"Teoria dei sistemi" - Capitolo 6
Stabilità dei sistemi lineari (1°)

INTRODUZIONE

Ci occupiamo adesso di studiare le caratteristiche di stabilità dei sistemi che più ci interessano da vicino e cioè i sistemi lineari. La prima osservazione da fare, circa la stabilità del movimento di un sistema lineare, è la seguente: quando abbiamo introdotto il concetto di stabilità del movimento, abbiamo detto che ***in generale, la frase "il sistema è stabile" non ha alcun significato*** e questo perché l'attributo di "stabilità" è relativo al movimento che si sta esaminando. In altre parole, fissati l'istante iniziale τ, lo stato iniziale $x(\tau)$ e un ingresso nominale $u(\bullet)$, il sistema produce un determinato movimento nominale $x_1(\bullet) = \varphi(\bullet, \tau, x(\tau), u(\bullet))$ che presenta certe caratteristiche di stabilità; se variamo o la condizione iniziale o l'ingresso nominale o entrambi, il sistema produce un altro movimento nominale $x_2(\bullet)$, in generale diverso dal precedente, che presenterà delle proprie caratteristiche di stabilità, non necessariamente uguali a quelle di $x_1(\bullet)$.

Queste considerazioni valgono in linea del tutto generale, ma, come già accennato in precedenza, per i sistemi lineari accade qualcosa di particolare: ***per i sistemi lineari, tutti i movimenti presentano le stesse caratteristiche di stabilità.***

Questo significa che, per questi sistemi, tutti i possibili movimenti o sono semplicemente stabili o sono asintoticamente stabili o sono instabili; se si trova almeno un movimento stabile (o asintoticamente stabile), si può dedurre che sono stabili (o asintoticamente stabili) tutti i movimenti, mentre, se si trova almeno un movimento instabile, si può dedurre che sono instabili tutti i movimenti. In questo caso, ha davvero senso parlare di "*sistema stabile*" o "*sistema instabile*".

Facciamo allora vedere per quale motivo i sistemi lineari godono di questa importante proprietà. Per fare questo, cominciamo a richiamare velocemente le principali caratteristiche dei sistemi lineari.

In primo luogo, ricordiamo che abbiamo definito "**lineare**" un sistema che presenta le seguenti caratteristiche:

- in primo luogo, gli insiemi U (valori ammissibili di ingresso), Ω (funzioni ammissibili di ingresso), X (insieme di stato), Y (valori ammissibili di uscita) e Γ (funzioni ammissibili di uscita) sono tutti degli spazi vettoriali;

- la funzione di transizione di stato $\varphi(t,\tau,x,u(\bullet))$ è lineare in $X\times\Omega$;
- la funzione di uscita $\eta(x(t),u(t),t)$ è lineare in $X\times U$.

Sotto queste ipotesi, abbiamo fatto vedere che il generico movimento del sistema è esprimibile come somma di due contributi, uno dipendente solo dalla condizione iniziale (*movimento libero*) e l'altro dipendente solo dall'ingresso (*movimento forzato*):

$$x(t)=\varphi(t,\tau,x,u(\bullet))=\underbrace{\Phi_l(t,\tau)x}_{\text{movimento libero}}+\underbrace{\Phi_f(t,\tau)u(\bullet)}_{\text{movimento forzato}}$$

Supponiamo, allora, di fissare un istante iniziale τ e un corrispondente stato iniziale $\overline{x}=x(\tau)$ e supponiamo inoltre che al sistema sia applicato un ingresso nominale $\overline{u}(\bullet)$: in base a quanto appena detto, il corrispondente "**movimento nominale**" prodotto dal sistema sarà

$$\overline{x}(t)=\Phi_l(t,\tau)\overline{x}+\Phi_f(t,\tau)\overline{u}(\bullet)$$

Adesso supponiamo che, nello stesso istante iniziale e in corrispondenza dello stesso ingresso nominale, il sistema subisca una perturbazione tale da portare lo stato iniziale in un generico stato perturbato x diverso dallo stato nominale $\overline{x}$: in queste condizioni, il sistema produce un "**movimento perturbato**" valutabile come

$$x(t)=\Phi_l(t,\tau)x+\Phi_f(t,\tau)\overline{u}(\bullet)$$

Si osserva che i due movimenti presentano la stessa componente forzata ed è ovvio che sia così, in quanto questa componente dipende solo dall'ingresso e questo è lo stesso per ipotesi.

A questo punto, così come abbiamo fatto in precedenza, possiamo riferire, istante per istante, il movimento perturbato $x(t)$ al movimento nominale $\overline{x}(t)$: questo significa che ci interessiamo alla differenza $z(t)=x(t)-\overline{x}(t)$, ossia anche che il riferimento rispetto al quale consideriamo il movimento perturbato ha una origine che si sposta nel tempo lungo il movimento nominale. Possiamo dunque considerare la quantità

$$z(t)=x(t)-\overline{x}(t)=\Phi_l(t,\tau)x-\Phi_l(t,\tau)\overline{x}$$

Sappiamo che la trasformazione $\Phi_l(t,\tau)$ gode della proprietà di essere lineare, per cui possiamo anche scrivere che

$$z(t)=\Phi_l(t,\tau)(x-\overline{x})$$

D'altra parte, avendo posto $z(t)=x(t)-\overline{x}(t)$, è evidente che $x-\overline{x}=z(\tau)$, per cui concludiamo che

$$\boxed{z(t)=\Phi_l(t,\tau)z(\tau)}$$

Questa relazione è molto importante, sostanzialmente per due aspetti:

- in primo luogo, essa mostra che, a prescindere da quale sia il movimento nominale $\overline{x}(t)$ preso in esame, il sistema libero cui si perviene è sempre $z(t)=\Phi_1(t,\tau)z(\tau)$, il che dimostra che <u>le caratteristiche di stabilità o instabilità sono comuni a tutti i movimenti del sistema</u>, ossia, come detto, che l'attributo di stabilità (o instabilità) è estendibile all'intero sistema;

- in secondo luogo, così come abbiamo visto per i sistemi generici (sempre, ovviamente, regolari a dimensioni finite), quella relazione ci consente di affermare ancora una volta che *per valutare la stabilità (del movimento nominale) di un sistema lineare, è sufficiente studiare la stabilità dell'origine per il sistema libero rappresentato dall'equazione* $z(t)=\Phi_1(t,\tau)z(\tau)$.

Per far vedere quest'ultimo aspetto, il discorso è (ovviamente identico) identico a quello fatto nel capitolo precedente.

Intanto, si vede facilmente che lo stato nullo è uno stato di equilibrio per il sistema $z(t)=\Phi_1(t,\tau)z(\tau)$: infatti, nell'ipotesi che il sistema, oltre ad essere lineare, sia anche regolare e a dimensioni finite, sappiamo che esso è descrivibile, in forma di stato, mediante l'equazione (differenziale vettoriale)

$$\dot{z}(t)=\underbrace{F(t)}_{n*n}z(t)+\underbrace{G(t)}_{n*m}u(t)$$

dove ricordiamo la matrice F(t), che "pesa" il contributo dello stato del sistema, prende il nome di "**matrice di stato**", mentre la matrice G(t), che "pesa" il contributo dell'ingresso, prende il nome di "**matrice di ingresso**". Allora, dato che il sistema in esame è libero, quella equazione si riduce a

$$\dot{z}(t)=F(t)z(t)$$

ed è evidente che, per z(t)=0, risulta $\dot{z}(t)=0$.

In secondo luogo, sappiamo che la definizione di stabilità del generico movimento nominale di un altrettanto generico sistema è la seguente: *un generico movimento* $\overline{x}(\bullet)=\varphi(\bullet,\tau,\overline{x},\overline{u})$ *si dice "stabile" se, per ogni e>0, esiste almeno un d>0 tale che, per tutti gli stati x che soddisfano la condizione* $\|x-\overline{x}\|\le\delta$, *risulta* $\|x(t)-\overline{x}(t)\|\le\varepsilon$. Tenendo conto che $z(t)=x(t)-\overline{x}(t)$, questa definizione di stabilità si modifica nel modo seguente: *un generico movimento* $\overline{x}(\bullet)=\varphi(\bullet,\tau,\overline{x},\overline{u})$ *si dice "stabile" se, per ogni e>0, esiste almeno un d>0 tale che, per tutti gli stati z(t) che soddisfano la condizione* $\|z(\tau)\|\le\delta$, *risulta* $\|z(t)\|\le\varepsilon$. D'altra parte, questa definizione è a sua volta equivalente alla seguente: *un generico movimento* $\overline{x}(\bullet)=\varphi(\bullet,\tau,\overline{x},\overline{u})$ *si dice "stabile" se, per ogni e>0, esiste almeno un d>0 tale che, per tutti gli stati z(t) che soddisfano la condizione* $\|z(\tau)-0\|\le\delta$, *risulta* $\|z(t)-0\|\le\varepsilon$. A ben vedere, questa è proprio la definizione di stabilità dell'origine per il sistema libero $z(t)=\Phi_1(t,\tau)z(\tau)$.

L'ultima osservazione da fare, prima di passare ai dettagli dello studio della stabilità per i sistemi lineari, è la seguente: avendo detto che, in conseguenza della linearità, le proprietà di stabilità sono comuni a TUTTI i possibili movimenti del sistema e sapendo che tali movimenti non sono altro che le infinite soluzioni dell'equazione differenziale $\dot{z}(t)=F(t)z(t)$, si intuisce che *la stabilità di un sistema lineare libero* $\dot{z}(t)=F(t)z(t)$ *dipende esclusivamente dalla matrice di stato F(t).*

Allora, lo scopo che ci prefiggiamo d'ora in avanti è quello di mettere in evidenza quali siano le caratteristiche della matrice F(t) che determinano la stabilità.

DETERMINAZIONE DEGLI STATI DI EQUILIBRIO

Il primo argomento di cui ci occupiamo è quello della determinazione degli stati di equilibrio per i sistemi tempo-continui, lineari e tempo-invarianti. Come ricordato in precedenza, tali sistemi sono descritti, in forma di stato, da una equazione differenziale vettoriale (di ordine n pari alla dimensione dello spazio di stato) del tipo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$

dove la proprietà di tempo-invarianza si manifesta nel fatto che le matrici F e G sono matrici (di dimensioni, rispettivamente, n*n e n*m) ad elementi costanti.

