“Teoria dei sistemi” - Capitolo 6
Stabilità dei sistemi lineari (2°)

CRITERIO DI HURWITZ

Consideriamo sempre un sistema tempo-continuo regolare, a dimensioni finite, lineare, tempo-invariante, libero, descritto da una equazione di stato nella forma $\dot{x} = Fx$ (in base a questa equazione, il sistema è anche autonomo, ossia tale che l'ingresso non abbia influenza sull'evoluzione dello stato). Stiamo studiando la stabilità di questo tipo di sistema e abbiamo enunciato in precedenza dei criteri di stabilità (semplice e asintotica) e di instabilità basati sul calcolo e lo studio degli autovalori della matrice di stato F: in base a questi criteri, ciò che importa, ai fini di trarre conclusioni sulla stabilità, è il segno della parte reale degli autovalori di F; dato che gli autovalori di F sono le radici del polinomio caratteristico p(λ) della matrice F, è dunque necessario determinare e studiare il segno della parte reale di queste radici.

In realtà, anziché andare a calcolare le radici del polinomio p(λ), è sufficiente eseguire degli opportuni test sui coefficienti del polinomio caratteristico. In particolare, ci interessiamo ad uno di questi test (dovuto a **Hurwitz**), il quale, però, presenta l'unica limitazione di essere valido SOLO quando tutte le radici del polinomio caratteristico p(λ) hanno parte reale negativa. Ricordando che questo accade se e solo se il sistema è asintoticamente stabile, deduciamo che il criterio che ci accingiamo ad esporre è una nuova condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità.

Partiamo dal polinomio caratteristico della matrice F:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

Mediante i coefficienti di questo polinomio è possibile costruire la seguente matrice, detta "**matrice di Hurwitz**", di dimensione $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \ldots. \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots. & \ldots \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

Da questa matrice possiamo tirare fuori n minori principali, cioè i determinanti delle n sottomatrici quadrate ottenibili da A eliminando un ugual numero di righe e di colonne:

$$D_1 = a_1$$

$$D_2 = \det\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \det\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$\ldots\ldots$$

Allora, il "**criterio di Hurwitz per l'asintotica stabilità**" dice quanto segue:

Teorema - *Dato il sistema lineare $\dot{x}=Fx$, condizione necessaria e sufficiente affinché esso sia asintoticamente stabile è che siano positivi tutti i minori principali della matrice di Hurwitz associata al polinomio caratteristico di F*

Esistono diversi metodi per dimostrare questo teorema. Noi non ci preoccupiamo della dimostrazione, ma è utile osservare che alcune dimostrazione si basano sulla teoria delle funzioni di variabile complesse, mentre altre sfruttano la teoria di Liapunov esposta in precedenza.

Esistono altri importanti risultati riguardanti la stabilità dei sistemi lineari. Uno di questi rappresenta un condizione necessaria per l'asintotica stabilità di un sistema. Essa si basa su un principio di fondo rappresentato dal legame esistente tra i coefficienti del polinomio caratteristico p(λ) e le radici del polinomio stesso (cioè gli autovalori di F): infatti, si può verificare che

$$
\begin{aligned}
&a_1 = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \\
&a_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \lambda_i \\
&.... \\
&a_n = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 .... \lambda_n
\end{aligned}
$$

In base a queste n relazioni scalari e in base al criterio di asintotica stabilità secondo cui tutti gli autovalori devono avere parte reale negativa, si deduce che l'asintotica stabilità implica che tutti i coefficienti del polinomio caratteristico siano positivi. Il risultato completo è dunque il seguente:

Teorema - *Dato il sistema lineare $\dot{x}=Fx$, condizione necessaria affinché esso sia asintoticamente stabile è che siano positivi tutti i coefficienti del polinomio caratteristico di F*

Trattandosi di una condizione solo necessaria, non è detto che, se i coefficienti di p(λ) sono tutti positivi, il sistema sia asintoticamente stabile. D'altra parte, se anche uno solo dei coefficienti è negativo o nullo, allora possiamo star certi che il sistema non sia asintoticamente stabile. La convenienza di questo risultato subentra, perciò, quando si abbia già a disposizione (o comunque si possa calcolare facilmente) il polinomio caratteristico della matrice F.

Calcolo dei coefficienti del polinomio caratteristico di F: formula di Souriau

Il problema principale, per l'applicazione degli ultimi due risultati enunciati (in particolare del criterio di Hurwitz) è evidentemente nel calcolo dei coefficienti del polinomio caratteristico. Il modo più immediato di trovare questi coefficienti è chiaramente quello di calcolare il determinante della matrice (λI-F), ossia appunto di calcolare il polinomio caratteristico. Questo però diventa difficile quando il sistema è di grandi dimensioni; in questi casi, è necessario ricorrere a schemi di calcolo più efficaci, tra i quali il più noto è quello che va sotto il nome di "**formula di Souriau**": dato il polinomio $p(\lambda)=\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$, i suoi coefficienti sono dati da

$$
\begin{aligned}
&a_1 = -(\text{tracciaF}) \\
&a_1 = -\frac{1}{2}\left(a_1 \text{tracciaF} + \text{tracciaF}^2\right) \\
&a_3 = -\frac{1}{3}\left(a_2 \text{tracciaF} + a_1 \text{tracciaF}^2 + \text{tracciaF}^3\right) \\
&\dots \\
&a_n = -\frac{1}{n}\left(a_{n-1} \text{tracciaF} + a_{n-2} \text{tracciaF}^2 + \ldots + \text{tracciaF}^n\right)
\end{aligned}
$$

dove ricordiamo che la "*traccia*" di una matrice è la somma degli elementi situati sulla diagonale principale della matrice stessa.

Queste relazioni consentono dunque un metodo di calcolo relativamente rapido dei coefficienti di $p(\lambda)$. Oltre a questo, è di particolare importanza la prima relazione: infatti, se $a_1 = -(\text{tracciaF})$ e avendo in precedenza detto che $a_1 = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$, deduciamo che

$$
\boxed{\text{tracciaF} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k}
$$

ossia che *la somma degli elementi diagonali di una matrice (ovviamente quadrata) è pari alla somma degli autovalori della matrice stessa, anche nel caso in cui la matrice non sia triangolare (nel qual caso gli elementi diagonali coincidono con gli autovalori).*

Questo fatto ci consente di fornire una nuova condizione necessaria per l'asintotica stabilità: infatti, sempre in base al criterio di asintotica stabilità visto in precedenza, se tutti gli autovalori di F devono avere parte reale negativa, necessariamente la loro somma (cioè la traccia di F) deve avere a sua volta parte reale negativa. Possiamo perciò enunciare il seguente risultato:

Teorema - *Dato il sistema lineare $\dot{x} = Fx$, condizione necessaria affinché esso sia asintoticamente stabile è che la traccia della matrice F abbia parte reale negativa*

Se la matrice di stato del sistema in esame presenta una traccia positiva o nulla, allora il sistema non è asintoticamente stabile. Allo stesso tempo, però, se la traccia di F ha parte reale negativa, non è comunque detto che il sistema sia asintoticamente stabile.

Applicazione del criterio di Hurwitz

Abbiamo prima detto che, in base al criterio di Hurwitz, condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare del tipo $\dot{x} = Fx$ sia asintoticamente stabile è che siano positivi tutti i minori principali della matrice di Hurwitz associata al polinomio caratteristico di F. Un caso di estremo interesse in cui questo criterio può essere applicato direttamente è quello dei sistemi dinamici lineari descritti, in modo empirico, tramite una sola equazione differenziale, di ordine n, che lega l'ingresso e l'uscita. Vediamo di che si tratta.

Per semplicità, supponiamo che il sistema in esame abbia un solo ingresso, che indichiamo con $u(\bullet)$, ed una sola uscita, che indichiamo con $y(\bullet)$; supponiamo inoltre di aver trovato che i valori istantanei u(t) e y(t) di tali grandezze sono legati dalla seguente equazione differenziale lineare:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = u(t)$$

Un sistema descritto da questa relazione ingresso-uscita può essere descritto, in forma di stato, in infiniti modi, nel senso che è possibile scegliere infinite rappresentazioni dello stato del sistema; si dice che esistono "*infinite realizzazioni*" di questo sistema, ossia infinite terne di matrici F,G ed H che consentono di rappresentare il sistema nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases}$$

Naturalmente, a ciascuna di queste realizzazione, quindi a ciascuna terna (F,G,H) di matrici, corrisponde un certo ordine del sistema, ossia una certa dimensione dello spazio di stato: tale dimensione coincide con l'ordine della matrice F. Allora, possiamo pensare di scegliere, tra le infinite realizzazioni, quelle che presentano lo spazio di stato con dimensione minima: si parla, in questo caso, di "**realizzazioni minime**". La più nota, tra le realizzazioni minime, è quella che corrisponde alla seguente scelta di variabili di stato:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 \\ &\dot{x}_2 = x_3 \\ &\dot{x}_3 = x_4 \\ &\ldots. \\ &\dot{x}_{n-1} = x_n \\ &\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \ldots - a_1 x_n + u \end{aligned}$$

Con questa scelta, ponendo anche $y = x_1$, è possibile far vedere (lo faremo in seguito) che la rappresentazione di stato del sistema è definita dalle seguenti matrici:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots. & \ldots. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots. & 0 \\ \ldots. & \ldots & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ 0 & 0 & 0 & \ldots. & \ldots. & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots. & \ldots & -a_1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Volendo applicare il criterio di Hurwitz a questo sistema, dobbiamo conoscere i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice F: è facile verificare che tale polinomio è

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

ossia è tale che i suoi coefficienti siano esattamente gli stessi della relazione ingresso-uscita da cui siamo partiti. Da qui deduciamo che *il criterio di Hurwitz può essere applicato direttamente ai coefficienti dell'equazione differenziale che lega i valori istantanei dell'ingresso e dell'uscita.*

Si può anche far vedere che, partendo sempre dalla suddetta equazione differenziale e ricavando una qualsiasi delle realizzazioni minime del sistema, il polinomio caratteristico associato alla corrispondente matrice F è sempre lo stesso, per cui il criterio vale per qualsiasi realizzazione minima del sistema.

