\xi + Mg\bar{x}_1$$

Ponendo $F(x_1) = kx_1^2$ e $\bar{x} = (\bar{x}_1, 0) = (a,0)$, questa funzione diventa

$$V(x) = k\frac{x_1^3}{3} - Mgx_1 + \frac{1}{2}Mx_2^2 - k\frac{a^3}{3} + Mga$$

Questa funzione è senz'altro continua con le sue derivate; inoltre, è facile verificare che $V(\bar{x}) = 0$; infine, si può anche verificare che $V(x) > 0$ in un intorno di $\bar{x} = (a,0)$: queste proprietà di consentono di affermare che la funzione V è definita positiva in $\bar{x}$. Andiamo allora a studiare le proprietà di segno di $\dot{V}(\bullet)$ in $\bar{x}$.

Intanto, abbiamo che

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} f_2(x) = \left(kx_1^2 - Mg\right) f_1(x) + \left(Mx_2\right) f_2(x) =$$

$$= \left(kx_1^2 - Mg\right) x_2 + \left(Mx_2\right) \frac{Mg - kx_1^2}{M} = kx_1^2 x_2 - Mgx_2 + Mgx_2 - kx_1^2 x_2 = 0$$

Abbiamo dunque trovato che

$$\dot{V}(x) = 0 \qquad \forall x$$

Questo significa che la funzione $\dot{V}(\bullet)$ è semidefinita negativa (ma anche semi-definita positiva) in qualsiasi stato x e quindi anche in $\overline{x} = (a,0)$. Possiamo perciò affermare, in base al criterio di stabilità di Liapunov, che lo stato $\overline{x} = (a,0)$ è di equilibrio stabile in corrispondente dell'ingresso $\overline{u} = Mg$.

N.B. A titolo di curiosità, facciamo osservare che i risultati ottenuti in questo esempio sono validi quale che sia l'espressione della forza elastica $F(x_1)$.

Esempio: sistema autonomo del 2° ordine

Consideriamo adesso un sistema del 2° ordine, tempo-continuo, descritto, in forma di stato, dalle seguenti 2 equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

La prima cosa che osserviamo, da queste equazioni, è che il sistema è autonomo, dato che l'ingresso non influenza in alcun modo l'evoluzione temporale dello stato. Questo comporta che ogni ingresso al sistema possa essere un ingresso di equilibrio, ossia gli eventuali stati di equilibrio si possano ottenere in corrispondenza di ogni ingresso.

Andiamo allora a determinare questi stati di equilibrio, usando ovviamente lo stesso metodo seguito nell'esempio precedente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \Rightarrow -x_1 + 2x_1^2 x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

Si capisce subito che l'unico stato di equilibrio è $\overline{x} = (0,0)$. Ci chiediamo allora se si tratti di uno stato di equilibrio stabile e, in caso affermativo, di che tipo di stabilità si tratti.

Volendo applicare nuovamente il criterio di Liapunov, dobbiamo individuare una opportuna funzione $V(\bullet)$. Senza seguire alcun particolare criterio, consideriamo direttamente la funzione

$$V(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + x_2^2$$

Questa funzione è evidentemente continua in X insieme alle sue derivate parziali; inoltre, trattandosi di una funzione che assume valore nullo in (0,0) e valori comunque positivi altrove, deduciamo che essa è definita positiva in (0,0). Restano da indagare le proprietà della funzione $\dot{V}(x)$: possiamo subito scrivere che

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} f_2(x) = (x_1) f_1(x) + (2x_2) f_2(x) =$$
$$= x_1\left(-x_1 + 2x_1^2 x_2\right) + (2x_2)(-x_2) = -x_1^2 + 2x_1^3 x_2 - 2x_2^2$$

Abbiamo dunque trovato che $\dot{V}(x) = -x_1^2 + 2x_1^3 x_2 - 2x_2^2$: questa funzione si annulla evidentemente in (0,0), per cui dobbiamo capire se ha proprietà di segno in un intorno piccolo a piacere di (0,0). La prima cosa che possiamo osservare è che, se consideriamo un intorno sufficientemente piccolo di (0,0), il termine $2x_1^3 x_2$ risulta senz’altro trascurabile rispetto agli altri: di conseguenza, in questo intorno sufficientemente piccolo, l’espressione approssimata della funzione è

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - 2x_2^2$$

e questa è una funzione evidentemente definita negativa in (0,0). Possiamo perciò concludere che lo stato $\bar{x} = (0,0)$ è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema in esame.

