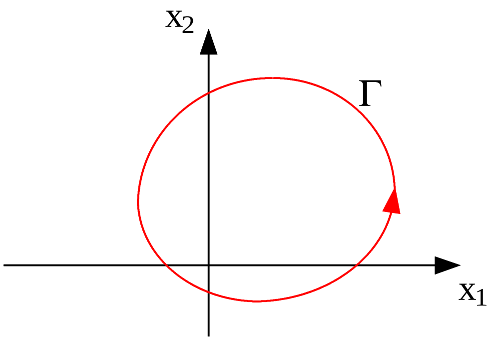
“Teoria dei sistemi” - Capitolo 7

Sistemi del 2° ordine e stabilità in grande

Sistemi tempo-continui del 2° ordine

INTRODUZIONE

I sistemi del 2° ordine sono, per definizione, quei sistemi in cui lo spazio di stato X è uno spazio vettoriale di dimensione 2. Ciò significa che X è rappresentabile mediante un piano cartesiano a 2 dimensioni (o un suo sottoinsieme nel caso in cui X non coincida con l'insieme delle coppie di numeri reali) e che lo spazio degli eventi è rappresentabile mediante un piano cartesiano tridimensionale (o un suo sottoinsieme).



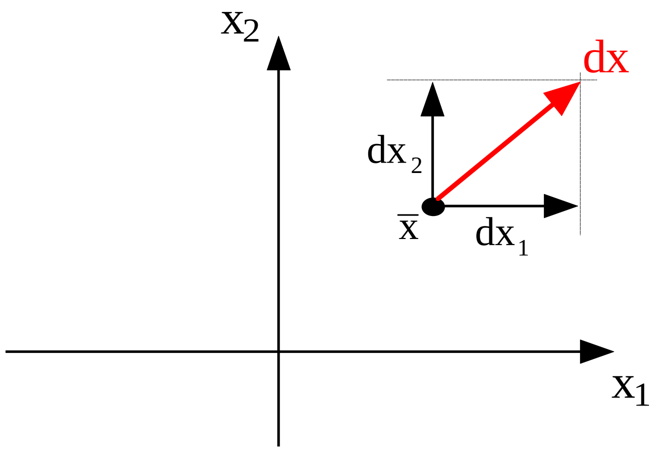
L'esperienza ha mostrato che questi sistemi sono quelli a minimo grado di complessità per mezzo dei quali è possibile descrivere, con sufficiente accuratezza, i fenomeni dinamici dei sistemi fisici. D'altra parte, questa categoria di sistemi gode di particolari proprietà che vengono invece a mancare qualora si considerino sistemi di ordine superiore: uno dei principali motivi da cui questo deriva è il fatto che, nei sistemi del secondo ordine, una traiettoria chiusa Γ individua una regione limitata dello spazio di stato, mentre questo non è ovviamente vero per un sistema di ordine superiore (pensiamo ad un sistema del 3° ordine). Inoltre, un pregio non trascurabile dei sistemi del 2° ordine è il fatto per cui le loro traiettorie sono linee in un piano e quindi si possono tracciare senza dover ricorrere a costruzioni complesse ed artificiose.

QUADRO DI STATO

In questi paragrafi siamo interessati a studiare i sistemi del 2° ordine essenzialmente sotto l'aspetto della stabilità: di conseguenza, così come abbiamo fatto per i sistemi in generale, ci interessiamo direttamente al "*movimento relativo*" del sistema, ossia alla differenza tra il *movimento perturbato* ed il *movimento nominale*. Questo significa, in termini pratici, che ci riconduciamo allo studio delle traiettorie del sistema autonomo (cioè un sistema libero e tempo-invariante) descritto da una equazione (differenziale vettoriale) di stato nella forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Possiamo dare subito una interpretazione geometrica di queste due equazioni: supponiamo di fissare un certo stato iniziale $\overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix}$; le quantità $f_1(\overline{x})$ e $f_2(\overline{x})$ (cioè le due componenti della <u>*funzione generatrice*</u> calcolate in $\overline{x}$) rappresentano evidentemente le variazioni infinitesime dx_1 e dx_2 dello stato del sistema nell'intorno di $\overline{x}$, come illustrato nella figura seguente:



Allora, *il rapporto* $tg\Psi = \frac{f_2(\overline{x})}{f_1(\overline{x})}$ *rappresenta il coefficiente angolare della retta su cui giace lo spostamento infinitesimo dx tangente alla traiettoria del sistema nello stato* $\overline{x}$ *considerato.*

Una cosa importante che si osserva è la seguente: se il sistema cui facciamo riferimento non è autonomo né libero, ossia se la funzione generatrice è del tipo $f(x(t), u(t), t)$, è ovvio che la quantità

$$tg\Psi = \frac{f_2(\overline{x}, u, t)}{f_1(\overline{x}, u, t)}$$

una volta fissato lo stato $\overline{x}$, dipende dall'ingresso e dall'istante t di osservazione, ossia che la direzione della traiettoria del sistema nel punto $\overline{x}$ dipende da $u(\bullet)$ e da t; ciò significa che, per ogni stato $\overline{x}$, ci sono ∞ famiglie di traiettorie che si ottengono al variare di u e di t. Le cose si semplificano, invece, quando il sistema è autonomo: in questo caso, infatti, abbiamo visto poco fa che l'equazione (differenziale) di stato è nella forma $\dot{x} = f(x)$, il che comporta che $tg\Psi = \frac{f_2(\overline{x})}{f_1(\overline{x})}$, ossia che si abbia una sola traiettoria nel punto $\overline{x}$.

Possiamo perciò riepilogare nel modo seguente: *dato il piano di stato del sistema in esame, se il sistema è del tipo* $\dot{x} = f(x, u, t)$*, allora per ogni punto* $x \in X$ *del piano di stato passano, in generale, più traiettorie; al contrario, se la dinamica del sistema è descritta da una equazione del tipo* $\dot{x} = f(x)$*, allora per ogni punto del piano di stato passa una sola traiettoria, che corrisponde alla soluzione dell'equazione differenziale* $\dot{x} = f(x)$*.*

Quando noi, una volta individuato il piano di stato del sistema, andiamo a tracciare in esso l'insieme di tutte le traiettorie che il sistema può seguire, otteniamo ciò che si chiama "**quadro di stato**" del sistema. Naturalmente, anche se possiamo in teoria tracciare tutte le traiettorie possibili per il sistema, è chiaro che solo alcune di esse (le più indicative) avranno una certa importanza. Ci si pone allora il problema della determinazione degli elementi caratteristici del quadro di stato.

Quali sono questi elementi caratteristici del quadro di stato? Tra tutte le possibili traiettorie, ce ne sono due categorie particolarmente importanti:

- in primo luogo, ci sono le *traiettorie corrispondenti a stati di equilibrio*: ricordando che uno "stato di equilibrio" non è altro che un movimento costante del sistema, ossia un movimento durante il quale lo stato del sistema si mantiene costante nel tempo, è chiaro che *la traiettoria corrispondente ad uno stato di equilibrio si riduce semplicemente ad un punto, che è quello corrispondente allo stato di equilibrio;*

- in secondo luogo, ci sono le cosiddette "*traiettorie chiuse*" (che prendono il nome di "**cicli**"), che corrispondono a situazioni in cui il sistema parte da un certo stato iniziale e finisce poi per ritornarvi in un tempo più o meno lungo.

N.B. Dal punto di vista del movimento del sistema si intuisce che *dire che la traiettoria del sistema è un ciclo equivale a dire che il movimento del sistema è di tipo periodico*

CLASSIFICAZIONE DEGLI STATI DI EQUILIBRIO

Per quanto riguarda la determinazione degli stati di equilibrio, il problema è stato ampiamente analizzato in precedenza: si è visto, tra le altre cose, che si tratta di un problema abbastanza semplice da risolvere, almeno dal punto di vista numerico, visto che si tratta di determinare le soluzioni di un sistema di due equazioni algebriche non lineari in due incognite:

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2)=0 \\ f_2(x_1,x_2)=0 \end{cases}$$