Stabilità dei sistemi lineari interconnessi

INTRODUZIONE

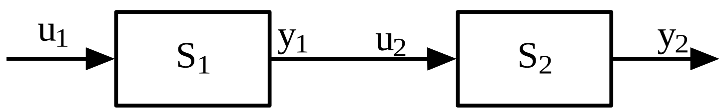
Una parte molto importante della teoria della stabilità è quello relativo allo studio dei sistemi complessi costituiti da sottosistemi opportunamente connessi. Questa teoria è particolarmente sviluppata nell'ambito dei sistemi lineari, dei quali intendiamo occuparci adesso.

I risultati più semplici della teoria della stabilità dei sistemi interconnessi sono quelli relativi alle connessioni in cascata ed in parallelo (precedentemente esaminate), mentre molto più complesso è il caso del collegamento in retroazione, del quale perciò non parleremo.

Il risultato più generale dei sistemi in cascata e in parallelo è, in definitiva, una generalizzazione di quanto già visto a proposito dei sistemi in forma di Jordan, ossia di quei sistemi che possono essere scomposti in un certo numero di sottosistemi semplici: questo risultato sarà ora esposto, per semplicità, solo per sistemi costituiti da 2 sottosistemi (collegati in cascata e/o in parallelo), ma è opportuno sottolineare che esso è valido per un qualsiasi numero di sottosistemi collegati in cascata e/o in parallelo.

CONNESSIONE IN CASCATA

Ricordiamo, prima di tutto, che una connessione in cascata di due sistemi è una connessione del tipo schematizzato nella figura seguente:



Il vincolo di interconnessione è in questo caso rappresentato dal fatto che l'ingresso al secondo sottosistema corrisponde all'uscita del primo sottosistema:

$$Y_1 = U_2$$
$$\Gamma_1 = \Omega_2$$

Oltre a questo, l'uscita del sistema complessivo coincide con quella del secondo sottosistema, mentre l'ingresso al sistema complessivo coincide con l'ingresso al primo sottosistema. Di conseguenza, gli insiemi che definiscono il sistema complessivo sono i seguenti:

$$\begin{array}{ll} T = T_1 = T_2 & X = X_1 \times X_2 \\ U = U_1 & Y = Y_2 \\ \Omega = \Omega_1 & \Gamma = \Gamma_2 \end{array}$$

Adesso, se supponiamo che entrambi i sottosistemi S_1 ed S_2 siano tempo-continui, regolari, a dimensioni finite, lineari e tempo-invarianti, possiamo rappresentarli, in forma di stato, nel modo seguente:

$$S_1 \begin{cases} \dot{x}_1 = F_1 x_1 + G_1 u_1 = F_1 x_1 + G_1 u \\ y_1 = H_1 x_1 \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} \dot{x}_2 = F_2 x_2 + G_2 u_2 \\ y_2 = y = H_2 x_2 \end{cases}$$

Cerchiamo allora di rappresentare, sempre in forma di stato, il sistema complessivo.

Intanto, avendo detto che lo spazio di stato del sistema complessivo è $X = X_1 \times X_2$, il corrispondente vettore di stato sarà $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, per cui l'equazione di stato, partizionata a blocchi, sarà del tipo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix} u$$

Al fine di ottenere una equazione vettoriale di questo tipo, partiamo dalle equazioni di stato dei due sottosistemi:

$$S \begin{cases} \dot{x}_1 = F_1 x_1 + G_1 u \\ \dot{x}_2 = F_2 x_2 + G_2 u_2 \end{cases}$$

La prima equazione ci va bene così com'è; nella seconda, invece, possiamo sostituire $u_2 = y_1 = H_1 x_1$, per cui abbiamo

$$S \begin{cases} \dot{x}_1 = F_1 x_1 + G_1 u \\ \dot{x}_2 = F_2 x_2 + G_2 H_1 x_1 \end{cases}$$

In forma matriciale, queste due equazioni (vettoriali) danno quanto segue:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ G_2 H_1 & F_2 \end{bmatrix}}_{\text{F : matrice di stato del sistema complessivo}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{G: matrice di ingresso del sistema complessivo}} u$$

Questa equazione, in forma compatta, non è altro che $\dot{x} = Fx + Gu$.

Per quanto riguarda l’equazione di uscita, non dobbiamo fare granché, in quanto si tratta semplicemente dell’equazione di uscita $y = H_2 x_2$ del secondo sottosistema: in forma matriciale, abbiamo perciò

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & H_2 \end{bmatrix}}_{\text{H: matrice di ingresso del sistema complessivo}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

In conclusione, il sistema complessivo è descritto, in forma di stato, dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases}$$

Dovendo studiare la stabilità di questo sistema, possiamo utilizzare tutto quanto in precedenza abbiamo visto sui sistemi espressi in questa forma. In particolare, sappiamo che le proprietà di stabilità di un sistema di questo tipo dipendono esclusivamente dalle caratteristiche della matrice F. Concentriamoci allora su tale matrice: lo scopo è quello di applicare il criterio sugli autovalori.

Supponiamo che i due sottosistemi S_1 ed S_2 siano in forma di Jordan, ossia siano scomponibili in un certo numero di sottosistemi interconnessi (facciamo osservare che non si tratta di una ipotesi limitativa, in quanto un sistema lineare è SEMPRE scomponibile, per mezzo di un opportuno cambio di variabili, in forma di Jordan): se accade questo, abbiamo in precedenza visto che le matrici F_1 ed F_2 sono entrambe triangolari, il che significa che i rispettivi elementi diagonali coincidono con i rispettivi autovalori. D’altra parte, la matrice F è risultata essere triangolare a blocchi, con gli elementi diagonali coincidenti proprio con F_1 ed F_2: di conseguenza, gli elementi diagonali di F coincidono con quelli di F_1 ed F_2, il che significa che gli autovalori di F sono gli autovalori di F_1 ed F_2. La conseguenza evidente di questo fatto è che le proprietà di stabilità del sistema complessivo sono determinate dalle proprietà di stabilità dei due sottosistemi componenti:

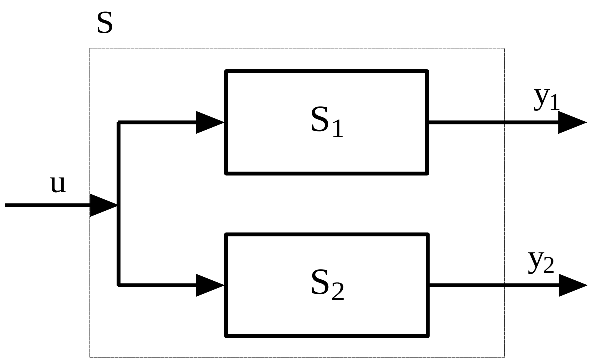
- il primo caso è quello in cui <u>i due sottosistemi S_1 ed S_2 sono entrambi asintoticamente stabili</u>: ciò significa che tutti i rispettivi autovalori hanno parte reale negativa, per cui anche gli autovalori di S hanno tutti parte reale negativa e quindi anche S è asintoticamente stabile;
- il secondo caso è quello in cui <u>almeno uno dei sottosistemi è semplicemente stabile mentre l’altro è asintoticamente stabile</u>: in questo caso, almeno uno dei sottosistemi presenta almeno un autovalore avente parte reale =0 e indice h unitario; in questo caso, il sistema complessivo S sicuramente non è asintoticamente stabile, ma <u>non possiamo nemmeno affermare che sia semplicemente stabile</u>;
- infine, l’ultimo caso è quello in cui <u>almeno uno dei sottosistemi è instabile</u>: in questo caso, S presenta almeno un autovalore con parte reale positiva, per cui anche S è instabile.