Sappiamo che uno "*stato di equilibrio*", in corrispondenza di un prefissato ingresso nominale $\overline{u}(\bullet)$, non è altro che un <u>movimento costante del sistema</u>, ossia un movimento durante il quale lo stato del sistema rimane invariato nel tempo: ciò significa, ancora una volta, che $\dot{x}(t) = 0$ e cioè che tutti gli stati di equilibrio del sistema, corrispondenti all'ingresso $\overline{u}(\bullet)$ fissato, si ottengono risolvendo l'equazione

$$F\overline{x} + G\overline{u} = 0$$

Sappiamo anche che, se il sistema è regolare a dimensioni finite, in questa equazione non è necessario considerare tutti i possibili ingressi ammessi dal sistema, ma solo quelli costanti.

Per la risoluzione di questa equazione si possono presentare diverse situazioni, a seconda delle caratteristiche delle due matrici F e G.

1° caso: matrice di stato F non singolare

Un primo caso semplice è quello in cui la matrice di stato F è non singolare e perciò invertibile: in questo caso, dall'equazione $F\overline{x} + G\overline{u} = 0$ si ricava evidentemente che

$$\boxed{\overline{x} = -F^{-1}G\overline{u}}$$

In base a questa relazione, è chiaro che, ad ogni ingresso costante $\overline{u}$ fissato, corrisponde uno e un solo stato di equilibrio: quindi, indicato con $\overline{X}_{\overline{u}}$ l'insieme degli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso $\overline{u}$, tale insieme è formato da un solo elemento e precisamente $\overline{X}_{\overline{u}} = \left\{-F^{-1}G\overline{u}\right\}$.

Ovviamente, al variare di $\overline{u} \in U$ (dove ricordiamo che U è l'insieme dei valori ammissibili per l'ingresso), otteniamo tutti i possibili stati di equilibrio del sistema. Indicato con $\overline{X}$ l' "**insieme di equilibrio**" (cioè appunto l'insieme di TUTTI gli stati di equilibrio del sistema), possiamo scrivere che

$$\boxed{\overline{X} = \mathrm{Range}\left(F^{-1}G\right)}$$

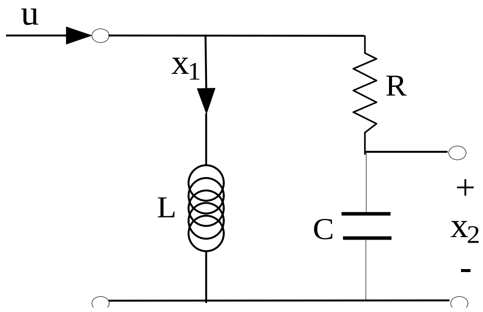
dove ricordiamo che questa scrittura, essendo il sistema lineare, indica che $\overline{X}$ è il sottospazio generato dai vettori colonna che costituiscono la matrice $F^{-1}G$.

N.B. Ricordiamo che, data una generica trasformazione lineare L, o la matrice che la rappresenta, con il simbolo $\mathrm{Range}(L)$ (leggi *"range di L"*) noi indichiamo l' "immagine" di tale trasformazione lineare, ossia l'insieme $\mathrm{Range}(L) = \{y \mid y = Lx \quad \text{per qualche } x\}$.

Nel caso particolare in cui la trasformazione in esame è anche lineare, come avviene nei sistemi lineari, allora il $\mathrm{Range}(L)$ è il sottospazio generato dai vettori colonna della matrice che rappresenta la trasformazione.

Esempio

Come applicazione del caso appena descritto, consideriamo la semplice rete elettrica indicata nella figura seguente:



Indicata con u la corrente in ingresso alla rete, con x_1 la corrente che fluisce nell'induttore (per cui $u - x_1$ è la corrente che fluisce nella serie R+C) e con x_2 la tensione ai capi del condensatore, è facile verificare che l'equazione (vettoriale differenziale) di stato del sistema è

$$\begin{cases} L\dot{x}_1 = R(u - x_1) + x_2 \\ C\dot{x}_2 = u - x_1 \end{cases}$$

Volendo porre tale equazione nella "forma classica" $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$, abbiamo che

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} u$$

Si osserva immediatamente che la matrice F è non singolare, per cui possiamo subito applicare la formula $\overline{X} = \mathrm{Range}(F^{-1}G)$ per individuare tutti gli stati di equilibrio del sistema: considerando che

$$F^{-1}G = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det F} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{LC}} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} =$$

$$= LC \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -C \\ L & -RC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

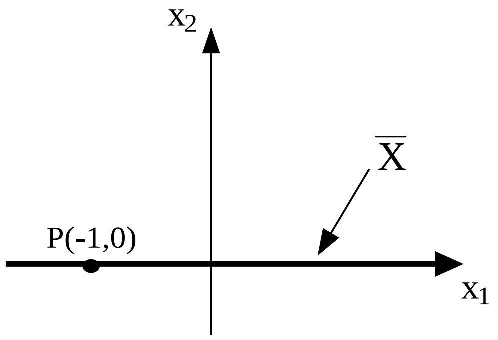
deduciamo che

$$\overline{X} = \text{Range}\left(F^{-1}G\right) = \text{Range}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} = sp\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

Abbiamo dunque trovato che il vettore colonna $\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$ individua il sottospazio $\overline{X}$ di tutti gli stati di equilibrio del sistema: ricordando che $\overline{x} = -F^{-1}G\overline{u}$, questo significa che, in corrispondenza di un ingresso $\overline{u}$ generico, il corrispondente stato di equilibrio del sistema è nella forma

$$\overline{x} = -\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\overline{u} = \begin{bmatrix}\overline{u}\\0\end{bmatrix}$$

Graficamente, la situazione è la seguente:



Il punto P, rappresentativo del vettore colonna $\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$ individua il sottospazio $\overline{X}$, che coincide con l'asse orizzontale.

L'interpretazione fisica di questo risultato è che, all'equilibrio, il circuito è caratterizzato da una tensione nulla ai capi del condensatore e da una corrente nell'induttore uguale a quella che alimenta l'intero circuito. Questo risultato coincide perfettamente con quanto ci dice l'elettrotecnica: infatti, in condizioni di regime stazionario, il condensatore ci comporta come un circuito aperto, per cui non lascia passare corrente e quindi non c'è caduta sul resistore R; d'altra parte, l'induttore si comporta come un cortocircuito, per cui la tensione ai suoi capi, che coincide con quella del condensatore, è nulla, mentre la corrente è pari a quella di ingresso.

2° caso: matrice di ingresso G non singolare

Questo caso è sicuramente meno frequente del precedente, per un semplice motivo: dire che G è una matrice non singolare significa ammettere implicitamente che sia quadrata, il che avviene solo se il vettore di ingresso ha le stesse dimensioni del vettore di stato (n=m). In effetti, questa è una situazione che non si verifica quasi mai, in quanto, nella maggior parte dei casi, risulta m<<n.

Ad ogni modo, nel caso in cui G sia una matrice quadrata non singolare, possiamo fare questo ragionamento: intanto, considerando che vale sempre la relazione $F\overline{x} + G\overline{u} = 0$ tra ingresso di equilibrio e corrispondente stato di equilibrio, deduciamo che, preso un qualsiasi stato $\overline{x} \in X$, esso risulta essere uno stato di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso $\overline{u} \in \overline{U}$ (dove ricordiamo che $\overline{U}$

è il cosiddetto "*insieme degli ingressi di equilibrio*", ossia l'insieme degli ingressi costanti a ciascuno dei quali corrisponde almeno uno stato di equilibrio) dato da

$$\overline{u} = -G^{-1}F\overline{x}$$

Possiamo perciò scrivere, in accordo a quanto fatto nel caso precedente, che

$$\overline{U} = \mathrm{Range}\left(G^{-1}F\right)$$

D'altra parte, fissato il generico ingresso (costante) di equilibrio $\overline{u} \in \overline{U}$, sappiamo che i corrispondenti stati di equilibrio $\overline{x}$ soddisfano sempre la relazione $F\overline{x} + G\overline{u} = 0$, per cui l'insieme di tali stati di equilibrio è

$$\overline{X}_{\overline{u}} = \left\{\overline{x} \in X \middle| F\overline{x} = -G\overline{u}\right\}$$

A questo punto, ci ricordiamo che si definisce "*spazio nullo della matrice F*" (indicato col simbolo $N(F)$) il sottospazio costituito da tutti gli elementi x che vengono trasformati da F nell'elemento nullo:

$$N(F) = \left\{x \middle| \; Fx = 0\right\}$$

Sulla base di questo, se prendiamo un generico $\overline{x} \in \overline{X}_{\overline{u}}$ e prendiamo anche un generico $x \in N(F)$, possiamo evidentemente scrivere che

$$F\left(x + \overline{x}\right) = Fx + F\overline{x} = 0 + F\overline{x} = -G\overline{x}$$

In base a questa scrittura, si può concludere che

$$\boxed{\overline{X}_{\overline{u}} = \overline{x} + N(F)}$$

ossia che ***l'insieme $\overline{X}_{\overline{u}}$ è una "varietà lineare" ottenuta traslando opportunamente lo spazio nullo di F.***

L'entità della traslazione è determinata da $\overline{x} \in \overline{X}_{\overline{u}}$, che è un qualsiasi stato di equilibrio del sistema in corrispondenza dell'ingresso fissato.