CRITERIO DI STABILITÀ DI KRASOWSKII

Supponiamo di aver individuato uno stato di equilibrio $\bar{x}$ del nostro sistema e di indagare se si tratti o meno di uno stato stabile o meno; ai fini della applicazione del criterio di Liapunov, supponiamo di riuscire a trovare solo una funzione $V(\bullet)$ che sia definita positiva in $\bar{x}$ e tale che $\dot{V}(\bullet)$ sia semi-definita negativa in $\bar{x}$: in base al suddetto criterio, possiamo affermare solo la semplice stabilità, mentre non possiamo affermare nulla circa l’asintotica stabilità, a meno di non riuscire a trovare un’altra funzione $V(\bullet)$ definita positiva in $\bar{x}$ e tale che $\dot{V}(\bullet)$ sia definita negativa in $\bar{x}$. In questi casi, è possibile servirsi di un altro criterio, che prende il nome di “**criterio di asintotica stabilità di Krasokwkii**”:

Teorema - *Sia dato un sistema regolare, a dimensioni finite, tempo-invariante descritto da una equazione (differenziale vettoriale) di stato* $\dot{x} = f(x,u)$*; sia* $u(\bullet) = \bar{u} \in \overline{U}$ *un ingresso (costante) di equilibrio per il sistema e sia* $\bar{x} \in \overline{X}_{\bar{u}}$ *uno stato di equilibrio corrispondente a tale ingresso. Sia* $V(\bullet)$ *una funzione che goda delle seguenti proprietà:*

1) $V(\bullet)$ *continua insieme alle sue derivate prime;*
2) $V(\bullet)$ *definita positiva in* $\bar{x}$*;*
3) $\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$ *semi-definita negativa in* $\bar{x}$

Considerato l'insieme $S=\left\{x\in X \middle| \dot{V}(x)=0\right\}$, __condizione sufficiente__ affinché $\overline{x}$ sia uno stato di equilibrio asintoticamente stabile è che l'insieme S non contenga traiettorie perturbate.

Anche questo criterio, dunque, interviene a perfezionare il criterio di semplice stabilità di Liapunov: in pratica, una volta individuata $V(\bullet)$ definita positiva in $\overline{x}$ e tale che $\dot{V}(\bullet)$ sia semi-definita negativa in $\overline{x}$, se non ci sono altri stati, oltre $\overline{x}$, in cui $\dot{V}(\bullet)$ si annulla, possiamo concludere che $\overline{x}$ è asintoticamente stabile. In effetti possiamo dire qualcosa in più, nel senso che, anziché considerare tutti gli stati appartenenti ad S, è sufficiente considerare tutti gli stati appartenenti a $I(\overline{x},\varepsilon)\cap S$, dove $I(\overline{x},\varepsilon)$ è un intorno, piccolo a piacere, dello stato di equilibrio in esame.

Esempio

Consideriamo nuovamente l'esempio del pendolo smorzato visto in precedenza: l'equazione di stato del sistema era

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{u(t)\sin x_1}{ML} - ax_2 \end{cases}$$

e avevamo visto che, in corrispondenza di un ingresso costante $u(\bullet)=\overline{u}>0$, lo stato nullo $\overline{x}=(0,0)$ risulta essere uno stato di equilibrio. Successivamente, usando la funzione

$$V(x)=\frac{1}{2}x_2^2+k(1-\cos x_1)$$

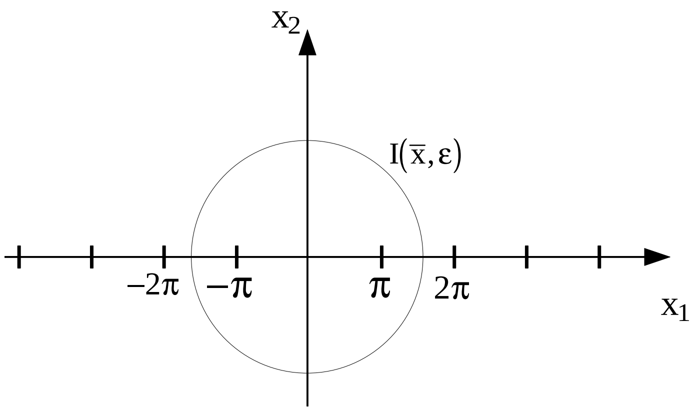
abbiamo verificato che essa è definita positiva in $\overline{x}=(0,0)$ e che la funzione $\dot{V}(x)=-ax_2^2$ è semi-definita negativa in $\overline{x}=(0,0)$; di qui abbiamo dedotto che lo stato $\overline{x}=(0,0)$ è di equilibrio stabile in corrispondenza dell'ingresso $u(\bullet)=\overline{u}>0$ fissato.