Possiamo dunque concludere con il seguente risultato generale:

<u>**Teorema**</u> - *Dato un sistema lineare $(F,G,H)_S$ costituito dalla <u>cascata</u> di due sottosistemi lineari $(F_1,G_1,H_1)_{S_1}$ e $(F_2,G_2,H_2)_{S_2}$, condizione necessaria e sufficiente affinché esso sia asintoticamente stabile è che entrambi i sottosistemi siano asintoticamente stabili. Se almeno uno dei sottosistemi è instabile, allora anche S è instabile.*

CONNESSIONE IN PARALLELO

Passiamo adesso ad esaminare cosa succede quando i due sottosistemi sono connessi in parallelo come illustrato nella figura seguente:



Il vincolo di interconnessione è questa volta rappresentato dal fatto che <u>i due sottosistemi sono sottoposti allo stesso ingresso</u>, che poi è quello valido per l'intero sistema complessivo:

$$
\begin{aligned}
&T = T_1 = T_2\\
&U = U_1 \cap U_2\\
&\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2\\
&X = X_1 \times X_2\\
&Y = Y_1 \times Y_2\\
&\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2
\end{aligned}
$$

Cerchiamo anche in questo caso la rappresentazione di stato del sistema complessivo, partendo da quelle dei due sottosistemi componenti:

$$
S_1 \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = F_1 x_1 + G_1 u_1 = F_1 x_1 + G_1 u \\ y_1 = H_1 x_1 \end{cases}
$$

$$
S_2 \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = F_2 x_2 + G_2 u_2 = F_2 x_2 + G_2 u \\ y_2 = y = H_2 x_2 \end{cases}
$$

L'equazione di stato è immediata, in quanto corrisponde all' "insieme" delle equazioni di stato dei due sottosistemi: in forma matriciale, abbiamo perciò

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}}_{\text{F : matrice di stato del sistema complessivo}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}}_{\text{G: matrice di ingresso del sistema complessivo}} u
$$

E' immediato accorgersi che la matrice F trovata in questo caso è semplicemente un caso particolare della matrice F trovata nel collegamento in cascata: la differenza è solo nel fatto che, in questo caso, il blocco 21 è nullo, mentre prima era G_2H_1. La conseguenza di ciò è che valgono le stesse identiche considerazioni fatte per il collegamento in cascata:

Teorema - *Dato un sistema lineare* $(F,G,H)_S$ *costituito dalla parallelo di due sottosistemi lineari* $(F_1,G_1,H_1)_{S_1}$ *e* $(F_2,G_2,H_2)_{S_2}$ *, condizione necessaria e sufficiente affinché esso sia asintoticamente stabile è che entrambi i sottosistemi siano asintoticamente stabili. Se almeno uno dei sottosistemi è instabile, allora anche S è instabile.*

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

Si è visto dunque come il criterio di stabilità per sistemi lineari interconnessi sia identico per il collegamento in cascata e per quello in parallelo. Per quanto riguarda, in particolare, il collegamento in cascata, è possibile far vedere che *il polinomio caratteristico di un sistema costituito dalla cascata di due sottosistemi lineari* $(F_1,G_1,H_1)_{S_1}$ *e* $(F_2,G_2,H_2)_{S_2}$ *è il prodotto dei rispettivi polinomi caratteristici* $p_1(l)$ *e* $p_2(l)$.

Sulla base di ciò, se riusciamo ad individuare i polinomi caratteristici dei due sottosistemi componenti, possiamo trovare quello del sistema complessivo e possiamo applicare i criteri di stabilità (visti in precedenza) che si basano sullo studio dei segni dei coefficienti di tale polinomio. E’ bene osservare, però, che una proprietà analoga NON vale per i polinomi minimi.

In conclusione, possiamo affermare che *l’analisi della stabilità dei sistemi complessi, costituiti da sottosistemi collegati in cascati e/o in parallelo, può essere effettuata esaminando, uno ad uno, i singoli sottosistemi.*

Questo fatto è importante e vantaggioso per due motivi essenziali:

- il primo è che è sempre meglio affrontare più problemi semplice che non un unico problema complesso;
- il secondo è che, mantenendo separati i vari sottosistemi, è possibile mantenere un certo “contatto” con alcune proprietà fisiche del problema, proprietà che invece sarebbero meno direttamente accessibili qualora si considerasse il sistema nella sua interezza.

Stabilità dei sistemi lineari tempo-discreti

INTRODUZIONE

Fino ad ora, nello studio della stabilità per i sistemi lineari, ci siamo occupati solo dei sistemi lineari tempo-continui (oltre che regolari e a dimensioni finite). Vogliamo adesso vedere, in modo senz'altro più rapido, come si conduce lo studio di stabilità per i sistemi lineari tempo-discreti (oltre che regolari e a dimensioni finite).

Consideriamo dunque un sistema tempo-discreto (regolare a dimensioni finite), lineare e tempo-invariante: esso sarà descritto da una equazione (vettoriale alle differenze) di stato del tipo

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k)$$

Così come abbiamo visto nel caso tempo-continuo, lo studio della stabilità di un sistema siffatto può essere ricondotto, per mezzo di una opportuna trasformazione di variabili, allo studio della stabilità dell'origine come stato di equilibrio del sistema autonomo

$$x(k+1) = Fx(k)$$

Di conseguenza, i criteri di stabilità che ci accingiamo ad enunciare sono del tutto analoghi, anche nelle rispettive dimostrazioni, a quelli visti nel caso tempo-continuo. Naturalmente, l'unica differenza che compare nelle dimostrazioni è che si deve far uso dei criteri di stabilità di Liapunov nella loro formulazione discreta anziché in quella continua.

EQUAZIONE DI LIAPUNOV NEL CASO TEMPO-DISCRETO

Il primo teorema che enunciamo è un criterio di asintotica stabilità:

Teorema - *Sia dato un sistema lineare (tempo-discreto) rappresentato, in forma di stato, dall'equazione* $x(k+1) = Fx(k)$*. Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia asintoticamente stabile è che, presa una qualsiasi matrice Q simmetrica e definita positiva, esista una matrice P, anch'essa simmetrica e definita positiva, che soddisfi la seguente equazione:*

$$\boxed{F^T PF - P = -Q}$$

E' evidente che si tratta di un teorema estremamente simile a quello visto nel caso tempo-continuo, con l'unica differenza che, in quel caso, l'equazione che lega le matrici F,P e Q (detta "*equazione di Liapunov*") era $F^T P + PF = -Q$. Anche la dimostrazione (pag. 181) di questo teorema è del tutto analoga a quella vista nel caso tempo-continuo.

Dimostrazione del teorema

Il teorema fornisce una condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità, per cui dobbiamo dimostrare le due opposte implicazioni.

Cominciamo a dimostrare che, se il sistema è asintoticamente stabile, allora, presa una qualsiasi matrice Q simmetrica e definita positiva, esiste una matrice P, sempre simmetrica e definita positiva, che soddisfa l'equazione di Liapunov $F^T PF - P = -Q$.

Dire che il sistema è asintoticamente stabile significa dire che ogni movimento perturbato x(t), partito da un opportuno intorno dell'origine, tende all'origine stessa: in formule, accade cioè che

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \qquad \forall x \in X \text{ tale che } \|x\| \le \varepsilon$$

Sappiamo che, per i sistemi lineari (tempo-discreti o tempo-continui che siano), l'espressione analitica di un qualsiasi movimento (sia esso nominale o perturbato, si ottiene usando la matrice di transizione di stato φ(τ,t): si ha infatti (nell'ipotesi di ingresso nullo) che $x(t) = \varphi(t,\tau)x(\tau)$, per cui la condizione di asintotica stabilità è

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t,\tau)x(\tau) = 0 \qquad \forall x \in X \text{ tale che } \|x\| \le \varepsilon = 0$$

D'altra parte, lo stato iniziale x(τ) non dipende dal tempo, per cui questa equivale semplicemente a $\lim_{t\to\infty} \varphi(t,\tau) = 0$.

Stiamo inoltre facendo l'ipotesi che il sistema sia tempo-invariante: questo consente sia di prendere l'istante τ=0 come istante iniziale sia anche di valutare la matrice di transizione di stato come $\varphi(t,\tau) = F^{t-\tau}$: la condizione di prima diventa perciò $\lim_{t\to\infty} F^t = 0$.

Adesso, supponendo di aver scelto, in modo del tutto arbitrario, la matrice Q simmetrica e definita positiva, costruiamo la seguente matrice:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \left(F^T\right)^k Q\left(F^k\right)$$

Possiamo facilmente verificare che questa matrice è simmetrica (e ovviamente anche quadrata); basta infatti verificare che essa coincida con la sua trasposta:

$$P^T = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(F^T\right)^k Q\left(F^k\right)\right)^T = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(F^T\right)^k QF^k\right)^T = \sum_{k=0}^{\infty} \left(F^k\right)^T Q^T \left(\left(F^T\right)^k\right)^T =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(F^k\right)^T Q\left(\left(F^T\right)^k\right)^T = \sum_{k=0}^{\infty} \left(F^T\right)^k Q\left(\left(F^k\right)^T\right)^T = \sum_{k=0}^{\infty} \left(F^T\right)^k Q\left(F^k\right) = P$$

Facciamo inoltre vedere che si tratta di una matrice definita positiva: ci basta far vedere che la corrispondente forma quadratica $x^T Px$ è una funzione definita positiva nell'origine. Intanto, risulta

$$x^T Px = x^T\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(F^T\right)^k Q\left(F^k\right)\right)x = \sum_{k=0}^{\infty} x^T\left(F^T\right)^k Q\left(F^k\right)x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(F^k x\right)^T Q\left(F^k x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} z^T Qz$$

dove abbiamo ovviamente posto $z = F^t x$. Dato che la matrice Q è per ipotesi definita positiva, allora il termine $z^T Qz$ è certamente positivo se z≠0, mentre è =0 se z=0, ossia se x=0. Da qui deduciamo che $x^T Qx$ è senz'altro una forma quadratica definita positiva nell'origine, per cui P è definita positiva.