Detto in altri termini, dato il sistema $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$, una volta fissato un qualsiasi ingresso (costante) di equilibrio $\overline{u} \in \overline{U}$, l'insieme $\overline{X}_{\overline{u}}$ di tutti e soli gli stati di equilibrio corrispondenti a tali ingresso si ottiene con due passaggi successivi:

- il primo è la determinazione di una soluzione particolare del sistema lineare $F\overline{x} = -G\overline{u}$;

- il secondo è la determinazione del sottospazio $N(F)$, costituito, come detto, dai vettori $x \in X$ tali che $Fx = 0$

Per quanto riguarda la soluzione particolare del sistema $F\overline{x} = -G\overline{u}$, ci sono diverse possibilità; in particolare, oltre ai normali metodi numerici (applicabili non certo a mano), il metodo migliore è quello di utilizzare la cosiddetta "*matrice pseudo-inversa della matrice F*": questa matrice, che indichiamo con F^*, gode della proprietà per cui $FF^*F = F$ (e coincide con F^{-1} nel caso in cui F sia invertibile) ed è utile in quanto è facile verificare che una soluzione del sistema $F\overline{x} = -G\overline{u}$ è data da

$$\boxed{\overline{x} = -F^*G\overline{u}}$$

Infatti, se $\overline{u} \in \overline{U} = \mathrm{Range}\left(G^{-1}F\right)$, siamo certi che esiste uno stato $\overline{x}$ tale che $F\overline{x} = -G\overline{u}$; allora, possiamo scrivere che

$$F\left(-F^*G\overline{u}\right) = F\left(F^*F\overline{x}\right) = FF^*F\overline{x} = F\overline{x} = -G\overline{u} \qquad \Leftrightarrow \qquad F\left(-F^*G\overline{u}\right) = -G\overline{u}$$

e questa relazione dice appunto che $\overline{x} = -F^*G\overline{u}$ è una soluzione del sistema $F\overline{x} = -G\overline{u}$.

Per quanto riguarda, invece, la determinazione dello spazio nullo N(F) della matrice F, è utile ricordare una relazione ricavata a suo tempo, secondo la quale

$$\boxed{N(F) = \left[\mathrm{Range}\left(F^T\right)\right]^{\perp}}$$

In base a questa relazione, possiamo calcolare N(F) nel modo seguente: per prima cosa, individuiamo la matrice F^T, ossia la trasposta di F; successivamente, individuiamo il range di questa matrice; infine, determiniamo il sottospazio dei vettori ortogonali a quelli contenuti in tale range. Questo sottospazio è appunto N(F).

> N.B. Ricordiamo velocemente il concetto di "*insiemi ortogonali tra di loro*": sia dato un insieme X ed un suo sottoinsieme A; l'insieme $A^{\perp}$ è l'insieme degli elementi $y \in X$ che sono ortogonali a tutti gli elementi di A, ossia l'insieme
> $$A^{\perp} = \left\{ y \in X \middle| \quad \forall x \in X \ : \ x^T y = 0 \right\}$$

In conclusione, dato un ingresso di equilibrio $\overline{u} \in \overline{U}$, l'insieme $\overline{X}_{\overline{u}}$ di tutti e soli gli stati di equilibrio corrispondenti a tali ingresso si ottiene mediante la relazione

$$\boxed{\overline{X}_{\overline{u}} = -F^*G\overline{u} + \underbrace{\left[\mathrm{Range}\left(F^T\right)\right]^{\perp}}_{N(F)}}$$

Esempio

Supponiamo di avere un sistema lineare, del 2° ordine, con 2 ingressi, le cui matrici di stato e di ingresso siano

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Consideriamo come ingresso il vettore $\overline{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. In corrispondenza di questo ingresso, si può verificare che una soluzione del sistema $F\overline{x} = -G\overline{u}$ è rappresentata dal vettore $\overline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Di conseguenza, in base alla relazione $\overline{X}_{\bar{u}} = \bar{x} + N(F)$, possiamo individuare l'insieme $\overline{X}_{\bar{u}}$ degli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso fissato solo a patto di riuscire a calcolare il sottospazio $N(F) = \left[Range\left(F^T\right)\right]^{\perp}$. Vediamo come si procede.

Intanto, si osserva che la matrice F è simmetrica, per cui coincide con la sua trasposta: il sottospazio $\left[Range\left(F^T\right)\right]^{\perp}$ si ottiene imponendo che il generico vettore $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ sia ortogonale a tutti i vettori linearmente indipendenti che costituiscono la matrice F^T. Nel nostro caso, la matrice F^T contiene, come colonne, due vettori linearmente dipendenti, per cui basta prenderne uno solo ed imporre l'ortogonalità con $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$: la condizione di ortogonalità è data dunque da

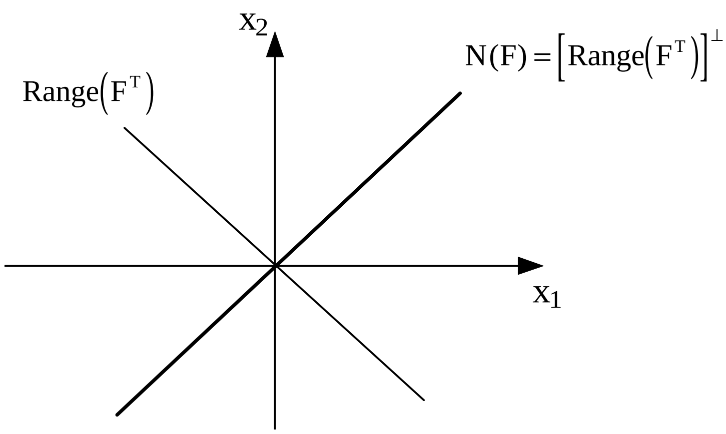
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = x_1 - x_2 = 0$$

Da qui deduciamo che il sottospazio $N(F) = \left[Range\left(F^T\right)\right]^{\perp}$ è individuato da tutti i vettori $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ aventi $x_1=x_2$: possiamo perciò concludere che

$$\overline{X}_{\bar{u}} = \bar{x} + N(F) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \forall \alpha \in \Re$$

L'interpretazione grafica di questa soluzione può senz'altro aiutare a capire la situazione.

Intanto, possiamo fare l'ipotesi che lo spazio di stato X del sistema coincida con $\Re^2$, per cui lo rappresentiamo graficamente tramite un normale piano cartesiano. Il sottospazio N(F) è individuato da tutti i vettori $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ aventi $x_1=x_2$, il che significa che coincide con la bisettrice del primo e del terzo quadrante:

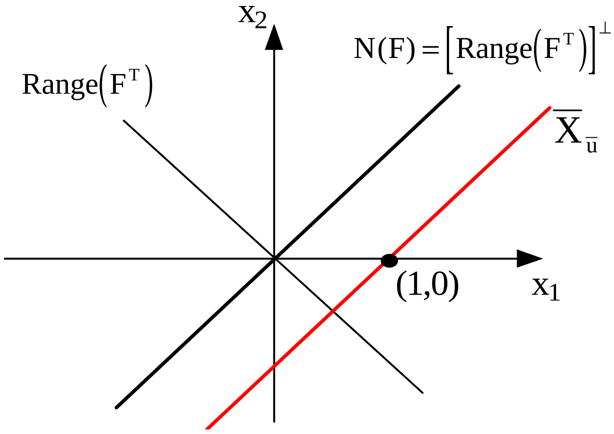


> N.B. Ovviamente, se N(F) è la bisettrice del 1° e del 3° quadrante, il sottospazio $\mathrm{Range}\left(F^T\right)$, che è ad esso ortogonale, non potrà che essere la bisettrice del 2° e 4° quadrante, in quanto deve trattarsi di una retta che sia ortogonale a N(F) e che contenga l'elemento nullo.

Una volta individuato N(F), abbiamo detto che

$$\overline{X}_{\overline{u}} = \overline{x} + N(F) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + N(F)$$

il che significa che, per individuare $\overline{X}_{\overline{u}}$ dobbiamo traslare la retta rappresentativa di N(F), parallelamente a se stessa, in modo che passi per il punto (1,0):



3° caso: matrici F e G entrambe singolari

Consideriamo adesso il caso in cui sia la matrice di stato F sia la matrice di ingresso G sono singolari e quindi non invertibili. In questa situazione, il fatto che G sia non singolare ci consente di ripetere pari pari il discorso fatto poco fa: quindi, se $\overline{u} \in \overline{U}$ è un generico ingresso di equilibrio, l'insieme $\overline{X}_{\overline{u}}$ dei corrispondenti stati di equilibrio è ottenibile mediante la relazione

$$\boxed{\overline{X}_{\overline{u}} = \overline{x} + N(F) = -F^{*}G\overline{u} + \left[\mathrm{Range}\left(F^T\right)\right]^{\perp}}$$

Vediamo invece come è possibile determinare l'insieme $\overline{X}$ di tutti gli stati di equilibrio del sistema.

Sia $\overline{x} \in \overline{X}$ un generico stato di equilibrio corrispondente ad un certo ingresso di equilibrio $\overline{u} \in \overline{U}$: sappiamo che questo stato e questo ingresso sono legati dalla relazione

$$F\overline{x} = -G\overline{u}$$

Questa relazione ci dice che l'insieme $\overline{X}$ è l'insieme dei vettori $\overline{x} \in X$ tali che il vettore $F\overline{x}$ appartenga al Range della matrice G: in termini formali, possiamo perciò scrivere che

$$\overline{X} = \left\{ \overline{x} \in X \;\middle|\; F\overline{x} \in \mathrm{Range}(G) \right\}$$

Questa stessa uguaglianza può anche essere in altro modo se si considera il sottospazio $\mathrm{Range}(G)^{\perp}$, ossia l'insieme dei vettori di X ortogonali a tutti i vettori di $\mathrm{Range}(G)$: usando tale sottospazio, possiamo scrivere che

$$\overline{X} = \left\{ \overline{x} \in X \;\middle|\; F\overline{x} \perp z \quad \forall z \in \mathrm{Range}(G)^{\perp} \right\}$$

La condizione di ortogonalità tra il vettore $F\overline{x}$ ed il generico vettore $z \in \mathrm{Range}(G)^{\perp}$ si esprime dicendo che $(F\overline{x})^{T} z = 0$, ossia anche che

$$\overline{x}^{T} F^{T} z = 0$$

Allora, andando ancora una volta nella espressione di $\overline{X}$, possiamo scrivere che

$$\overline{X} = \left\{ \overline{x} \in X \;\middle|\; \overline{x}^{T} F^{T} z = 0 \quad \forall z \in \mathrm{Range}(G)^{\perp} \right\}$$

D'altra parte, nessuno ci impedisce di interpretare la relazione $\overline{x}^{T} F^{T} z = 0$ come la condizione di ortogonalità tra il vettore $\overline{x} \in X$ ed il vettore $F^{T} z = 0$:

$$\overline{X} = \left\{ \overline{x} \in X \;\middle|\; \overline{x} \perp F^{T} z \quad \forall z \in \mathrm{Range}(G)^{\perp} \right\}$$

Ci chiediamo allora a quale insieme appartenga il vettore $F^{T} z$: a questo scopo, ci ricordiamo di una nota proprietà secondo cui, dato un insieme X qualsiasi ed una matrice A, l'insieme AX è dato da

$$AX = \left\{ y \middle| \; y = Ax \quad \forall x \in X \right\}$$

Sulla base di questa proprietà, se $z \in \mathrm{Range}(G)^{\perp}$, allora $F^{T} z \in F^{T}\mathrm{Range}(G)^{\perp}$, per cui possiamo scrivere che

$$\overline{X} = \left\{ \overline{x} \in X \;\middle|\; \overline{x} \perp F^{T} z \quad \forall F^{T} z \in F^{T}\mathrm{Range}(G)^{\perp} \right\}$$

A questo punto, siamo arrivati alla fine, in quanto abbiamo trovato che l'insieme $\overline{X}$ è l'insieme dei vettori di X che sono ortogonali a tutti i vettori dell'insieme $F^{T}\mathrm{Range}(G)^{\perp}$: ciò significa che l'insieme $\overline{X}$ è l'insieme ortogonale all'insieme $F^{T}\mathrm{Range}(G)^{\perp}$, per cui possiamo concludere che

$$\boxed{\overline{X} = \left(F^{T}\mathrm{Range}(G)^{\perp} \right)^{\perp}}$$

Anche per l'insieme degli ingressi di equilibrio $\overline{U}$ è possibile fare un discorso del tutto analogo a questo. Vediamo di che si tratta.