Una volta individuati, con questo procedimento, gli eventuali stati di equilibrio del sistema, è opportuno farne una caratterizzazione da due punti di vista:

- in primo luogo, bisogna qualificare gli stati di equilibrio dal punto di vista della stabilità ed anche questo è un problema precedentemente affrontato;

- in secondo luogo, è opportuno indicare se questi stati sono isolati oppure no: a questo proposito, ricordiamo che dire che uno stato di equilibrio $\overline{x} \in \overline{X}_{\overline{u}} \subseteq \overline{X}$, corrispondente ad un ingresso $\overline{u}$ (costante per i sistemi regolari), è *isolato* (oppure non isolato) significa dire che esso è (o non è) un punto di accumulazione per l'insieme $\overline{X}_{\overline{u}}$ degli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso $\overline{u}$.

N.B. A proposito del problema della stabilità di uno stato di equilibrio $\overline{x}$, ricordiamo che nell'intorno di tutti gli stati di equilibrio in cui il sistema linearizzato non è critico (cioè è asintoticamente stabile oppure instabile con almeno un autovalore con parte reale positiva), le traiettorie del quadro di stato coincidono, in prima approssimazione, con quelle del sistema linearizzato, la cui determinazione è stata discussa in precedenza.

CLASSIFICAZIONE DEI CICLI

Così come è importante stabilire se un certo stato di equilibrio, anche per i cicli è opportuno fare una analisi simile. Sussiste infatti la seguente definizione:

Def. *Un ciclo si definisce "**non isolato**" quando, in prossimità di tale ciclo, ci sono altri cicli*

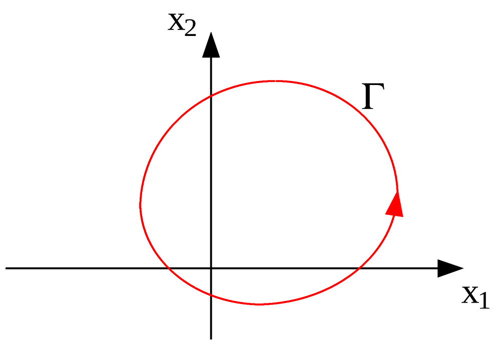
Per comprende questa definizione, bisogna rifarsi ai concetti di traiettoria nominale e traiettoria perturbata: infatti, supponiamo che la traiettoria nominale del sistema, in corrispondenza delle specificate condizioni iniziali e dello specificato ingresso, risulti essere un ciclo, ossia una traiettoria chiusa; se si ha una perturbazione dello stato iniziale, il sistema non segue più la traiettoria nominale, ma segue quella perturbata; allora, dire che il ciclo nominale non è isolato significa dire che, in prossimità di esso, ci sono altre traiettorie chiuse, ossia quindi che anche la traiettoria perturbata sarà presumibilmente un ciclo, sia pure diverso da quello nominale.

Quando, invece, questo non accade, ossia quando la traiettoria perturbata non risulta essere più chiusa, allora si dice che il ciclo nominale è "**isolato**": i cicli isolati prendono a loro volta il nome di "**cicli limite**".

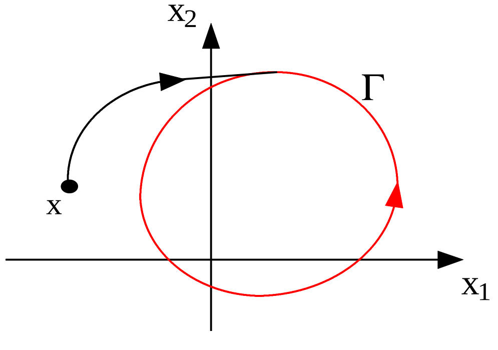
Sempre in analogia a quanto si fa' per gli stati di equilibrio, anche per i cicli va fatta una "*analisi di stabilità*". A questo proposito, possiamo partire dalla seguente definizione:

Def. *Un ciclo si dice "**asintoticamente stabile**" quando, in presenza di una perturbazione, la traiettoria perturbata tende asintoticamente a quella nominale*