L'ultima cosa da far vedere è che la matrice P così costruita soddisfa l'equazione

$$F^T PF - P = -Q$$

Abbiamo che

$$F^T PF - P = F^T\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(F^T\right)^k Q\left(F^k\right)\right)F - \sum_{k=0}^{\infty}\left(F^T\right)^k Q\left(F^k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} F^T\left(F^T\right)^k Q\left(F^k\right)F - \sum_{k=0}^{\infty}\left(F^T\right)^k Q\left(F^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(F^T\right)^k Q\left(F^k\right) - \sum_{k=0}^{\infty}\left(F^T\right)^k Q\left(F^k\right) =$$

$$= -\left[\left(F^T\right)^k Q\left(F^k\right)\right]_{k=0} = -Q$$

Abbiamo dunque dimostrato la prima implicazione. Adesso dobbiamo dimostrare l'implicazione opposta: se, presa una qualsiasi matrice Q simmetrica e definita positiva, esiste una matrice P, sempre simmetrica e definita positiva, che soddisfa l'equazione di Liapunov $F^T PF - P = -Q$, allora il sistema è asintoticamente stabile.

Sia dunque Q una arbitraria matrice simmetrica definita positiva e sia P la matrice, simmetrica definita positiva, che soddisfa l'equazione di Liapunov. Consideriamo la forma quadratica associata a P, ossia $V(x) = x^T Px$: essendo P definita positiva, V(x) è una funzione definita positiva in x=0. Possiamo allora provare ad applicare il criterio di Liapunov per l'asintotica stabilità del sistema in x=0 (e quindi, in questo caso, per l'asintotica stabilità del sistema): dobbiamo verificare se la funzione $\Delta V(x)$ è definita negativa in x=0.

Intanto, abbiamo che

$$\Delta V(x) = \Delta\left(x^T Px\right) = \Delta\left(x^T\right)Px + x^T P\Delta x = ..(?).. = x^T F^T PFx - x^T P\Delta x = x^T\left(\underbrace{F^T PF - P}_{-Q}\right)x$$

Ricordando che, per ipotesi, la matrice P soddisfa l'equazione di Liapunov, concludiamo che $\Delta V(x) = -x^T Qx$: dato che anche Q è, per ipotesi, definita positiva, deduciamo che $\Delta V(x)$ è definita negativa e questo, in base al criterio di Liapunov, ci dice che il sistema è asintoticamente stabile.

ASINTOTICA STABILITÀ AD AUTOVALORI

In modo sempre analogo al caso tempo-continuo, esiste un criterio di asintotica stabilità che si riconduce all'individuazione ed allo studio degli autovalori della matrice di stato del sistema in esame:

Teorema - *Sia dato un sistema lineare (tempo-discreto) rappresentato, in forma di stato, dall'equazione* $x(k+1) = Fx(k)$*. Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia asintoticamente stabile è che tutti gli autovalori della matrice di stato F siano in modulo minori di uno*

Questo teorema potrebbe essere ricavato da quello dimostrato nel paragrafo precedente, ma, come per l'analogo tempo-continuo, la dimostrazione più semplice consiste nei seguenti due passi fondamentali:

- il primo è quello di trasformare il sistema $x(k+1) = Fx(k)$, per mezzo di una opportuna trasformazione non singolare x=Tz, nel sistema $z(k+1) = \tilde{F}z(k)$, con la matrice $\tilde{F} = T^{-1}FT$ che risulta essere in forma di Jordan;

- il secondo passo è quello di far vedere il teorema non più per il sistema di partenza $x(k+1) = Fx(k)$, ma per il nuovo sistema $z(k+1) = \tilde{F}z(k)$, con il vantaggio di poter sfruttare la particolare struttura della forma di Jordan.

Il procedimento è dunque del tutto analogo a quello visto nel caso tempo-continuo, per cui non riportiamo la dimostrazione. Facciamo anche osservare che, sempre in modo analogo al caso tempo-continuo, non è sempre necessario calcolare i vari autovalori, ma spesso è possibile limitarsi ad una indagine sui coefficienti del polinomio caratteristico della matrice F.

CRITERIO DI SEMPLICE STABILITÀ

Per concludere sulla stabilità dei sistemi tempo-discreti, enunciamo il seguente criterio di semplice stabilità, ancora una volta analogo a quello visto nel caso tempo-continuo:

Teorema - *Sia dato un sistema lineare (tempo-discreto) rappresentato, in forma di stato, dall'equazione* $x(k+1) = Fx(k)$*. Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia semplicemente stabile è che gli autovalori della matrice di stato F siano in modulo minori di uno e che quelli in modulo uguali ad 1 (che devono necessariamente esistere) siano radici semplici del polinomio minimo di F*

Stabilità dei sistemi linearizzati

Introduzione: determinazione del sistema linearizzato

Tutti i risultati presentati nei precedenti paragrafi e riguardanti la stabilità dei sistemi lineari sono di grande importanza anche perché sono spesso alla base della discussione della stabilità di uno stato di equilibrio o di un movimento di un sistema non lineare. Infatti, per poter applicare tali risultati, è sufficiente passare dal sistema non lineare in esame al sistema lineare che descrive il movimento del sistema in un intorno dello stato di equilibrio o del movimento generico esaminato. In altre parole, *l'applicazione dei suddetti risultati è possibile a patto di "linearizzare" il sistema nell'intorno del movimento considerato.*

Cominciamo allora a precisare cosa intendiamo per "*linearizzazione di un sistema nell'interno di un movimento*".

Facciamo riferimento ad un sistema regolare retto da una equazione (differenziale vettoriale) di stato nella forma

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$$

Supponiamo di aver fissato un istante iniziale τ, uno stato iniziale $\bar{x} = x(\tau)$ e un ingresso $\bar{u}(\bullet)$ applicato al sistema: in corrispondenza di questo ingresso e della specificata condizione iniziale, il sistema produce un movimento regolato dalla equazione

$$\bar{x}(\bullet) = \varphi(\bullet, \tau, \bar{x}, \bar{u}(\bullet))$$

Questo movimento non è altro che l'unica soluzione dell'equazione differenziale $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$.

Supponiamo, adesso, che ci sia una perturbazione sul sistema tale che da provocare una variazione $\delta u(\bullet)$ sull'ingresso e una variazione δx sullo stato iniziale: ciò significa, quindi, che il nuovo ingresso (cioè l'ingresso perturbato) è $\bar{u}(\bullet) + \delta u(\bullet)$ e che il nuovo stato iniziale (cioè lo stato iniziale perturbato) è $\bar{x} + \delta x$; il sistema produce allora un movimento perturbato regolato dalla equazione

$$\dot{\bar{x}}(t) + \delta\dot{x}(t) = f(\bar{x}(t) + \delta x(t), \bar{u}(t) + \delta u(t), t)$$

A questo punto, nell'ipotesi che le perturbazioni siano sufficientemente piccole, possiamo sviluppare la funzione generatrice in serie di Taylor, arrestandoci al secondo termine dello sviluppo: così facendo, otteniamo

$$\dot{\bar{x}}(t) + \delta\dot{x}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{\bar{x}(t) \\ \bar{u}(t)}} \partial x(t) + \left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{\substack{\bar{x}(t) \\ \bar{u}(t)}} \partial u(t)$$

D'altra parte, avendo prima detto che $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$, questa relazione diventa

$$\boxed{\delta\dot{x}(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{\bar{x}(t) \\ \bar{u}(t)}} \partial x(t) + \left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{\substack{\bar{x}(t) \\ \bar{u}(t)}} \partial u(t)}$$

Questa relazione rappresenta il cosiddetto "**sistema linearizzato**" associato al sistema $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ ed al movimento $\overline{x}(\bullet)$. Si osserva subito che si tratta di un sistema nella forma

$$\dot{z}(t) = F(t)z(t) + G(t)v(t)$$

dove si è posto

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{z}(t) = \delta\dot{x}(t) \\ F(t) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{\overline{x}(t) \\ \overline{u}(t)}} \\ z(t) = \partial x(t) \\ G(t) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial u}\right]_{\substack{\overline{x}(t) \\ \overline{u}(t)}} \\ v(t) = \partial u(t) \end{array}}$$

LINEARIZZAZIONE INTORNO AD UNO STATO DI EQUILIBRIO

Possiamo subito osservare una cosa interessante: supponiamo che il sistema non lineare $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ di partenza sia un sistema tempo-invariante, per cui la sua equazione di stato è nella forma