Dati ancora il generico stato di equilibrio $\overline{x} \in \overline{X}$ corrispondente ad un certo ingresso di equilibrio $\overline{u} \in \overline{U}$, abbiamo detto che essi sono legati dalla relazione $G\overline{u} = -F\overline{x}$: in base a questa relazione, possiamo scrivere che $\overline{U}$ è l'insieme dei vettori $\overline{u} \in U$ tali che il vettore $G\overline{u}$ appartenga al Range della matrice F:

$$\overline{U} = \left\{ \overline{u} \in U \mid G\overline{u} \in \mathrm{Range}(F) \right\}$$

Questa stessa uguaglianza può anche essere scritta in altro modo se si considera il sottospazio $\mathrm{Range}(F)^{\perp}$: in modo analogo a quanto fatto prima, possiamo infatti scrivere che

$$\overline{U} = \left\{ \overline{u} \in U \mid G\overline{u} \perp z \quad \forall z \in \mathrm{Range}(F)^{\perp} \right\} = \left\{ \overline{u} \in U \mid (G\overline{u})^{T} z = 0 \quad \forall z \in \mathrm{Range}(F)^{\perp} \right\} =$$
$$= \left\{ \overline{u} \in U \mid \overline{u}^{T} G^{T} z = 0 \quad \forall z \in \mathrm{Range}(F)^{\perp} \right\}$$

D'altra parte, la relazione $\overline{u}^{T} G^{T} z = 0$ può essere vista come la condizione di ortogonalità tra i vettori $\overline{u}$ e $G^{T} z$, per cui possiamo ancora scrivere

$$\overline{U} = \left\{ \overline{u} \in U \mid \overline{u} \perp G^{T} z \quad \forall z \in \mathrm{Range}(F)^{\perp} \right\}$$

Infine, se $z \in \mathrm{Range}(F)^{\perp}$, allora $G^{T} z \in G^{T}\mathrm{Range}(F)^{\perp}$, il che significa che

$$\overline{U} = \left\{ \overline{u} \in U \mid \overline{u} \perp G^{T} z \quad \forall G^{T} z \in G^{T}\mathrm{Range}(F)^{\perp} \right\}$$

Da qui, possiamo concludere che

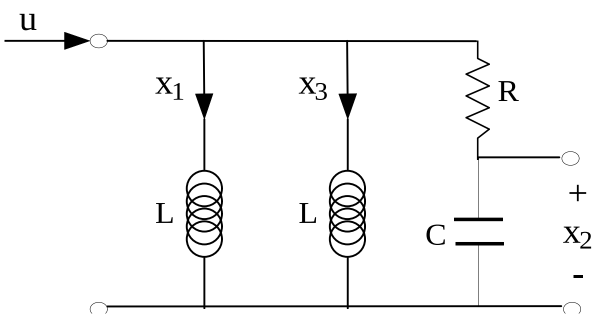
$$\boxed{\overline{U} = \left(G^{T}\mathrm{Range}(F)^{\perp} \right)^{\perp}}$$

In conclusione, per un sistema (regolare a dimensioni finite) tempo-continuo, lineare e tempo-invariante, per il quale, nell'equazione di stato $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$, le matrici F e G siano entrambi non singolari, valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \overline{X}_{\overline{u}} = \overline{x} + N(F) = -F^{*}G\overline{u} + \left[\mathrm{Range}(F^{T})\right]^{\perp} \\ \overline{X} = \left(F^{T}\mathrm{Range}(G)^{\perp} \right)^{\perp} \\ \overline{U} = \left(G^{T}\mathrm{Range}(F)^{\perp} \right)^{\perp} \end{cases}$$

Esempio

Consideriamo la rete elettrica lineare illustrata nella figura seguente:



Determiniamo le equazioni di stato di questo circuito usando le classiche leggi dell'elettrotecnica. In primo luogo, applicando la LKC abbiamo che

$$i = i_{L1} + i_{L3} + i_C = i_{L1} + i_{L3} + C\frac{dv_C}{dt}$$

Applicando inoltre la LKT, abbiamo che

$$v_{L1} = v_{L3} = Ri_C + v_C = R(i - i_{L1} - i_{L3}) + v_C$$

Adesso, se indichiamo con u la corrente in ingresso (supposta costante, il che significa che U=$\Re$), con x_1 e x_3 le correnti nei due induttori e con x_2 la tensione ai capi del condensatore, quelle due relazioni diventano

$$\begin{cases} u = x_1 + x_3 + C\dot{x}_2 \\ L\dot{x}_1 = L\dot{x}_3 = R(u - x_1 - x_3) + x_2 \end{cases}$$

Da queste relazione otteniamo la rappresentazione del sistema in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2 - \frac{R}{L}x_3 + \frac{R}{L}u \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{C}x_3 + \frac{1}{C}u \\ \dot{x}_3 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2 - \frac{R}{L}x_3 + \frac{R}{L}u \end{cases}$$

Per comodità, facciamo l'ipotesi che R=L=C=1, per cui quelle equazioni diventano

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_3 + u \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 - x_3 + u \end{cases}$$

In forma matriciale, abbiamo dunque quanto segue:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & +1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & -1 \end{bmatrix}}_{F} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{G} u$$

Dall'ultima relazione scritta, si deduce che siamo nel caso in cui la matrice G non è una matrice quadrata, mentre F è una matrice (quadrata) singolare. Il nostro scopo è quello di individuare l'insieme $\overline{X}$ contenente tutti gli stati di equilibrio del sistema: dato che siamo nel 3° caso tra quelli esaminati, la formula da utilizzare è

$$\overline{X} = \left(F^T \mathrm{Range}(G)^{\perp}\right)^{\perp}$$

Allora, per prima cosa dobbiamo calcolare $\mathrm{Range}(G)$: dato che G è semplicemente un vettore colonna, il suo range sarà il sottospazio generato da tale colonna, per cui

$$\mathrm{Range}(G) = sp\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Con questa scrittura, si intende che $\mathrm{Range}(G)$ è uno spazio vettoriale, di dimensione 1, per il quale una base è costituita dal solo vettore $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$.

A questo punto, dobbiamo trovare $\mathrm{Range}(G)^{\perp}$: si tratta cioè dell'insieme dei vettori $x = \begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}^T \in X$ che risultano ortogonali a tutti i vettori di $\mathrm{Range}(G)$. Per trovare una base di quest'altro insieme (e quindi l'insieme stesso), ci basta dunque imporre la condizione di ortogonalità tra il generico $x \in X$ e la base di $\mathrm{Range}(G)$:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = 0$$

Si osserva, quindi, che soddisfano a questa condizione tutti i vettori tali che $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Dato che X è uno spazio vettoriale di dimensione 3 e $\mathrm{Range}(G)$ è uno spazio vettoriale di dimensione 1, chiaramente $\mathrm{Range}(G)^{\perp}$ è un spazio di dimensione 3-1=2, per cui ci servono 2 vettori linearmente indipendenti che soddisfino questa condizione: si nota subito che a questo requisito soddisfano i 2 vettori

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

i quali possono quindi essere presi come base di $\mathrm{Range}(G)^{\perp}$: quindi

$$\mathrm{Range}(G)^{\perp} = sp\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

Ora dobbiamo calcolare $F^T\mathrm{Range}(G)^{\perp}$, ossia dobbiamo trasformare $\mathrm{Range}(G)^{\perp}$ mediante la matrice F^T: ci è sufficiente trasformare, mediante la suddetta matrice, la base di $\mathrm{Range}(G)^{\perp}$. Considerando che

$$F^T = \begin{bmatrix}-1 & +1 & -1\\-1 & 0 & -1\\-1 & +1 & -1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\+1 & 0 & +1\\-1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

abbiamo che una base di $F^T\mathrm{Range}(G)^\perp$ è

$$F^T\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\+1&0&+1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$
$$F^T\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\+1&0&+1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Abbiamo dunque ottenuto due vettori, di cui però uno è il vettore nullo, che non è un vettore linearmente dipendente. Di conseguenza, lo eliminiamo, deducendo che $F^T\mathrm{Range}(G)^\perp$ è uno spazio di dimensione 1 generatore dal vettore $\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}^T$:

$$F^T\mathrm{Range}(G)^\perp=\mathrm{sp}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Infine, dobbiamo trovare $\overline{X}=\left(F^T\mathrm{Range}(G)^\perp\right)^\perp$, ossia dobbiamo trovare il sottospazio ortogonale a $F^T\mathrm{Range}(G)^\perp$: ancora una volta ci è sufficiente imporre la condizione di ortogonalità tra il vettore $\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}^T$ che fa da base per $F^T\mathrm{Range}(G)^\perp$ e il generico vettore $x=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\end{bmatrix}^T\in X$. Tale condizione è dunque

$$\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

ed equivale semplicemente a $x_2=0$. Anche qui, dato che X è uno spazio vettoriale di dimensione 3 e $F^T\mathrm{Range}(G)^\perp$ è uno spazio vettoriale di dimensione 1, chiaramente $\left(F^T\mathrm{Range}(G)^\perp\right)^\perp$ è un spazio di dimensione 3-1=2, per cui ci servono 2 vettori linearmente indipendenti che soddisfino questa condizione: possiamo ad esempio prendere

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

per cui possiamo concludere che

$$\overline{X}=\left(F^T\mathrm{Range}(G)^\perp\right)^\perp=\mathrm{sp}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

A questo punto, facciamo una osservazione: nel paragrafo precedente, al fine di dimostrare che $\overline{X} = \left(F^T \mathrm{Range}(G)^{\perp}\right)^{\perp}$, siamo partiti facendo vedere che

$$\overline{X} = \left\{ \overline{x} \in X \;\middle|\; F\overline{x} \in \mathrm{Range}(G) \right\}$$

Vediamo allora se, utilizzando direttamente quest'ultimo risultato, otteniamo lo stesso risultato ottenuto poco fa.