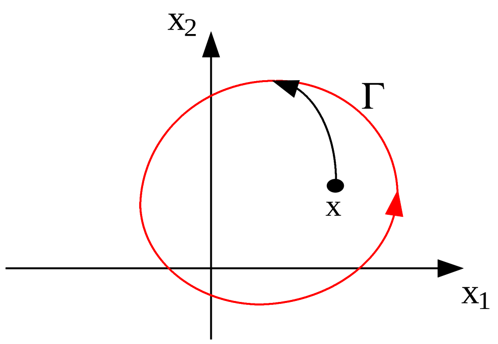
Per comprendere questa definizione, consideriamo la traiettoria nominale Γ indicata nella figura seguente:



Questa traiettoria è evidentemente chiusa, per cui si tratta di un ciclo. Adesso supponiamo che il sistema subisca una perturbazione tale da portare il suo stato iniziale in un nuovo punto x del piano di stato; allora, noi diremo che la traiettoria Γ è asintoticamente stabile se accade quanto illustrato nella figura seguente:

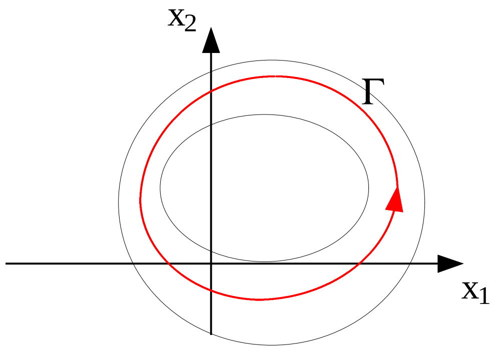


Si osserva, cioè, che, dopo un tempo più o meno lungo, la traiettoria perturbata (disegnata in nero) va a coincidere con quella nominale. Naturalmente, lo stato perturbato x può trovarsi sia al di fuori di Γ sia al di dentro, come illustrato nella figura seguente:

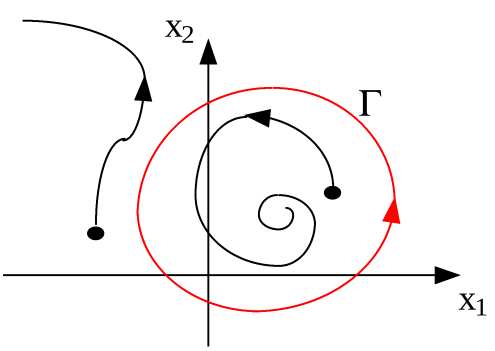


Appare adesso abbastanza ovvio capire cosa deve succedere perché un ciclo sia semplicemente stabile oppure instabile:

- perché ci sia la "**semplice stabilità**" , la traiettoria perturbata deve a sua volta essere un ciclo e la sua "distanza" dal ciclo nominale deve mantenersi entro un valore finito piccolo a piacere;



- al contrario, perché ci sia "**instabilità**" , la traiettoria perturbata non deve essere più un ciclo.



In termini rigorosi, sussistono le seguenti definizioni:

Def. *Un ciclo limite si dice "**instabile**" se...(?)*

Def. *Un ciclo si dice "**semplicemente stabile**" se...(?)*

Si intuisce subito che *un ciclo semplicemente stabile non può essere isolato.* Infatti, è chiaro che un ciclo semplicemente stabile presenta infiniti altri cicli vicini a sé e questo esclude perciò che possa trattarsi di un ciclo isolato.

Rispetto alle situazioni descritte dalle precedenti definizioni, ci sono anche delle situazioni intermedie: esistono infatti "**cicli semi-stabili**" e "**cicli semi-instabili**"... ....(?)............

Esempio

Consideriamo un sistema retto dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -K\sin(x_1) \end{cases}$$

(con K>0).