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Se operiamo la linearizzazione su questo sistema, è evidente che otteniamo nuovamente

$$\delta\dot{x}(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{\overline{x}(t) \\ \overline{u}(t)}} \partial x(t) + \left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{\substack{\overline{x}(t) \\ \overline{u}(t)}} \partial u(t)$$

il che significa che il sistema linearizzato continua ad essere tempo-variante. Il motivo è chiaramente nel fatto che dipendono comunque dal tempo le grandezze $\overline{x}(t)$ e $\overline{u}(t)$. Di conseguenza, la condizione affinché il sistema linearizzato risultati tempo-invariante è che anche le grandezze $\overline{x}(t)$ e $\overline{u}(t)$ siano indipendenti dal tempo: questo accade solo se $\overline{u}(t)$ è un ingresso costante di equilibrio e $\overline{x}$ è un suo corrispondente stato di equilibrio. Possiamo perciò concludere che, *dato un sistema non lineare tempo-invariante $\dot{x} = f(x,u)$, dato un ingresso di equilibrio $\overline{u}$ e un suo corrispondente stato di equilibrio $\overline{x}$, il sistema linearizzato associato a $\dot{x} = f(x,u)$ ed al suddetto stato di equilibrio è nella forma $\dot{z}(t) = Fz(t) + Gv(t)$.*

STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO E STABILITÀ DEL SISTEMA LINEARIZZATO

Cerchiamo adesso di capire quale sia l'utilità di questo sistema linearizzato.

Il nostro scopo è l'analisi della stabilità dell'equilibrio per un sistema non lineare tempo-invariante descritto da una equazione di stato nella forma

$$\dot{x} = f(x,u)$$

Questa analisi è un problema in generale complesso, dato che, per risolverlo mediante la "classica" teoria di Liapunov, è necessario "*inventare*" una opportuna funzione V(x) dello stato che soddisfi le condizioni di uno dei criteri di stabilità o instabilità esaminati in precedenza. Al contrario, abbiamo visto che l'analisi di stabilità dei sistemi lineari è relativamente semplice da portare a termine. D'altra parte, considerando che la stabilità alla Liapunov richiede solo l'analisi del comportamento asintotico dei movimenti conseguenti a piccole perturbazioni dello stato iniziale, è intuitivo pensare che, ad eccezione di alcuni casi critici che poi saranno esaminati, lo studio della stabilità di uno stato di equilibrio possa effettuarsi analizzando la stabilità del sistema linearizzato. Questo è quello che, in effetti, accade nella maggioranza dei casi, come mostrato dal seguente teorema:

Teorema - *Dato un sistema non lineare tempo-invariante* $\dot{x} = f(x,u)$, *fissato un ingresso di equilibrio* $\overline{u}$ *e un suo corrispondente stato di equilibrio* $\overline{x}$, *condizione sufficiente affinché l'equilibrio sia asintoticamente stabile è che il sistema linearizzato associato a* $\dot{x} = f(x,u)$ *nell'intorno di* $\overline{x}$ *sia asintoticamente stabile*

Dimostrazione

Inquadriamo, intanto, ciò che dobbiamo dimostrare: dobbiamo far vedere che, se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile, allora lo stato di equilibrio $\overline{x}$ è di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare.

Per semplicità di ragionamento, supponiamo che lo stato di equilibrio considerato sia lo stato nullo: $\overline{x} = 0$. Sia inoltre $\overline{u}$ il generico ingresso di equilibrio cui corrisponde tale stato di equilibrio.

L'equazione del movimento perturbato per il sistema non lineare è $\dot{x} = f(x,\overline{u}) = f(x)$ ed è l'equazione corrispondente al "solito" sistema autonomo. Espandendo in serie di Taylor di punto iniziale $\overline{x} = 0$, otteniamo

$$\dot{x}(t) = f(0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{\overline{x}\\ \overline{u}}} \Delta x + \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{\substack{\overline{x}\\ \overline{u}}}}_{=0} \Delta u + g(x)$$

dove $\Delta x = x - \overline{x} = x - 0 = x$ e dove il termine g(x) è un vettore di polinomi comprendente i termini di ordine ≥2 dello sviluppo in serie. Posto allora $F = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{\overline{x}\\ \overline{u}}}$, possiamo concludere che l'equazione del movimento perturbato per il sistema non lineare è esprimibile nella forma

$$\dot{x} = Fx + g(x)$$

D'altra parte, abbiamo detto che il modello linearizzato associato al sistema non lineare nell'intorno di $\bar{x}$ è del tipo

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gv(t)$$

Se supponiamo che sia v=0, il modello si riduce a $\dot{z}(t) = Fz(t)$ e questa equazione, avendo preso $\bar{x} = 0$, è del tutto equivalente alla equazione $\dot{x} = Fx$.

L'ipotesi che stiamo facendo è che il sistema linearizzato $\dot{z}(t) = Fz(t)$ sia asintoticamente stabile: possiamo allora applicare a tale sistema il criterio di Lyapunov, in base al quale, scelta una qualsiasi matrice Q simmetrica definita positiva, esiste senz'altro una matrice P, anch'essa simmetrica e definita positiva, tale da soddisfare l'equazione

$$F^T P + PF = -Q$$

Vediamo allora se questo fatto può aiutarci a concludere che $\bar{x}$ è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema $\dot{x} = Fx$.

Intanto, se P è una matrice simmetrica definita positiva, la forma quadratica $V(x) = x^T Px$ gode della proprietà di essere definita positiva nell'origine. Vediamo se gode anche della proprietà per cui $\dot{V}(x)$ è definita negativa nell'origine.

Intanto, risulta che

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x}$$

D'altra parte, sappiamo che $\dot{x} = Fx + g(x)$, per cui

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= (Fx + g(x))^T Px + x^T PFx + x^T Pg(x) = \left(x^T F^T + g^T(x)\right)Px + x^T PFx + x^T Pg(x) = \\ &= x^T F^T Px + g^T(x)Px + x^T PFx + x^T Pg(x) = x^T F^T Px + x^T PFx + g^T(x)Px + x^T Pg(x) = \\ &= x^T\left(F^T P + PF\right)x + g^T(x)Px + x^T Pg(x) = -x^T Qx + g^T(x)Px + x^T Pg(x)\end{aligned}$$

Sulla base di quanto ottenuto, possiamo trarre alcune conclusioni circa la funzione $\dot{V}(x)$: in primo luogo, si osserva evidentemente che $\dot{V}(0) = 0$; inoltre, avendo detto che g(x) contiene i termini di grado ≥2 dello sviluppo in serie di Taylor, , è chiaro che i termini $g^T(x)Px$ e $x^T Pg(x)$ sono polinomi almeno di 3° grado; anche la loro somma, allora, è un polinomio di almeno 3° grado: questo significa che, in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine, tale polinomio si possa trascurare rispetto al termine $-x^T Qx$.

In definitiva, quindi, in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine, la funzione $\dot{V}(x)$ ha espressione

$$\dot{V}(x) = -x^T Qx$$

A questo punto, ricordando che la matrice Q è una matrice simmetrica definita positiva nell'origine, deduciamo subito che $\dot{V}(x)$ è definita negativa nell'origine: vale perciò il criterio di Liapunov in base al quale l'origine è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema $\dot{x} = Fx$.

Questo teorema dice dunque quanto segue: il problema di partenza è quello per cui, dato il sistema non lineare tempo-invariante $\dot{x} = f(x,u)$, vogliamo sapere se, fissato un ingresso di equilibrio $\bar{u}$ e individuato un corrispondente stato di equilibrio $\bar{x}$, tale stato risulta essere asintoticamente stabile; possiamo allora linearizzare $\dot{x} = f(x,u)$ nell'intorno di $\bar{x}$ e studiare la stabilità del corrispondente sistema linearizzato $\dot{z}(t) = Fz(t) + Gv(t)$; se tale sistema è asintoticamente stabile, allora siamo certi che $\bar{x}$ sia uno stato di equilibrio asintoticamente stabile per $\dot{x} = f(x,u)$; viceversa, se $\dot{z}(t) = Fz(t) + Gv(t)$ non dovesse risultare asintoticamente stabile, allora non è detto (ma è comunque possibile, visto che la condizione è sufficiente, ma non necessaria) che $\bar{x}$ sia uno stato di equilibrio asintoticamente stabile per $\dot{x} = f(x,u)$.

C'è solo un caso particolare in cui è possibile trarre conclusioni definitive sulla instabilità del sistema $\dot{x} = f(x,u)$ partendo dalla conoscenza del sistema linearizzato $\dot{z}(t) = Fz(t) + Gv(t)$:

<u>Teorema</u> - *Se la matrice $F = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}$ del sistema linearizzato ha uno o più autovalori con parte reale positiva, lo stato di equilibrio $\bar{x}$ corrispondente all'ingresso $\bar{u}$ del sistema $\dot{x} = f(x,u)$ è instabile*

Mettendo insieme gli ultimi due teoremi, possiamo concludere che *l'unico caso in cui non è possibile concludere nulla sulla stabilità dello stato di equilibrio $\bar{x}$, per mezzo di una analisi del sistema linearizzato, è quello in cui la matrice $F = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}$ ha gli autovalori con parte reale negativa ad eccezione di alcuni con parte reale nulla.*

Solamente in questo caso, la stabilità dello stato di equilibrio $\bar{x}$ dipende dalle non-linearità del sistema, ossia dai termini che, in precedenza, sono stati raggruppati in g(x). Ad esclusione di questi casi critici, lo studio della stabilità dell'equilibrio può, dunque, essere ritenuto un problema risolubile anche per sistemi non lineari e a grandi dimensioni.