Intanto, abbiamo prima trovato che

$$\mathrm{Range}(G) = \mathrm{sp}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

il che significa che il generico vettore appartenente a $\mathrm{Range}(G)$ è nella forma $\begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \end{bmatrix}^T$, dove α è una qualsiasi costante reale. Allora, la condizione $F\overline{x} \in \mathrm{Range}(G)$ equivale a

$$\begin{bmatrix} -1 & +1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Le equazioni scalari corrispondenti a questa equazione vettoriale sono $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = \alpha \\ -x_1 - x_3 = \alpha \end{cases}$

Le infinite soluzioni di questo sistema sono nella forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 - \alpha \end{bmatrix}$$

ed è evidente che soddisfano tutte la condizione $x_2 = 0$, così come avevamo trovato prima.

Adesso, determiniamo l'insieme $\overline{U}$ di tutti gli ingressi di equilibrio per il sistema: la formula da applicare è quella trovata nel paragrafo precedente, ossia

$$\overline{U} = \left(G^T \mathrm{Range}(F)^{\perp}\right)^{\perp}$$

Per prima cosa, ci calcoliamo $\mathrm{Range}(F)$: F è una matrice quadrata di ordine 3 costituita da 3 colonne, di cui solo due linearmente indipendenti; di conseguenza, sappiamo (dall'algebra matriciale) che proprio queste due colonne potranno costituire una base di $\mathrm{Range}(F)$: quindi

$$\mathrm{Range}(F) = \mathrm{sp}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Allo scopo di non portarci dietro quei segni "-" che compaiono in quel vettore, possiamo anche cambiare di segno il vettore stesso (dato che rimaniamo con due vettori linearmente indipendenti), per cui concludiamo che

$$\mathrm{Range}(F) = \mathrm{sp}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Quindi, $\mathrm{Range}(F)$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2; di conseguenza, $\mathrm{Range}(F)^{\perp}$ sarà uno spazio vettoriale di dimensione 1; allora, come base di tale spazio ci basterà trovare un vettore ortogonale ad entrambi i vettori che fanno da base per $\mathrm{Range}(F)$: la doppia condizione da soddisfare è dunque

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = 0$$

In forma scalare, le due equazioni sono

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Le infinite soluzioni di questo sistema sono nella forma $\begin{bmatrix}\alpha\\0\\-\alpha\end{bmatrix}$.

Avendo detto che $\mathrm{Range}(F)^{\perp}$ ha dimensione 1, ci basta una sola soluzione (diversa da quella banale), per cui prendiamo il vettore $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}$: possiamo perciò scrivere che

$$\mathrm{Range}(F)^{\perp} = \mathrm{sp}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

Ora ci serve $G^T\mathrm{Range}(F)^{\perp}$, cioè dobbiamo trasformare $\mathrm{Range}(F)^{\perp}$ mediante la matrice G^T; come detto in precedenza, ci è sufficiente trasformare la base di $\mathrm{Range}(F)^{\perp}$ mediante G^T:

$$G^T\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = 0$$

Ci troviamo in una situazione particolare e cioè quella in cui $G^T \mathrm{Range}(F)^\perp = \{0\}$. Chiaramente, dato che siamo interessati a determinare $\overline{U} = \left(G^T \mathrm{Range}(F)^\perp\right)^\perp$, è logico che un qualsiasi elemento di U è ortogonale al vettore nullo, per cui possiamo concludere che $\overline{U} = U = \Re$, ossia che <u>tutti gli ingressi costanti sono ingressi di equilibrio per il sistema</u>. D'altra parte, si tratta di un risultato che potevamo prevedere senza fare questo tipo analisi, ma sfruttando semplicemente le leggi dell'elettrotecnica: infatti, se la corrente in ingresso al circuito è costante, il circuito, il regime del circuito è stazionario, per cui i due induttori diventano dei circuiti aperti (per cui x_1=x_3=0=cost) e il condensatore diventa un cortocircuito (per cui x_2=0=cost).

Per concludere con questo esempio, nell'ipotesi che $\overline{u} \in \overline{U} = \Re$ sia un generico ingresso costante, determiniamo l'insieme $\overline{X}_{\overline{u}}$ degli stati di equilibrio $\overline{x}$ corrispondenti a questo ingresso. Abbiamo anche qui a disposizione una formula e precisamente

$$\overline{X}_{\overline{u}} = \overline{x}_0 + \underbrace{\left[\mathrm{Range}\left(F^T\right)\right]^\perp}_{N(F)}$$

dove $\overline{x}_0$ è una qualsiasi tra le soluzioni del sistema $F\overline{x} + G\overline{u} = 0$.

Scritto in forma matriciale esplicita, questo sistema è

$$\begin{bmatrix} -1 & +1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \overline{u}$$

In forma scalare, esso corrisponde a

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = -\overline{u} \\ -x_1 - x_3 = -\overline{u} \end{cases}$$

(dove l'ultima equazione è stata eliminata in quanto coincide con la prima).

Tra le infinite soluzioni di questo sistema (si ricordi che F è una matrice singolare), possiamo ad esempio prendere quella a norma (euclidea) minima, che corrisponde a utilizzare la già citata formula $\overline{x}_0 = -F^* G\overline{u}$: si può verificare che questa formula corrisponde a

$$\overline{x}_0 = -F^* G\overline{u} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} G\overline{u}$$

Facendo i conti, si trova che $\overline{x}_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \overline{u}$ e questa è la soluzione a norma minima ricercata.

Il passo successivo è quello di determinare il sottospazio N(F). Possiamo procedere in due modi:

- il primo è quello di usare la formula $N(F) = \left[\mathrm{Range}\left(F^T\right)\right]^\perp$;

- il secondo è quello di applicare la definizione, secondo la quale N(F) è l'insieme dei vettori di X tali che $Fx = 0$.

In effetti, il primo calcolo è stato già fatto poco fa' ed abbiamo trovato che

$$\mathrm{Range}(F)^{\perp} = \mathrm{sp}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

Concludiamo perciò che $N(F) = \mathrm{sp}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$.

D'altra parte, seguendo la seconda strada, avremmo dovuto risolvere il sistema

$$Fx = \begin{bmatrix}-1 & +1 & -1\\-1 & 0 & -1\\-1 & +1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = 0$$

al fine di determinare una base di N(F). Per determinare tale base, ci serve sapere da quanti vettori (linearmente indipendenti) deve essere composta, ossia ci serve la dimensione di N(F): ci ricordiamo allora che <u>la dimensione di F è pari all'ordine di F diminuito del rango di F</u>: dato che l'ordine è n=3, mentre il rango è ρ=2, deduciamo che N(F) ha dimensione 1, per cui ci serve una qualsiasi soluzione di quel sistema. Tale sistema è stato anch'esso già risolto prima è si è trovato che esso è soddisfatto da tutti i vettori $x = \begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}^T \in X$ tali che $x_2=0$: uno di questi vettori è proprio $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$.

Possiamo in conclusione scrivere che

$$\overline{X}_{\bar{u}} = \bar{x}_0 + N(F) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\bar{u} + \mathrm{sp}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\bar{u}+\alpha\\0\\\frac{1}{2}\bar{u}+\alpha\end{bmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

STABILITÀ DEL MOVIMENTO ED EQUAZIONE DI LIAPUNOV

Nel paragrafo precedente ci siamo occupati della individuazione degli stati di equilibrio per un sistema lineare. Vogliamo ora fornire alcuni criteri che consentano lo studio della <u>stabilità del movimento</u> di questi sistemi.

Intanto, abbiamo già avuto modo di dire che, per i sistemi lineari descritti da una equazione (vettoriale differenziale) nella forma

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$$

<u>la stabilità (o l'instabilità) di un qualsiasi movimento implica la stabilità (o l'instabilità) di tutti i possibili movimenti</u>. Questo ci consente di parlare, per questa particolare classe di sistemi, di "*stabilità del sistema*" anziché di "*stabilità del movimento*": in termini analitici, abbiamo fatto vedere come questo significhi che la stabilità del sistema di partenza può essere analizzata

semplicemente studiando la stabilità dell'origine come stato di equilibrio per il sistema libero $\dot{x}(t) = F(t)x(t)$.