A questo punto, ci chiediamo se questo stesso stato $\overline{x}=(0,0)$ sia di equilibrio asintoticamente stabile. Volendo utilizzare il criterio di Liapunov, dovremmo ricercare un'altra funzione $V(\bullet)$ che sia definita positiva in $\overline{x}$ e tale che $\dot{V}(\bullet)$ sia definita negativa in $\overline{x}$. Invece, volendo usare il criterio di Krasowskii, dobbiamo prima determinare gli elementi che appartengono all'insieme $S=\left\{x\in X \middle| \dot{V}(x)=0\right\}$ e poi verificare che tale insieme, magari intersecato con un intorno di $\overline{x}$, non contenga traiettorie perturbate.

Intanto, essendo $\dot{V}(x)=-ax_2^2$, deduciamo che

$$S=\left\{x\in X \middle| \dot{V}(x)=0\right\}=\left\{x\in X \middle| x_2=0\right\}$$

Da un punto di vista grafico, mentre X è rappresentabile come un normale piano cartesiano, l'insieme S viene a coincidere con l'asse delle ordinate:



Adesso, consideriamo un intorno $I(\bar{x},\varepsilon)$ di centro $\bar{x}$ e raggio ε per il momento generico: l'intersezione di questo intorno con l'insieme S è costituito dai punti

$$\begin{cases} x_1 = \varepsilon \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x_1 = -\varepsilon \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

In generale, l'intersezione è dunque rappresentata da $x = (\varepsilon,0)$, con ε positivo o negativo: andando a sostituire nell'equazione di stato del sistema, abbiamo che la corrispondente traiettoria perturbata è retta dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{\bar{u}\sin\varepsilon}{ML} \end{cases}$$

In base a queste equazioni, la componente x_1 dello stato rimane costante, mentre la componente x_2 varia o meno a seconda del valore di ε: infatti, se $\varepsilon=n\pi$, risulta $\sin\varepsilon=0$ e quindi anche x_2 rimane costante nel tempo. Ciò significa che lo stato $(n\pi,0)$ è a sua volta uno stato di equilibrio: quindi, se la perturbazione sullo stato iniziale $\bar{x}$ è tale da portare il sistema nello stato $x = (n\pi,0)$, il sistema rimane in tale stato. Questo significa che l'insieme S contiene traiettorie perturbate.

Viceversa, se prendiamo $\varepsilon<\pi$, allora siamo certi che la perturbazione non porta lo stato iniziale in un altro stato di equilibrio, il che significa che non ci sono traiettorie perturbate interamente contenute in $I(\bar{x},\varepsilon)\cap S$. Quindi, in base al criterio di Krasowskii, possiamo concludere che $\bar{x} = (0,0)$ è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile.

Osservazioni

E' opportuno fare alcune precisazioni sui criteri di stabilità esposti nei paragrafi precedenti.

La prima cosa da sottolineare è che i tre criteri enunciati sono delle condizioni sufficienti, ma non necessarie, per la stabilità o per la asintotica stabilità: questo significa che l'individuazione di una funzione $V(\bullet)$ che non soddisfi le ipotesi richieste sulla funzione $\dot{V}(\bullet)$ non autorizza a dedurre la instabilità dello stato di equilibrio in esame.

Inoltre, la determinazione di una "**funzione di Liapunov** " (cioè di una funzione $V(\bullet)$ definita positiva in $\bar{x}$ e tale che $\dot{V}(\bullet)$ definita negativa in $\bar{x}$) non è assolutamente un problema semplice, soprattutto nel caso di sistemi a grandi dimensioni. Nonostante esista un certo numero di procedure per la costruzione di funzione di Liapunov, è bene far presente che la validità di tale metodi è spesso limitata a classi più o meno particolari di sistemi. In seguito saranno esaminati alcuni di questi metodi; per il momento, invece, è conveniente procedere nel modo seguente: si fissa l'attenzione su una intera "famiglia" di funzioni $V(\bullet)$ (dove tale "famiglia" può essere individuata per mezzo di uno o più parametri), si calcolano tutte le relative $\dot{V}(\bullet)$ e si sceglie poi un elemento della famiglia (il che corrisponde a fissare un valore preciso per i parametri) in modo tale che la corrispondente $\dot{V}(\bullet)$ risulti definita negativa.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1