ESEMPIO

Supponiamo di avere un sistema del 2° ordine, con 2 ingressi, la cui equazione di stato sia fatta nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \underbrace{-\sqrt{x_1 - x_2} + u_1}_{f_1(x,u)} \\ \dot{x}_2 = \underbrace{\sqrt{x_1 - x_2} - \sqrt{x_2} + u_2}_{f_2(x,u)} \end{cases}$$

Si osserva immediatamente che il sistema non lineare, in quanto non lo sono le due componenti f_1 ed f_2 della funzione generatrice.

Supponiamo di aver fissato l'ingresso (costante) al sistema: $\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix}$

In corrispondenza di questo ingresso, l'equazione del movimento perturbato è

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x,\overline{u}) = -\sqrt{x_1 - x_2} + \overline{u}_1 \\ \dot{x}_2 = f_2(x,\overline{u}) = \sqrt{x_1 - x_2} - \sqrt{x_2} + \overline{u}_2 \end{cases}$$

Per trovare gli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso specificato, dobbiamo semplicemente imporre che $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$: così facendo, otteniamo le equazioni

$$\begin{cases} 0 = -\sqrt{x_1 - x_2} + \overline{u}_1 \\ 0 = \sqrt{x_1 - x_2} - \sqrt{x_2} + \overline{u}_2 \end{cases}$$

Facendo qualche semplice calcolo, si ottiene

$$\begin{cases} x_1 = \overline{u}_1^2 + x_2 \\ x_2 = \left(\overline{u}_1 + \overline{u}_2\right)^2 \end{cases}$$

In base a queste equazioni, deduciamo che il sistema, in corrispondenza dell'ingresso specificato, ammette come unico stato di equilibrio lo stato

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{u}_1^2 + \left(\overline{u}_1 + \overline{u}_2\right)^2 \\ \left(\overline{u}_1 + \overline{u}_2\right)^2 \end{bmatrix}$$

Vogliamo allora verificare se si tratta o meno di uno stato di equilibrio asintoticamente stabile e lo vogliamo fare utilizzando quanto detto a proposito dei sistemi linearizzati.

Dobbiamo perciò trovare le matrici F e G che definiscono il sistema linearizzato

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gv(t)$$

associato al sistema in esame e determinato nell'intorno dello stato di equilibrio in esame.

Per determinare le suddette matrici, ci basta applicare le rispettive definizioni:

- per quanto riguarda la matrice di stato F, abbiamo che

$$F = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{\overline{x}\\ \overline{u}}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{\overline{x}\\ \overline{u}}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x_1 - x_2}} & \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x_1 - x_2}} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x_1 - x_2}} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x_1 - x_2}} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x_2}} \end{bmatrix}_{\substack{\overline{x}\\ \overline{u}}} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}} & \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\overline{x}_2}} \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\overline{u}_1} & \dfrac{1}{\overline{u}_1} \\ \dfrac{1}{\overline{u}_1} & -\dfrac{1}{\overline{u}_1} - \dfrac{1}{\overline{u}_1 + \overline{u}_2} \end{bmatrix}$$

- per quanto riguarda, invece, la matrice di ingresso G, abbiamo che

$$G = \left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{\frac{\bar{x}}{\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}_{\frac{\bar{x}}{\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{\frac{\bar{x}}{\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si osserva, come previsto, che, una volta fissato l'ingresso, le due matrici F e G sono matrici di numeri. Sulla base di queste matrici, possiamo effettuare l'analisi di stabilità del sistema linearizzato.

La prima cosa da fare è quella di individuare gli autovalori della matrici F; in particolare, non ci interessa tanto sapere il loro valore numerico, quanto il segno della loro parte reale. A questo scopo, ci ricordiamo che, data una qualsiasi matrice quadrata, la somma degli elementi diagonali (la cosiddetta "traccia") è pari alla somma degli autovalori, mentre il determinante della matrice è pari al prodotto di tali autovalori.

Nel nostro caso, quindi, abbiamo che

$$\mathrm{traccia}(F) = \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{1}{\bar{u}_1} - \frac{1}{\bar{u}_1} - \frac{1}{\bar{u}_1 + \bar{u}_2} < 0$$

$$\det(F) = \lambda_1\lambda_2 = -\frac{1}{\bar{u}_1}\left(-\frac{1}{\bar{u}_1} - \frac{1}{\bar{u}_1 + \bar{u}_2}\right) - \frac{1}{\bar{u}_1^2} = \frac{1}{\bar{u}_1}\frac{1}{\bar{u}_1 + \bar{u}_2} > 0$$

Da queste semplici relazioni possiamo stabilire il segno dei due autovalori: infatti, il fatto che la somma degli autovalori risulti <0 indica che essi non sono certamente entrambi reali positivi oppure complessi con parte reale positiva; inoltre, il fatto che il loro prodotto risulti >0 indica che i due autovalori non possono nemmeno essere reali uno positivo e l'altro negativo. Di conseguenza, l'unica possibile è che entrambi abbiano parte reale negativa, il che comporta, in base al noto criterio di Routh, che il sistema linearizzato sia asintoticamente stabile e che, quindi, lo stato di equilibrio $\bar{x}$ prima individuato sia di asintoticamente stabile per il sistema non lineare.

Osservazione: equazione di uscita del sistema linearizzato

Possiamo anche individuare l'equazione di uscita del sistema linearizzato: nell'ipotesi che il sistema in esame sia proprio (ossia tale che l'uscita non sia influenzata direttamente dall'ingresso) e tempo-invariante, l'equazione di uscita sarà nella forma $\bar{y} = \eta(\bar{x})$. In presenza di una perturbazione sul sistema, l'equazione sarà nella forma $\bar{y} + \Delta y = \eta(\bar{x} + z)$: sviluppando in serie di Taylor, di punto iniziale $\bar{x}$, la funzione di uscita η, abbiamo che

$$\bar{y} + \Delta y = \eta(\bar{x}) + \left.\frac{\partial \eta}{\partial x}\right|_{\bar{x}} z + \ldots\ldots$$

da cui si ottiene, trascurando i termini di ordine superiore al primo, che

$$\Delta y = \left.\frac{\partial \eta}{\partial x}\right|_{\bar{x}} z$$

Ponendo allora $H = \left.\frac{\partial \eta}{\partial x}\right|_{\bar{x}}$ e $w = \Delta y$, deduciamo che l'equazione di uscita è nella forma

$$w = Hz$$

Con riferimento all'esempio considerato poco fa, se supponiamo che l'equazione di uscita del sistema non lineare sia, per esempio, $y = kx_2$, otteniamo che l'equazione di uscita del sistema linearizzato è

$$w = Hz = \left.\frac{\partial \eta}{\partial x}\right|_{\bar{x}} z = \left[\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \eta}{\partial x_2}\right]_{\bar{x}} z = \left[0 \quad \frac{1}{2\sqrt{x_2}}\right]_{\bar{x}} z = \left[0 \quad \frac{1}{2\sqrt{\bar{x}_2}}\right] z = \left[0 \quad \frac{1}{2\left(\bar{u}_1 + \bar{u}_2\right)}\right] z$$

ESEMPIO

Supponiamo adesso di avere un sistema del 2° ordine, con 1 ingresso, la cui equazione di stato sia fatta nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{f_1(x,u)} \\ \dot{x}_2 = \underbrace{x_1 - x_2^2 + \sin u}_{f_2(x,u)} \end{cases}$$

Anche qui, si osserva immediatamente che il sistema è non lineare.

Come ingresso al sistema prendiamo l'ingresso nullo: $\bar{u} = 0$. In corrispondenza di questo ingresso, l'equazione del movimento perturbato è

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x, \bar{u}) = x_1^2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x, \bar{u}) = x_1 - x_2^2 \end{cases}$$

Gli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso specificato si ottengono imponendo che risulti $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$: così facendo, otteniamo le equazioni

$$\begin{cases} 0 = x_1^2 + x_2^2 \\ 0 = x_1 - x_2^2 \end{cases}$$

e da qui si ricava facilmente che l'unico stato che soddisfa a queste due condizioni è lo stato nullo $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Vogliamo allora verificare, utilizzando ancora una volta la linearizzazione, se si tratta o meno di uno stato di equilibrio asintoticamente stabile.