Si deduce, perciò, che *la stabilità (ovviamente intesa alla Liapunov) di un sistema lineare dipende solo dalle proprietà della matrice di stato F(t).*

Nel caso particolare in cui il sistema sia tempo-invariante, per cui la matrice di stato F è costituita da elementi scalari, allora sussiste il seguente importante risultato, dovuto ancora una volta a Liapunov, relativo alla asintotica stabilità:

Teorema - *Sia dato un sistema lineare rappresentato, in forma di stato, dall'equazione* $\dot{x}(t) = Fx(t)$. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia asintoticamente stabile è che, presa una qualsiasi matrice Q simmetrica e definita positiva, esista una matrice P, anch'essa simmetrica e definita positiva, che soddisfi la seguente equazione:*

$$\boxed{F^T P + PF = -Q}$$

Prima ancora di effettuare la dimostrazione di questo teorema, cerchiamo di capire cosa ci dice e come lo possiamo impiegare. Si tratta intanto di un primo metodo per la verifica della asintotica stabilità di un sistema lineare del tipo $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$: il primo passo consiste nello scegliere una qualsiasi matrice Q che sia simmetrica e definita positiva (per esempio la matrice identità); successivamente, bisogna considerare l'equazione vettoriale

$$F^T P + PF = -Q$$

Questa equazione, detta "**equazione di Liapunov**", ha come incognita la matrice P: dato che al primo ed al secondo membro abbiamo due matrici quadrate di ordine n, si tratta di un sistema di n^2 equazioni in n^2 incognite, dato che bisogna imporre l'uguaglianza tra ciascun elemento della matrice a primo membro con il corrispondente elemento della matrice a secondo membro. Possiamo però facilmente verificare che, in effetti, le n^2 equazioni non sono tutte linearmente indipendenti tra loro e che anche le incognite sono in numero inferiore a n^2:

- per quanto riguarda le incognite, basta considerare che la condizione richiesta dal teorema è che la matrice P sia simmetrica: di conseguenza, se essa ha ordine n (quindi n^2 elementi), gli elementi da determinare sono gli n elementi della diagonale e gli elementi al di sopra di tale diagonale; si può verificare, allora, che le incognite sono in numero $\frac{n(n+1)}{2}$;

- per quanto riguarda, il numero di equazioni indipendenti, il discorso non è molto diverso, in quanto la simmetria di P e Q fa' si che le equazioni indipendenti siano anch'esse in numero $\frac{n(n+1)}{2}$: infatti, data l'equazione di Liapunov, se facciamo il trasposto di entrambi i membri, otteniamo

$$P^T F + F^T P^T = -Q^T$$

Considerando che Q e P devono essere matrici simmetriche, risulta $P=P^T$ e $Q=Q^T$, per cui questa si riduce alla stessa equazione di partenza. Questo fatto comporta che, effettivamente, le equazioni indipendenti siano in numero $\frac{n(n+1)}{2}$.

Accertato questo, bisogna verificare se il sistema rappresentato dall'equazione di Liapunov ammette soluzione o meno:

- se il sistema NON ammette soluzione, ossia non è possibile trovare una matrice P che lo soddisfi, allora si può immediatamente concludere che il sistema $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$ non è asintoticamente stabile;

- al contrario, se il sistema ammette una soluzione, ossia se esiste una matrice P che lo soddisfa, allora bisogna verificare se P sia definita positiva o meno; per fare questa verifica basta usare il noto "*test di Sylester*" o un qualsiasi altro criterio analogo; ciò che importa è che, se P è definita positiva, allora il sistema è asintoticamente stabile, mentre, se P non è definita positiva, allora il sistema non è asintoticamente stabile.

In conclusione, quindi, diciamo che *la stabilità asintotica di un sistema del tipo $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$ può essere studiata risolvendo un sistema di $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni lineari, in altrettante incognite, ed eseguendo il test di Sylvester sulla matrice così ottenuta.*

Dimostrazione del teorema

Passiamo adesso alla dimostrazione del teorema. Dato che quest'ultimo fornisce una condizione necessaria e sufficiente, dobbiamo dimostrare le due opposte implicazioni.

Cominciamo a dimostrare che, se il sistema è asintoticamente stabile, allora, presa una qualsiasi matrice Q simmetrica e definita positiva, esiste una matrice P, sempre simmetrica e definita positiva, che soddisfa l'equazione di Liapunov $F^T P + PF = -Q$.

Dire che il sistema è asintoticamente stabile significa dire che ogni movimento perturbato x(t), partito da un opportuno intorno dell'origine, tende all'origine stessa: in formule, accade cioè che

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \qquad \forall x \in X \text{ tale che } \|x\| \le \varepsilon$$

Sappiamo che, per i sistemi lineari, l'espressione analitica di un qualsiasi movimento (sia esso nominale o perturbato, si ottiene usando la matrice di transizione di stato $\varphi(\tau,t)$: si ha infatti (nell'ipotesi di ingresso nullo) che $x(t) = \varphi(t,\tau)x(\tau)$, per cui la condizione di asintotica stabilità è

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t,\tau)x(\tau) = 0 \qquad \forall x \in X \text{ tale che } \|x\| \le \varepsilon = 0$$

D'altra parte, lo stato iniziale $x(\tau)$ non dipende dal tempo, per cui questa equivale semplicemente a $\lim_{t\to\infty} \varphi(t,\tau) = 0$.

Stiamo inoltre facendo l'ipotesi che il sistema sia tempo-invariante: questo consente sia di prendere l'istante τ=0 come istante iniziale sia anche di valutare la matrice di transizione di stato come $\varphi(t,\tau)=e^{F(t-\tau)}$: la condizione di prima diventa perciò

$$\lim_{t\to\infty} e^{Ft} = 0$$

Adesso, supponendo di aver scelto, in modo del tutto arbitrario, la matrice Q simmetrica e definita positiva, costruiamo la seguente matrice:

$$P = \int_0^\infty e^{F^T t} Q e^{Ft} dt$$

Questa matrice esiste certamente e possiamo facilmente verificare che è anche simmetrica; basta infatti verificare che essa coincida con la sua trasposta:

$$P^T = \int_0^\infty \left(e^{F^T t} Q e^{Ft}\right)^T dt = \int_0^\infty \left(e^{Ft}\right)^T (Q)^T \left(e^{F^T t}\right)^T dt = \int_0^\infty e^{F^T t} Q e^{Ft} dt = P$$

Facciamo inoltre vedere che si tratta di una matrice definita positiva: ci basta far vedere che la corrispondente forma quadratica $x^T Px$ è una funzione definita positiva nell'origine. Intanto, risulta

$$x^T P x = x^T \left(\int_0^\infty e^{F^T t} Q e^{Ft} dt\right) x = \int_0^\infty x^T e^{F^T t} Q e^{Ft} x dt = \int_0^\infty z^T Q z dt$$

dove abbiamo ovviamente posto $z = e^{Ft}x$. Dato che la matrice Q è per ipotesi definita positiva, allora il termine $z^T Qz$ è certamente positivo se z≠0, mentre è =0 se z=0, ossia se x=0. Da qui deduciamo che $x^T Qx$ è senz'altro una forma quadratica definita positiva nell'origine, per cui P è definita positiva.

L'ultima cosa da far vedere è che la matrice P così costruita soddisfa l'equazione di Liapunov:

$$F^T P + PF = F^T \int_0^\infty e^{F^T t} Q e^{Ft} dt + \left(\int_0^\infty e^{F^T t} Q e^{Ft} dt\right) F = \int_0^\infty F^T e^{F^T t} Q e^{Ft} dt + \int_0^\infty e^{F^T t} Q e^{Ft} F dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(F^T e^{F^T t} Q e^{Ft} + e^{F^T t} Q e^{Ft} F\right) dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{F^T t} Q e^{Ft}\right) dt = \left[e^{F^T t} Q e^{Ft}\right]_0^\infty =$$

$$= e^{F^T t} Q e^{Ft}\Big|_{t\to\infty} - e^{F^T t} Q e^{Ft}\Big|_{t\to 0} = 0 - Q$$

Abbiamo dunque dimostrato la prima implicazione. Adesso dobbiamo dimostrare l'implicazione opposta: se, presa una qualsiasi matrice Q simmetrica e definita positiva, esiste una matrice P, sempre simmetrica e definita positiva, che soddisfa l'equazione di Liapunov $F^T P + PF = -Q$, allora il sistema è asintoticamente stabile.

Sia dunque Q una arbitraria matrice simmetrica definita positiva e sia P la matrice, simmetrica definita positiva, che soddisfa l'equazione di Liapunov. Consideriamo la forma quadratica associata a P, ossia $V(x) = x^T P x$: essendo P definita positiva, V(x) è una funzione definita positiva in x=0. Possiamo allora provare ad applicare il criterio di Liapunov per l'asintotica stabilità del sistema in x=0 (e quindi, in questo caso, per l'asintotica stabilità del sistema): dobbiamo verificare se la funzione $\dot{V}(x)$ è definita negativa in x=0.

Intanto, abbiamo che

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dx}\left(x^T P x\right) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

Inoltre, in base all'equazione di stato del sistema che stiamo considerando, sappiamo che $\dot{x} = Fx$, per cui abbiamo che

$$\dot{V}(x) = (Fx)^T P x + x^T P F x = x^T F^T P x + x^T P F x = x^T \left(\underbrace{F^T P + PF}_{-Q}\right) x$$

Ricordando che, per ipotesi, la matrice P soddisfa l'equazione di Liapunov, concludiamo che $\dot{V}(x) = -x^T Q x$: dato che anche Q è, per ipotesi, definita positiva, deduciamo che $\dot{V}(x)$ è definita negativa e questo, in base al criterio di Liapunov, ci dice che il sistema è asintoticamente stabile.

Esempio

Supponiamo di avere un sistema $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$, del 2° ordine, la cui matrice di stato sia

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ci chiediamo se questo sistema sia asintoticamente stabile o meno. Volendo applicare il teorema esposto nel paragrafo precedente, cominciamo a prendere una qualsiasi matrice Q (di ordine 2) simmetrica definita positiva: è conveniente prendere la matrice identità

$$Q = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In corrispondenza di questa matrice, dobbiamo vedere se esiste una matrice P, simmetrica e definita positiva, che soddisfi l'equazione di Liapunov $F^T P + PF = -Q$.

Intanto, P sarà una matrice simmetrica di ordine 2, per cui sarà del tipo

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Troviamo allora il sistema corrispondente all'equazione di Liapunov, andando a sostituire P,Q ed F nell'espressione dell'equazione stessa:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{F^T}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{F}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eseguendo prodotti e somme, otteniamo quanto segue:

$$\begin{bmatrix} -2p_{11} & p_{11}-3p_{12} \\ p_{11}-3p_{12} & 2p_{12}-4p_{22} \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Imponendo l'uguaglianza tra ciascun elemento della matrice al primo membro ed il corrispondente elemento della matrice a secondo membro, otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} -2p_{11}=-1 \\ p_{11}-3p_{12}=0 \\ p_{11}-3p_{12}=0 \\ 2p_{12}-4p_{22}=-1 \end{cases}$$

Si osserva subito che la 2° e la 3° equazioni sono uguali, per cui il sistema si riduce a

$$\begin{cases} -2p_{11}=-1 \\ p_{11}-3p_{12}=0 \\ 2p_{12}-4p_{22}=-1 \end{cases}$$

Esso risulta essere compatibile e le soluzioni sono

$$\begin{cases} p_{11}=\dfrac{1}{2} \\ p_{12}=\dfrac{1}{6} \\ p_{22}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Abbiamo dunque trovato una matrice P, simmetrica, che soddisfa l'equazione di Liapunov:

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Ora dobbiamo verificare se si tratta di una matrice definita positiva. Possiamo usare il test di Sylvester: dato che entrambi i minori principali sono positivi $\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{36}>0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}>0\right)$, deduciamo che, effettivamente, P è definita positiva e quindi che il sistema è asintoticamente stabile.