Cominciamo a determinare gli stati di equilibrio di questo sistema: si tratta degli stati che soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 = -K\sin(x_1) \end{cases}$$

ossia degli stati del tipo $\begin{bmatrix} h\pi \\ 0 \end{bmatrix}$, con h numero intero. Per studiare la stabilità di questi stati di equilibrio, considerato che il sistema in esame è non lineare, possiamo far uso della linearizzazione: la matrice di stato del sistema linearizzato intorno al generico stato di equilibrio è

$$F = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K\cos(x_1) & 0 \end{bmatrix}_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K\cos(n\pi) & 0 \end{bmatrix}$$

Si osserva che questa matrice assume valori diversi a seconda che h sia pari o dispari. Cominciamo dal caso in cui h è un numero pari: in questo caso, risulta

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di questa matrice sono $\lambda_1 = j\sqrt{K}$ e $\lambda_2 = -j\sqrt{K}$. Entrambi questi autovalori sono a parte reale nulla, per cui non possiamo trarre alcuna conclusione circa la stabilità degli stati di equilibrio $\begin{bmatrix} h\pi \\ 0 \end{bmatrix}$ con h pari.

Nel caso, invece, di h dispari, la matrice di stato del sistema linearizzato risulta essere

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K & 0 \end{bmatrix}$$

e i suoi autovalori sono $\lambda_1 = \sqrt{K}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{K}$. La presenza di un autovalore positivo ci dice che il sistema linearizzato è instabile e quindi che gli stati di equilibrio $\begin{bmatrix} h\pi \\ 0 \end{bmatrix}$ con h dispari sono instabili.

DETERMINAZIONE DEI CICLI

Non sempre la determinazione dei cicli di un sistema del secondo ordine è una operazione semplice. Vengono allora in aiuto dei criteri di esistenza e di non esistenza dei cicli, come per esempio il seguente, dovuto a **Bendixon**:

Teorema - *Sia dato un sistema del tipo* $\dot{x} = f(x)$, *con* $f(x)$ *continua insieme alle sue derivate. Sia inoltre R un insieme chiuso e limitato contenuto nel piano di stato del sistema e delimitato da una curva semplice C (in generale non coincidente con una traiettoria). Se la funzione* $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ *non cambia segno in R e si annulla al più su delle linee, allora non esistono cicli interamente contenuti in R*

Esempio

Chiariamo con un esempio quanto affermato da questo teorema.
Consideriamo il sistema autonomo descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1^3 \end{cases}$$

E' immediato accorgersi che l'unico stato di equilibrio di questo sistema è l'origine $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Andiamo allora a calcolare la funzione $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$: si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 - 1 = -1$$

Questa funzione assume valore costante in tutto il piano di stato, il che significa che non ci possono essere cicli nel piano di stato, ossia che il sistema non ammette cicli

Mentre quello appena illustrato è un criterio di non esistenza di cicli, vediamo adesso una semplice condizione di esistenza di cicli, che prende il nome di "**teorema di esistenza di Poincarè**":

Teorema - *Sia dato un sistema del tipo $\dot{x} = f(x)$, con $f(x)$ continua insieme alle sue derivate. Sia inoltre R una regione compatta e anulare, non contenente stati di equilibrio: se le traiettorie che attraversano la frontiera di R sono entranti, allora esiste in R almeno un ciclo*

Indice di una traiettoria

Un ulteriore risultato sull'esistenza o meno di cicli nello spazio di stato si può ottenere introducendo il concetto di "*indice*" di una linea chiusa C (dove è bene sottolineare che C è una linea chiusa e non una traiettoria chiusa):

Def. - *Dato un sistema del tipo $\dot{x} = f(x)$, presa una linea chiusa e semplice C NON passante per stati di equilibrio del sistema, si definisce "**indice**" di C il numero di rotazioni fatte, in senso antiorario, dal vettore $f(x)$ quando il punto x percorre la linea chiusa C in senso antiorario*

Avendo in precedenza detto che il vettore $f(x)$ rappresenta il vettore tangente alle traiettoria (unica) passante per lo stato x, l'indice di una linea chiusa C è il numero di giri fatti, in senso antiorario, dal vettore tangente alla traiettoria in un punto x della linea C quando tale punto percorre la linea in senso antiorario.

Il concetto di indice di una linea chiusa è utile in quanto è possibile dimostrare due risultati:

a) il primo è che <u>l'indice di una qualsiasi linea chiusa NON contenente al suo interno degli stati di equilibrio è nullo</u>;

b) il secondo è che <u>l'indice di un ciclo è sempre pari a +1</u>.