Dobbiamo perciò trovare le matrici F e G che definiscono il sistema linearizzato

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gv(t)$$

Applichiamo ancora una volta le definizioni:

- per quanto riguarda la matrice di stato F, abbiamo che

$$F=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}=\begin{bmatrix}2x_1 & 2x_2\\ 1 & -2x_2\end{bmatrix}_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

- per quanto riguarda, invece, la matrice di ingresso G, abbiamo che

$$G=\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u}\\ \frac{\partial f_2}{\partial u}\end{bmatrix}_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}=\begin{bmatrix}0\\ -\cos u\end{bmatrix}_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$$

Sulla base di queste matrici, possiamo effettuare l'analisi di stabilità del sistema linearizzato. Si tratta di un caso molto semplice, in quanto la matrice di stato F è una matrice triangolare inferiore con gli elementi diagonali nulli: ciò significa che essa presenta, come unico autovalore (di molteplicità algebrica 2) l'autovalore $\lambda=0$. Allora, in base al criterio di Routh, possiamo affermare che il sistema linearizzato è instabile. Di riflesso, deduciamo che non siamo in grado di trarre alcuna conclusione circa la stabilità del sistema non lineare.

ESEMPIO

Supponiamo di avere ancora un sistema del 2° ordine, autonomo (cioè tale che l'ingresso non influenzi in alcun modo lo stato), la cui equazione di stato sia fatta nel modo seguente:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = \underbrace{x_2}_{f_1(x)}\\ \dot{x}_2 = \underbrace{-k\sin x_1 - a x_2}_{f_2(x)}\end{cases}$$

con k>0 e a>0. Ancora una volta, si osserva che il sistema è non lineare. I suoi stati di equilibrio si ottengono imponendo che risulti $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$: così facendo, otteniamo le equazioni

$$\begin{cases}0 = x_2\\ 0 = -k\sin x_1\end{cases}$$

e da qui si ricava facilmente che sono stati di equilibrio tutti gli stati del tipo $\begin{bmatrix}h\pi\\ 0\end{bmatrix}$, con h numero intero positivo.

Senza concentrarci su un particolare stato tra questi, indaghiamo sulle caratteristiche di stabilità di tali stati.

Dobbiamo ancora una volta linearizzare, ossia, in definitiva, trovare le matrici F e G:

$$F = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k\cos x_1 & -a \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}$$

$$G = \left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sulla base di queste matrici, in particolare della matrice di stato F, possiamo effettuare l'analisi di stabilità del sistema linearizzato.

La prima cosa che si osserva è che il valore degli elementi di F (in particolare di quello di posto 21) dipende dal valore della costante h che compare nella espressione $\begin{bmatrix} h\pi \\ 0 \end{bmatrix}$:

- quando h è pari, si ha che $\cos x_1=1$, per cui $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -a \end{bmatrix}$: in questo caso, risulta $\begin{array}{l} \text{traccia}(F) = -a < 0 \\ \det(F) = k > 0 \end{array}$ e abbiamo già visto che corrisponde ad un equilibrio asintoticamente stabile;

- quando invece h è dispari, si ha che $\cos x_1=-1$, per cui $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & -a \end{bmatrix}$: in questo caso, risulta $\begin{array}{l} \text{traccia}(F) = -a < 0 \\ \det(F) = -k < 0 \end{array}$ e questo significa che un autovalore è positivo mentre l'altro è negativo; di conseguenza, l'equilibrio, in questo caso, è instabile.

Possiamo perciò concludere che gli stati $\begin{bmatrix} h\pi \\ 0 \end{bmatrix}$, con h pari, sono senz'altro stati di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare in esame, mentre invece non possiamo dire niente sugli stati $\begin{bmatrix} h\pi \\ 0 \end{bmatrix}$ con h dispari.

ESEMPIO

Consideriamo adesso un sistema del 2° ordine, autonomo, la cui equazione di stato sia fatta nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \underbrace{-x_1^3 + x_2^2}_{f_1(x)} \\ \dot{x}_2 = \underbrace{-x_1^3 - x_2^3}_{f_2(x)} \end{cases}$$

Questo sistema, ancora una volta non lineare, ha evidentemente lo stato nullo come stato di equilibrio. Verifichiamo, tramite la linearizzazione, se si tratta o meno di uno stato di equilibrio asintoticamente stabile.

Applicando le solite definizioni, abbiamo che

$$F=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}=\begin{bmatrix}-3x_1^2 & 1\\ -3x_1^2 & -3x_2^2\end{bmatrix}_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$G=\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

Ancora una volta, la matrice di stato F presenta come unico autovalore (di molteplicità 2) $\lambda=0$, il che ci dice che il sistema linearizzato è instabile e non ci consente di dire nulla circa la stabilità dello stato di equilibrio $\bar{x}=0$ per il sistema non lineare. Allora, vediamo se è possibile applicare al sistema il criterio di stabilità di Liapunov.

Consideriamo perciò la funzione

$$V(x)=x_1^4+2x_2^2$$

Questa funzione si annulla in $\bar{x}=0$ e assume solo valori positivi, per cui è definita positiva in $\bar{x}=0$. Verifichiamo se la sua derivata, rispetto allo stato, è definita negativa in $\bar{x}=0$.

Intanto, si ha che

$$\dot{V}(x)=\frac{\partial V(x)}{dx_1}f_1(x)+\frac{\partial V(x)}{dx_2}f_2(x)=\left(4x_1^3\right)\left(-x_1^3+x_2\right)+\left(4x_2\right)\left(-x_1^3-x_2^3\right)=....=-4\left(x_1^6+x_2^4\right)$$

Si deduce immediatamente che questa funzione si annulla in $\bar{x}=0$ e assume solo valori negativi, per cui è definita negativa in $\bar{x}=0$. In base al criterio di Liapunov, possiamo dunque affermare che lo stato nullo è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare considerato.

Esempio

Consideriamo un altro sistema del 2° ordine, autonomo, descritto dall'equazione di stato

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\underbrace{x_1^3+x_2^2}_{f_1(x)}\\ \dot{x}_2=\underbrace{-x_1^3-x_2^3}_{f_2(x)}\end{cases}$$

Questo sistema, sempre non lineare, ha lo stato nullo come stato di equilibrio. Verifichiamo, tramite la linearizzazione, se si tratta o meno di uno stato di equilibrio asintoticamente stabile.

La matrice di stato del sistema linearizzato è

$$F=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}=\begin{bmatrix}3x_1^2 & 1\\ -3x_1^2 & 3x_2^2\end{bmatrix}_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Si tratta della stessa matrice trovata nell'esempio precedente, per cui il sistema linearizzato è instabile e non ci consente di dire nulla circa la stabilità dello stato di equilibrio $\overline{x}=0$ per il sistema non lineare. Vediamo se è possibile applicare al sistema il criterio di stabilità di Liapunov.

Consideriamo perciò la funzione

$$V(x)=x_1^4+2x_2^2$$

Si tratta della stessa funzione esaminata nell'esempio precedente, per cui sappiamo che essa è definita positiva in $\overline{x}=0$. Verifichiamo se la sua derivata, rispetto allo stato, è definita negativa in $\overline{x}=0$.

Intanto, si ha che

$$\dot{V}(x)=\frac{\partial V(x)}{dx_1}f_1(x)+\frac{\partial V(x)}{dx_2}f_2(x)=\left(4x_1^3\right)\left(x_1^3+x_2\right)+\left(4x_2\right)\left(-x_1^3+x_2^3\right)=....=4\left(x_1^6+x_2^4\right)$$

Questa funzione si annulla in $\overline{x}=0$ e assume solo valori positivi, per cui è definita positiva in $\overline{x}=0$. In base al criterio di instabilità Liapunov, possiamo dunque affermare che lo stato nullo è uno stato di equilibrio instabile per il sistema non lineare considerato.

La cosa interessante da notare è che, negli ultimi due esempi, la matrice di stato F del sistema linearizzato è la stessa, ma, nel primo esempio, il sistema non lineare da cui proviene F ha lo stato nullo come stato di equilibrio asintoticamente stabile, mentre, in questo secondo esempio, il sistema non lineare di provenienza ha lo stato nullo come stato di equilibrio instabile.

ESEMPIO

Come ultimo esempio, consideriamo il seguente sistema del 2° ordine autonomo:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_1^3\end{cases}$$

Ancora una volta, il sistema, sempre non lineare, ha lo stato nullo come stato di equilibrio. Verifichiamo, tramite la linearizzazione, se si tratta o meno di uno stato di equilibrio asintoticamente stabile.

La matrice di stato del sistema linearizzato è in questo caso

$$F=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\overline{x}\atop\overline{u}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{\overline{x}\atop\overline{u}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3x_1^2 & 0\end{bmatrix}_{\overline{x}\atop\overline{u}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Si tratta della stessa matrice trovata nei due esempi precedenti, per cui, se vogliamo studiare la stabilità del sistema non lineare, dobbiamo ancora una volta rifarci ai criteri di Liapunov.
Consideriamo perciò la "solita" funzione $V(x)=x_1^4+2x_2^2$, che sappiamo essere definita positiva in $\overline{x}=0$. Abbiamo inoltre che

$$\dot{V}(x)=\frac{\partial V(x)}{dx_1}f_1(x)+\frac{\partial V(x)}{dx_2}f_2(x)=\left(4x_1^3\right)\left(x_2\right)+\left(4x_2\right)\left(-x_1^3\right)=....=0$$

Il fatto che risulti $\dot{V}(x) \equiv 0$ ci dice che $\dot{V}(x)$ è semidefinita negativa in $\overline{x} = 0$ e ,quindi, in base al criterio di Liapunov, che, per il sistema non lineare, lo stato nullo è uno stato di equilibrio stabile. Non sappiamo, però, ancora se la stabilità è semplice o asintotica.