Esempio

Supponiamo adesso che la matrice di stato del sistema (sempre del 2° ordine) sia

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

Anche questa volta ci chiediamo se questo sistema sia asintoticamente stabile o meno. Scegliamo come matrice Q (di ordine 2) simmetrica definita positiva ancora una volta la matrice identità:

$$Q=I=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

In corrispondenza di questa matrice, dobbiamo vedere se esiste una matrice P, simmetrica e definita positiva, che soddisfi l'equazione di Liapunov $F^TP+PF=-Q$. Troviamo allora il sistema corrispondente a tale equazione, andando a sostituire P,Q ed F nell'espressione dell'equazione stessa:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}}_{F^T}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}}_{F}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

Eseguendo prodotti e somme, otteniamo quanto segue:

$$\begin{bmatrix}2p_{12} & p_{11}+p_{22}\\p_{11}+p_{22} & 2p_{12}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

Imponendo l'uguaglianza tra ciascun elemento della matrice al primo membro ed il corrispondente elemento della matrice a secondo membro, otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases}2p_{12}=-1\\p_{11}+p_{22}=0\\p_{11}+p_{22}=0\\2p_{12}=-1\end{cases}$$

Si osserva subito che le equazioni indipendenti sono solo 2:

$$\begin{cases}2p_{12}=-1\\p_{11}+p_{22}=0\end{cases}$$

Questo sistema ammette ∞ soluzioni, per cui ce ne andrebbe bene una qualsiasi: per p_{22}=-1, ad esempio, otteniamo la matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Ora dobbiamo verificare se si tratta di una matrice definita positiva: in base al test di Sylvester, si vede subito che non lo è, dato che il determinante della matrice è negativo. Di conseguenza, possiamo affermare che il sistema NON è asintoticamente stabile.

STABILITÀ ED AUTOVALORI

Consideriamo sempre un sistema regolare, a dimensioni finite, lineare e tempo-invariante, descritto da una equazione di stato nella forma

$$\dot{x}(t) = Fx(t)$$

Un altro metodo per la verifica della stabilità (asintotica e non) di un sistema di questo tipo è basato sul calcolo e lo studio degli autovalori della matrice F.

Intanto, sappiamo che l'equazione del generico movimento perturbato è $\dot{x} = Fx$: il vettore di stato x è un vettore ad n componenti se n è la dimensione dello spazio di stato X. E' possibile esprimere questo vettore x rispetto ad una qualsiasi base di X: lo possiamo fare in quanto, nonostante cambi la rappresentazione del vettore di stato (dato che cambiamo il riferimento), non cambiano in alcun modo le informazioni che esso ci fornisce e che costituiscono l'oggetto del nostro interesse. Nessuno ci vieta, ad esempio, di prendere, come base di X, quella costituita dagli "*autovettori generalizzati*": indicata con M la "*matrice modale*" (ossia la matrice avente come colonne i suddetti autovettori generalizzati), possiamo scrivere che

$$x = Mz$$

dove z è sempre il vettore di stato (perciò di dimensione n), espresso però rispetto alla nuova base. Sostituendo $x = Mz$ nell'equazione $\dot{x} = Fx$, abbiamo che

$$M\dot{z} = FMz$$

Per costruzione, la matrice M è non singolare e quindi invertibile: possiamo allora scrivere che

$$\dot{z} = M^{-1}FMz$$

D'altra parte, sappiamo che la matrice $M^{-1}FM$ coincide con la "*forma canonica di Jordan J*" della matrice F, per cui possiamo concludere che

$$\dot{z} = Jz$$

L'equazione ottenuta è dunque quella regola l'evoluzione del vettore di stato valutato rispetto alla nuova base: quindi, *per analizzare la stabilità del sistema, possiamo indifferentemente riferirci alla equazione* $\dot{x} = Fx$ *oppure alla equazione* $\dot{z} = Jz$*.*

E' ovvio, però, che la particolare struttura della matrice J può essere sfruttata per ideare criteri di stabilità particolarmente semplici. Vediamo come è possibile fare questo.

Per prima cosa, facciamo un rapido riepilogo della struttura della matrice J.

La matrice F è quadrata di ordine n, per cui, in generale, avrà n autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; non è detto che tutti questi autovalori siano tra loro distinti: facciamo perciò l'ipotesi che ce ne siano solo r (compreso ovviamente tra 1 ed n) distinti e supponiamo, per comodità, che si tratti dei primi r. Allora, la matrice J associata ad F è fatta nel modo seguente:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & 0 & \ldots & 0 \\ .. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_r \end{bmatrix}$$

Si tratta di una <u>matrice diagonale a blocchi di dimensione pari sempre ad n</u>.

Il generico elemento diagonale J_k della matrice prende il nome di "<u>*k° blocco di Jordan*</u>" ed è associato al k° autovalore distinto λ_k della matrice F; le dimensioni $a_k \times a_k$ di tale blocco sono pari alla molteplicità algebrica dell'autovalore λ_k e il blocco ha la seguente struttura:

$$J_k = \begin{bmatrix} J_{1k} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{2k} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{g_k k} \end{bmatrix}$$

Si tratta di un'altra matrice diagonale a blocchi, dove il numero di "<u>*mini-blocchi di Jordan*</u> J_{ik}" è pari alla molteplicità geometrica g_k dell'autovalore λ_k.

Infine, ogni mini-blocco di Jordan J_{ik} è una matrice di scalari avente la seguente struttura:

$$J_{i,k} = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_k \end{bmatrix}$$

In generale, quindi, possiamo vedere la matrice J come una matrice diagonale a blocchi fatta nel modo seguente:

$$J=\begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & J_{12} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ \dots & \dots & \dots & J_{21} & \dots & \dots & .. \\ \dots & \dots & \dots & \dots & J_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Gli elementi di questa matrice sono i miniblocchi di Jordan e sono in numero pari a $\sum_{k=1}^{r} g_k$.

Dato che stiamo considerando l'equazione $\dot{z}=Jz$, possiamo partizionare i vettori $\dot{z}$ e z in accordo a come è partizionata la matrice J: avremo perciò qualcosa del tipo

$$\dot{z}=\begin{bmatrix} \dot{z}_{11} \\ \dot{z}_{12} \\ \dots \\ \dot{z}_{21} \\ \dot{z}_{22} \\ \dots \end{bmatrix} \qquad z=\begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ \dots \\ z_{21} \\ z_{22} \\ \dots \end{bmatrix}$$

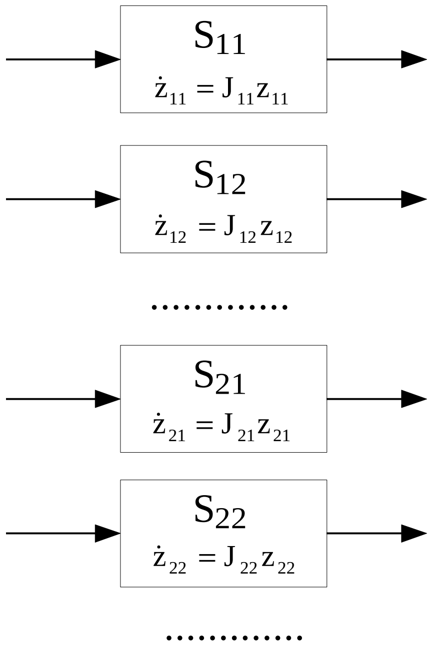
Riscrivendo allora l'equazione $\dot{z}=Jz$, abbiamo che

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{11} \\ \dot{z}_{12} \\ \dots \\ \dot{z}_{21} \\ \dot{z}_{22} \\ \dots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & J_{12} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ \dots & \dots & \dots & J_{21} & \dots & \dots & .. \\ \dots & \dots & \dots & \dots & J_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ \dots \\ z_{21} \\ z_{22} \\ \dots \end{bmatrix}$$

Questa relazione vettoriale rappresenta, nel caso più generale possibile, un sistema di equazioni, sempre vettoriali (dato che i miniblocchi sono delle matrici), la generica delle quali è

$$\dot{z}_{ik}=J_{ik}z_{ik} \qquad \begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\in\{1,2,\dots,n\}$$

Queste equazioni vettoriali possono essere interpretate come se, a ciascuna di esse, corrisponda un determinato sottosistema S_{ik}, caratterizzato da un proprio stato z_{ik} e da una propria matrice di stato J_{ik}:



Inoltre, la caratteristica di questi sottosistemi è quella di evolvere ciascuno in modo del tutto indipendente dagli altri. Allora, dalla definizione di (asintotica) stabilità segue il seguente risultato:

Teorema - *Dato un sistema costituito da un certo numero di sottosistemi non interagenti tra loro, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia (asintoticamente) stabile è che ogni sottosistema componente sia (asintoticamente) stabile.*

In modo del tutto analogo, sussiste anche quest'altro risultato:

Teorema - *Dato un sistema costituito da un certo numero di sottosistemi non interagenti tra loro, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia instabile è che almeno uno dei sottosistemi componenti sia instabile.*

In altre parole, la stabilità del sistema complessivo S equivale alla stabilità di TUTTI i sottosistemi componenti. Ci concentriamo allora sullo studio della stabilità del generico sottosistema S_{ik} rappresentato, in forma di stato, dall'equazione $\dot{z}_{ik} = J_{ik} z_{ik} \quad i,k \in \{1,2,\dots,n\}$.