Se l'indice di un ciclo (che è comunque una linea chiusa) è diverso da 0, in base al risultato (a) si deduce immediatamente che *un ciclo deve necessariamente contenere al suo interno almeno uno stato di equilibrio.*

Questa proprietà può anche essere precisata a patto di introdurre la nozione di "<u>*indice di uno stato di equilibrio isolato*</u>". Per introdurre questa nozione sarebbe necessario dimostrare, a rigore, che *due linee chiuse hanno lo stesso indice se racchiudono gli stessi stati di equilibrio.*

Noi diamo per scontata questa dimostrazione, per cui possiamo fornire la seguente definizione:

Def. - *Dato un sistema del tipo $\dot{x} = f(x)$ e dato un suo stato di equilibrio $\bar{x}$ isolato, si definisce "indice" di tale stato l'indice di una qualsiasi linea chiusa C che racchiude al proprio interno $\bar{x}$ e nessun altro stato di equilibrio*

E' possibile verificare che tutti gli stati di equilibrio isolati dei sistemi lineari hanno indice +1, ed eccezione della **sella** (questo concetto sarà introdotto più avanti), che ha indice -1. Inoltre, è possibile dimostrare il seguente risultato:

Teorema - *L'indice di uno stato di equilibrio isolato è pari all'indice dello stato di equilibrio del sistema linearizzato nel caso in cui il sistema linearizzato sia asintoticamente stabile oppure instabile con almeno un autovalore a parte reale positiva*

Infine, è possibile verificare che l'indice di una linea chiusa C è pari alla somma degli indici degli stati di equilibrio appartenenti alla regione delimitata da tale linea.

Sulla base di tutte queste considerazioni, è possibile dimostrare il seguente teorema:

Teorema - *Sia dato un sistema del tipo* $\dot{x} = f(x, \overline{u})$*; si supponga che tutti gli stati di equilibrio di tale sistema siano isolati e che i relativi sistemi linearizzati siano asintoticamente stabili o instabili con almeno un autovalore a parte reale positiva. Indicato con* n_S *il numero di punti di sella contenuti nella regione delimitata da un qualsiasi ciclo G e con n il numero dei rimanenti stati di equilibrio contenuti in tale regione, risulta* $\boxed{n_S = n+1}$

La dimostrazione di questo teorema è immediata (pag. 241): abbiamo detto che l'indice di un qualsiasi ciclo Γ è pari a +1; abbiamo anche detto che questo stesso indice è pari alla somma degli indici degli stati di equilibrio contenuti in Γ: allora, poiché l'indice di una sella è -1, mentre l'indice di tutti gli altri stati di equilibrio è pari a +1, è chiaro che deve essere $n_S = n+1$

La conseguenza che più ci interessa di questo teorema è che *<u>all'interno di un ciclo G devono esistere un numero dispari di stati di equilibrio.</u>*

Questa semplice regola permette di ridurre il numero di possibili cicli di un quadro di stato in base al solo esame degli stati di equilibrio.

METODO DELLE ISOCLINE PER IL TRACCIAMENTO DEL QUADRO DI STATO

La maggior parte delle considerazioni fatte nei paragrafi precedenti sono essenzialmente di natura qualitativa: per esempio, supponiamo di essere riusciti a dimostrare, per mezzo del teorema di Poincarè, l'esistenza di un ciclo in una certa regione R del piano di stato; fatto questo, non abbiamo alcuna informazione a proposito della forma e della natura di questo ciclo, né tanto meno abbiamo informazioni circa la forma delle traiettorie in prossimità di tale ciclo.

Allora, se vogliamo determinare in modo più preciso il quadro di stato del nostro sistema, abbiamo bisogno di uno strumento che ci fornisca indicazioni precise sull'andamento delle traiettorie. Tra i vari strumenti c'è il cosiddetto "**metodo delle isocline**".

Sia dato dunque il sistema descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u) \end{cases}$$

Fissato un ingresso di equilibrio $\bar{u}$, il primo passo del metodo delle isocline consiste nel tracciare, nel piano di stato, le cosiddette "**isocline**", ossia le linee di equazione $\frac{f_1(x_1,x_2,\bar{u})}{f_2(x_1,x_2,\bar{u})}=K$, per diversi valori della costante K.