D'altra parte, possiamo ragionare nel modo seguente: dire che $\dot{V}(x) \equiv 0$ significa dire che V(x)=cost lungo un qualsiasi movimento perturbato, ossia che il movimento (di stato) del sistema avviene lungo curve alle quali corrisponde sempre lo stesso valore di V(x). Di conseguenza, il movimento (di stato) del sistema avviene lungo curve di livello , il che implica che non ci sia convergenza, ossia che l'equilibrio sia semplicemente stabile.

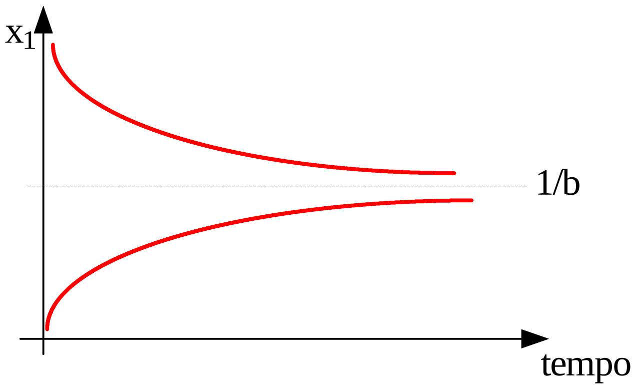
ESEMPIO: MODELLO PREDA-PREDATORE

Supponiamo di avere una regione del tutto isolata nella quale vivono solo 2 specie: la specie della PREDE, che si nutrono solo di quanto fornito dall'ambiente, e la specie dei PREDATORI, che si nutrono invece delle prede. Indichiamo con x_1 la densità superficiale delle prede (cioè il numero di prede per Km^2). Nell'ipotesi che la regione sia isolata e quindi non siano possibili fenomeni di migrazione, possiamo supporre che la legge con cui varia la densità di prede sia del tipo $\dot{x}_1 = ax_1$, dove $\dot{x}_1$ rappresenta il tasso di variazione di x_1, mentre a è un generico coefficiente positivo.

Facciamo inoltre l'ipotesi che le risorse fornite dall'ambiente siano illimitate: questa ipotesi è tanto più vera quanto più piccola è la densità di prede x_1; se, invece, x_1 fosse grande, allora sarebbe necessario tenere conto della contrapposizione tra le prede stesse al fine di accaparrarsi le ridotte risorse disponibili. Per tenere conto di questo, possiamo usare quest'altro modello, che prende il nome di "modello logistico":

$$\dot{x}_1 = ax_1(1 - bx_1)$$

dove anche b è un coefficiente positivo. Al termine 1/b si dà il nome di "**capacità portante**" della specie considerata: il significato è che, se non ci sono predatori, la x_1 tende al valore 1/b partendo da valori inferiori (il che significa che la natalità prevale sulla mortalità), mentre, se ci sono predatori, la x_1 tende al valore 1/b da valori superiori (il che significa che la mortalità prevale sulla natalità).



Adesso indichiamo con x_2 la densità superficiale dei predatori (cioè il numero di predatori per Km^2): è chiaro che, se non ci fosse prede, i predatori non avrebbero come nutrirsi e si estinguerebbero, per cui avremmo una legge del tipo

$$\dot{x}_2 = -cx_2$$

Al contrario, in presenza di prede e predatori contemporaneamente, possiamo ritenere valide le seguenti due leggi di variazione delle rispettive densità:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = ax_1(1-bx_1) - dx_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 + ex_1x_2\end{cases}$$

In pratica, abbiamo supposto che sia la mortalità delle prede, dovuta alla predazione da parte dei predatori, sia la natalità dei predatori, dovuta al nutrimento, dipendano dalla probabilità di incontro tra prede e predatori e tale probabilità dipende perciò da x_1 e da x_2: da qui, l’introduzione dei due termini $-dx_1x_2$ e ex_1x_2.

Le due equazioni appena trovate rappresentano dunque le equazioni di un sistema autonomo del 2° ordine. Facciamo osservare, prima di ogni altra cosa, che il sistema manca di ingressi solo perché li abbiamo trascurati e non perché non ci siano effettivamente.

Andiamo dunque ad analizzare il sistema, cominciando dalla ricerca degli eventuali stati di equilibrio: per trovare tali stati, dobbiamo imporre le due condizioni $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$, ottenendo

$$\begin{cases}x_1\left[a(1-bx_1) - dx_2\right] = 0 \\ x_2(ex_1 - c) = 0\end{cases}$$

Dalla seconda equazione, otteniamo i valori $x_2 = 0$ e $x_1 = \frac{c}{e}$; andando a sostituire nella prima equazione, otteniamo quanto segue:

- in corrispondenza di x_2=0, otteniamo due possibili valori per x_1, che sono 0 e $\frac{1}{b}$;

- in corrispondenza di $x_1 = \frac{c}{e}$, si ottiene, invece, il valore $x_2 = \frac{a}{d}\left(1-\frac{bc}{e}\right)$

Possiamo perciò concludere che il sistema presenta i seguenti 3 stati di equilibrio:

$$\begin{aligned}\overline{x}_A &= (0,0) \\ \overline{x}_B &= \left(\frac{1}{b},0\right) \\ \overline{x}_C &= \left(\frac{c}{e},\frac{a}{d}\left(1-\frac{bc}{e}\right)\right)\end{aligned}$$

Tuttavia, questo è un discorso del tutto analitico, nel senso che, mentre i primi due stati hanno sicuramente senso fisico, il terzo ha senso fisico solo se $x_{C,2} = \frac{a}{d}\left(1-\frac{bc}{e}\right) \geq 0$, ossia se $bc \leq e$. Anzi, a ben vedere, se fosse bc=e, lo stato $\overline{x}_C$ andrebbe a coincidere con $\overline{x}_B$; di conseguenza, ci mettiamo nella ipotesi che sia $bc < e$.

Premesso questo, analizziamo la stabilità di questi stati di equilibrio. Essendo il sistema in esame chiaramente non lineare, possiamo sfruttare la linearizzazione. Andiamo allora a determinare la matrice di stato F del sistema linearizzato per uno stato di equilibrio $\overline{x}$ generico, in modo poi da calcolarla in corrispondenza dei tre stati che stiamo studiando.

Applicando la normale definizione, abbiamo che

$$F = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{\overline{x}\\ \overline{u}}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\overline{x}} = \begin{bmatrix} a - 2abx_1 - dx_2 & -dx_1 \\ ex_2 & -c + ex_1 \end{bmatrix}_{\overline{x}}$$

Vediamo allora che succede in corrispondenza dei tre stati di equilibrio:

- in corrispondenza di $\overline{x}_A = (0,0)$ risulta

$$F_A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$$

  Il determinante di questa matrice è negativo, il che significa che c'è un autovalore positivo e l'altro negativo; quindi, l'equilibrio del sistema linearizzato è instabile, il che ci impedisce di trarre conclusioni circa la stabilità di $\overline{x}_A = (0,0)$ per il sistema non lineare;

- in corrispondenza di $\overline{x}_B = \left(\frac{1}{b},0\right)$ risulta

$$F_B = \begin{bmatrix} a-2a & -\dfrac{d}{d} \\ e & -c+\dfrac{e}{b} \end{bmatrix}$$

  Il determinante di questa matrice è $\det F_B = a\left(c-\frac{e}{b}\right)$ ed è negativo nell'ipotesi che $bc < e$: anche in questo caso, quindi, il sistema linearizzato è instabile, per cui non possiamo trarre conclusioni circa la stabilità di $\overline{x}_B = \left(\frac{1}{b},0\right)$ per il sistema non lineare;

- infine, in corrispondenza di $\overline{x}_C = \left(\frac{c}{e},\frac{a}{d}\left(1-\frac{bc}{e}\right)\right)$ risulta

$$F_C = \begin{bmatrix} -\dfrac{abc}{e} & -\dfrac{cd}{e} \\ \dfrac{ae}{d}\left(1-\dfrac{bc}{e}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Il determinante di questa matrice è $\det F_C = ac\left(1-\frac{bc}{e}\right)$ ed è positivo nell'ipotesi di $bc < e$; la traccia della matrice è inoltre $\text{traccia}(F_C) = -\frac{abc}{e} < 0$; abbiamo dunque che la somma degli autovalori di F_C (pari alla traccia di F_C) è negativa, mentre il prodotto dei due autovalori (pari al determinante di F_C) è positivo: deduciamo che i due autovalori sono entrambi negativi, per cui il sistema linearizzato è asintoticamente stabile e quindi lo stato $\overline{x}_C$ è uno stato (l'unico) di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1