Questa equazione di stato è quella di un sistema lineare tempo-invariante (oltre che regolare e a dimensioni finite), per cui sappiamo che la sua soluzione è nella forma

$$z_{ik}(t) = e^{J_{ik}t} z_{ik}(0)$$

(dove si è preso, come istante iniziale, l'istante τ=0 grazie proprio alla tempo-invarianza). Questa è l'equazione del generico movimento perturbato del sistema: allora, se vogliamo che lo stato perturbato, in un generico istante t, rimanga confinato in un prefissato intorno dell'origine (cioè se vogliamo che il sistema sia stabile), ci basta ridurre la norma dello stato iniziale perturbato $z_{ik}(0)$. Questo, però, è sufficiente solo a patto che tutti gli elementi della matrice $e^{J_{ik}t}$ siano limitati. Nel caso che anche un solo elemento di tale matrice tenda ad ∞ per t→∞, allora non sarà mai possibile ottenere la stabilità. Possiamo allora dedurre il seguente criterio:

Teorema - *Condizione necessaria e sufficiente perché il generico sottosistema $\dot{z}_{ik} = J_{ik} z_{ik}$ (per i,k = 1,...,n) sia stabile è che tutti gli elementi della matrice $e^{J_{ik}t}$ siano limitati per t®¥.*

Ovviamente, un risultato del tutto analogo vale per la convergenza (e quindi per l'asintotica stabilità):

Teorema - *Condizione necessaria e sufficiente perché il generico sottosistema $\dot{z}_{ik} = J_{ik} z_{ik}$ (per i,k = 1,...,n) sia convergente è che tutti gli elementi della matrice $e^{J_{ik}t}$ tendano a 0 per t®¥.*

Spostiamo allora la nostra attenzione sugli elementi della matrice $e^{J_{ik}t}$. Questa matrice è la matrice esponenziale del generico miniblocco di Jordan J_{ik}; considerando che questo miniblocco è una matrice scalare, triangolare alta, avente l'autovalore λ_k sulla diagonale, elementi tutti unitari sulla sopradiagonale e poi elementi tutti nulli, si verifica facilmente che la matrice $e^{J_{ik}t}$ ha una struttura del tipo seguente:

$$e^{J_{ik}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_k t} & te^{\lambda_k t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_k t} & \frac{t^3}{3!}e^{\lambda_k t} & \ldots \\ 0 & e^{\lambda_k t} & te^{\lambda_k t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_k t} & .. \\ 0 & 0 & e^{\lambda_k t} & te^{\lambda_k t} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}$$

Si tratta di una matrice triangolare alta, avente la diagonale principale e le sopradiagonali costituite da elementi tutti uguali (come illustrato). Possiamo allora indicare il generico termine di questa matrice (relativamente alla diagonale principale e alle sopradiagonali) come $\frac{t^\alpha}{\alpha!}e^{\lambda_k t}$.

Richiedere che la matrice sia limitata per t→∞ significa richiedere che sia limitato il termine $\frac{t^\alpha}{\alpha!}e^{\lambda_k t}$.

Questo NON accade sicuramente in tre casi:

- l'autovalore λ_k è reale e positivo;
- l'autovalore λ_k è complesso con parte reale positiva;
- l'autovalore λ_k è puramente immaginario, ossia con parte reale nulla.

Nei primi due casi, si ha che $e^{\lambda_k t} \xrightarrow{t\to\infty} \infty$, mentre nel terzo caso, pur essendo costante il termine esponenziale, c'è il termine t^α che determina la divergenza. Di conseguenza, le uniche due possibilità perché il generico termine $\frac{t^\alpha}{\alpha!}e^{\lambda_k t}$ sia limitato per $t\to\infty$ è che λ_k sia reale negativo o complesso con parte reale negativa. Possiamo perciò enunciare il seguente criterio generale:

<u>Teorema</u> - *Condizione necessaria e sufficiente affinché la generica matrice $e^{J_{ik}t}$ sia limitata per t®¥ è che l'autovalore l_k sia reale negativo o complesso con parte reale negativa*

In base a quanto detto in precedenza, questa è dunque la condizione necessaria e sufficiente affinché il generico sottosistema $\dot{z}_{ik} = J_{ik} z_{ik} \quad i,k \in \{1,2,\dots,n\}$ sia stabile. Possiamo allora generalizzare questo risultato al fine di estenderlo al sistema complessivo $\dot{x} = Fx$:

<u>Teorema (1)</u> - *Dato il sistema $\dot{x} = Fx$, siano $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ gli autovalori (tutti distinti o meno) della matrice F. Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia <u>STABILE</u> è che tutti gli autovalori abbiano parte reale non negativa; in particolare, per quegli autovalori l_k che hanno parte reale nulla, i corrispondenti miniblocchi J_{ik} devono essere di dimensione 1.*

La condizione sugli autovalori aventi parte reale nulla è facilmente comprensibile in base a quanto visto prima: supponiamo, ad esempio che λ_k sia un autovalore puramente immaginario (oppure =0); allora, richiedere che i miniblocchi ad esso corrispondenti abbiano dimensione 1 significa richiedere che tali miniblocchi siano costituiti semplicemente dall'autovalore stesso, in modo che la matrice $e^{J_{ik}t}$ non contenga elementi del tipo $t^\alpha e^{\lambda_k t}$ (dato che si tratterebbe di elementi che tendono a ∞ per $t\to\infty$).

Facciamo anche osservare che *il generico miniblocco J_{ik} associato all'autovalore l_k ha dimensione 1 se e solo se la molteplicità geometrica dell'autovalore coincide con quella algebrica.*

Possiamo allora riformulare il criterio di stabilità nel modo seguente:

<u>Teorema (2)</u> - *Dato il sistema $\dot{x} = Fx$, siano $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ gli autovalori (tutti distinti o meno) della matrice F. Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia <u>STABILE</u> è che tutti gli autovalori abbiano parte reale non negativa; in particolare, se ci sono autovalori l_k nulli o con parte reale nulla, la loro molteplicità algebrica deve coincidere con quella geometrica*

Esiste anche un terzo modo per esprimere la condizione sugli eventuali autovalori nulli o con parte reale nulla; tale modo fa riferimento al polinomio caratteristico p(λ) della matrice F. Infatti, nell'ipotesi che, tra gli autovalori $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, solo i primi r siano distinti, sappiamo di poter scrivere p(λ) nel modo seguente:

$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_r)^{m_r}$$

In qualche modo equivalente a questo polinomio è quello che si chiama "*polinomio minimo m(l)*" della matrice F: indicati con $h_1,h_2,\ldots,h_r$ i cosiddetti "*indici*" associati agli r autovalori distinti, tale polinomio minimo ha espressione

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{h_1}(\lambda-\lambda_2)^{h_2}\ldots(\lambda-\lambda_r)^{h_r}$$

Supponiamo allora che λ_1 sia un autovalore con parte reale nulla e sia h_1 l'indice ad esso associato: tale indice, per definizione, rappresenta la dimensione del più grande miniblocco di Jordan associato a λ_1; allora, la condizione per cui tutti i miniblocchi associati a λ_1 debbano avere dimensione 1 equivale chiaramente alla condizione che $h_1=1$.

Possiamo perciò fornire la terza ed ultima formulazione del criterio di stabilità:

Teorema (3) - *Dato il sistema $\dot{x}=Fx$, siano $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ gli autovalori (tutti distinti o meno) della matrice F. Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia STABILE è che tutti gli autovalori abbiano parte reale non negativa; in particolare, se ci sono autovalori l_k nulli o con parte reale nulla, il loro indice deve essere unitario*

A questo punto, è immediato il passaggio da questo criterio a quello di asintotica stabilità: perché ci sia l'asintotica stabilità, devono essere verificate sia la stabilità sia la convergenza a 0 per $t\rightarrow\infty$; questo comporta che non sia più tollerabile la presenza di autovalori nulli o con parte reale nulla: infatti, in questo caso, i corrispondenti miniblocchi al più (cioè se è verificata la stabilità) si mantengono costanti, ma certo non vanno a 0.

Il criterio non può che essere allora il seguente:

Teorema - *Dato il sistema $\dot{x}=Fx$, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia ASINTOTICAMENTE STABILE è che tutti gli autovalori di F abbiano parte reale non negativa*

Naturalmente, mettendo insieme i due criteri appena esposti, possiamo dedurre il criterio di semplice stabilità; basta garantire la stabilità ed escludere l'asintotica stabilità, per cui il criterio è il seguente:

Teorema - *Dato il sistema $\dot{x} = Fx$, siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori (tutti distinti o meno) della matrice F. Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia SEMPLICEMENTE STABILE è che tutti gli autovalori abbiano parte reale non negativa, che tutti gli autovalori con parte reale =0 abbiano indice =1 e, infine, che ci sia almeno uno di questi autovalori con parte reale =0*

La spiegazione del teorema è immediata: il criterio di stabilità richiede che tutti gli autovalori abbiano parte reale non negativa e che quelli con parte reale =0 abbiano indice 1; il criterio di asintotica stabilità richiede, invece, che non ci siano autovalori con parte reale =0; allora, perché ci sia la stabilità, ma non l'asintotica stabilità, è necessario che ci sia almeno un autovalore con parte reale =0 (e indice appunto uguale ad 1).

Per concludere, possiamo facilmente dedurre anche il criterio di instabilità:

Teorema - *Dato il sistema $\dot{x} = Fx$, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia INSTABILE è che esista almeno un autovalore di F con parte reale positiva oppure un autovalore di F con parte reale nulla e indice non unitario*

A conclusione di tutto questo paragrafo, possiamo fare la seguente considerazione finale: *dato un sistema regolare, a dimensioni finite, lineare e tempo-invariante, descritto da una equazione di stato nella forma $\dot{x}(t) = Fx(t)$, le proprietà di stabilità possono essere dedotte semplicemente dai segni e dalle molteplicità degli autovalori della matrice F.*

E' chiaro che un metodo di questo tipo diventa particolarmente comodo quando la matrice F è triangolare o diagonale: in questo caso, infatti, gli autovalori coincidono con gli elementi diagonali, per cui è immediato conoscerne le caratteristiche. Viceversa, quando le dimensioni del sistema (e quindi l'ordine di F) sono elevate, la determinazione degli autovalori di F può diventare complicata, per cui è opportuno, in questi casi, ricorrere ad altri criteri.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1