Dato che lungo ogni traiettoria risulta $\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{f_2}{f_1}$, deduciamo che, per ciascun valore di K, l'equazione $\frac{f_1(x_1,x_2,\bar{u})}{f_2(x_1,x_2,\bar{u})}=K$ rappresenta l'insieme di tutti i punti del piano per i quali passano traiettorie aventi la stessa tangente (è questo il motivo per cui si parla di "isocline").

Una volta tracciate alcune isocline, è possibile ottenere una traiettorie per interpolazione: basta approssimare la traiettoria, in un intorno di ogni isoclina, con un tratto di retta.

E' chiaro che l'approssimazione del metodo è tanto migliore quante più isocline vengono tracciate nel piano e quanto più tali isocline saranno distribuite in modo uniforme.

Esempi numerici sui sistemi del secondo ordine

ESEMPIO (APPELLO DI SETTEMBRE 1994 - ESERCIZIO 5)

Determinare e classificare tutti gli elementi caratteristici del quadro di stato del seguente sistema autonomo (con x_1 e x_2 reali):

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + x_1^3\\ \dot{x}_2 = x_2 + x_1^2 x_2 - x_1\end{cases}$$

Risoluzione

Cominciamo a determinare gli stati di equilibrio di questo sistema: si tratta degli stati che soddisfano le equazioni

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = 0 = x_2 + x_1^3\\ \dot{x}_2 = 0 = x_2 + x_1^2 x_2 - x_1\end{cases}$$

Si ha che

$$x_2 = -x_1^3 \xrightarrow{\text{sostituendo nella 2° eq.}} -x_1^3 - x_1^5 - x_1 = 0 \longrightarrow \left(x_1^2 + x_1^4 + 1\right)x_1 = 0 \longrightarrow x_1 = 0 \longrightarrow x_2 = 0$$

Deduciamo che il sistema ammette l'origine $\bar{x}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ come unico stato di equilibrio. Essendo l'unico, è sicuramente uno stato di equilibrio isolato. Per analizzarne la stabilità, visto che il sistema in esame è non lineare, possiamo provare ad usare la linearizzazione: la matrice di stato del sistema linearizzato intorno ad $\bar{x}$ è

$$F = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & 1 \\ 2x_1x_2 - 1 & 1 + x_1^2 \end{bmatrix}_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice è

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1$$

dal che si deduce che gli autovalori di F sono $\lambda_1 = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$. Entrambi questi autovalori sono a parte reale positiva, il che significa che il sistema linearizzato è instabile e quindi che lo stato $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è uno stato di equilibrio instabile per il sistema in esame.

Dobbiamo adesso vedere se esistono o meno dei cicli, ossia delle traiettorie chiuse. Proviamo per prima cosa ad applicare il *criterio di non-esistenza di cicli di Bendixon*:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 3x_1^2 + 1 + x_1^2 = 4x_1^2 + 1$$

Si osserva che la funzione $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ non cambia mai segno in tutto il piano di stato (è sempre positiva), dal che deduciamo che il sistema non ammette cicli.

ESEMPIO (APPELLO DI FEBBRAIO 1993 - ESERCIZIO 5)

Si dica se il seguente sistema autonomo può presentare cicli nello spazio di stato X=Â^2:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_1^2 x_2 - x_1 \end{cases}$$

La funzione g e la sua derivata prima sono continue in Â.

Risoluzione

Proviamo per prima cosa ad applicare il criterio di non-esistenza di cicli di Bendixon:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1 - 3x_2^2$$

Si osserva che la funzione $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ non cambia mai segno in tutto il piano di stato (è sempre negativa), dal che deduciamo che il sistema non ammette cicli.

ESEMPIO (APPELLO DI SETTEMBRE 1992 - ESERCIZIO 4)

Si consideri il seguente sistema non lineare autonomo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \left(9 - x_1^2\right)x_2 - x_1 \end{cases}$$

Si dica, giustificando la risposta, se può esistere un ciclo entro il cerchio del piano di stato, avente centro nell'origine e raggio pari a 2.

<u>Risoluzione</u>

Proviamo ancora una volta ad applicare il criterio di non-esistenza di cicli di Bendixon:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 + 9 - x_1^2 = 9 - x_1^2$$

Si osserva che la funzione $9 - x_1^2$ risulta sempre positiva quando x_1 varia nell'intervallo $]-3,+3[$, dal che deduciamo che il sistema non ammette cicli.

ESEMPIO (APPELLO DI APRILE 1992 - ESERCIZIO 5)

Determinare e classificare gli stati di equilibrio, corrispondenti all'ingresso costante u=1, del seguente sistema del 2° ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sqrt{x_1 - x_2} + u \\ \dot{x}_2 = \sqrt{x_1 - x_2} - \sqrt{x_2} \end{cases}$$

<u>Risoluzione</u>

Gli stati di equilibrio di questo sistema, corrispondenti all'ingresso costante u=1, sono quelli che soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} 0 = -\sqrt{x_1 - x_2} + 1 \\ 0 = \sqrt{x_1 - x_2} - \sqrt{x_2} \end{cases}$$

Sommando membro a membro le due equazioni, si ottiene

$$0 = 1 - \sqrt{x_2} \longrightarrow x_2 = 1 \xrightarrow{\text{sostituendo nella 1° eq}} 0 = -\sqrt{x_1 - 1} + 1 \longrightarrow x_1 = 2$$

Deduciamo dunque che il sistema ammette come unico stato di equilibrio lo stato $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Essendo l'unico, è sicuramente uno stato di equilibrio isolato. Per analizzarne la stabilità, visto che il sistema in esame è non lineare, possiamo provare ad usare la linearizzazione: la matrice di stato del sistema linearizzato intorno ad $\bar{x}$ è

$$F = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{x_1 - x_2}} & \frac{1}{2\sqrt{x_1 - x_2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{x_1 - x_2}} & -\frac{1}{2\sqrt{x_1 - x_2}} - \frac{1}{2\sqrt{x_2}} \end{bmatrix}_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

In questa matrice si ha che

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{traccia}F = -\frac{3}{4}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det F = -\frac{1}{4}$$

Il fatto che il prodotto dei due autovalori sia negativo ci dice che uno di essi è positivo e l’altro negativo, dal che deduciamo che il sistema linearizzato è instabile e quindi che lo stato $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ è uno stato di equilibrio instabile per il sistema in esame.

NODI, FUOCHI E CENTRI

Consideriamo un sistema del 2° ordine, autonomo, lineare e tempo-invariante: la sua equazione (vettoriale differenziale) è del tipo $\dot{x} = Fx$ e corrisponde, in forma esplicita, a

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

La stabilità di questo sistema può essere analizzata studiando i suoi autovalori, che sono le radici del polinomio caratteristico della sua matrice di stato:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

E’ chiaro che, nel caso in cui risulta $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$, nessuno dei due autovalori è nullo: in questo caso, l’origine (0,0) del piano di stato è l’unico stato di equilibrio del sistema.

Indicati con λ_1 e λ_2 i due autovalori, sappiamo che il movimento del sistema è dato da $x(t) = e^{Ft}x(0)$: nel caso in cui i due autovalori siano distinti, l’espressione esplicita del movimento (libero) è

$$x_1(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_3 e^{\lambda_2 t}$$
$$x_2(t) = A_2 e^{\lambda_1 t} + A_4 e^{\lambda_2 t}$$

mentre, se i due autovalori sono uguali, diventa

$$x_1(t) = (A_1 + A_3 t)e^{\lambda t}$$
$$x_2(t) = (A_2 + A_4 t)e^{\lambda t}$$

(dove tutte le costanti di integrazione si possono determinare facilmente imponendo le condizioni iniziali).

Si possono allora presentare le seguenti situazioni:

- la prima è quella in cui *entrambi gli autovalori sono reali negativi*: in questo caso, il sistema è asintoticamente stabile e si dice in questo caso che l'origine del piano di stato è un "**nodo stabile**";

- quando invece *entrambi gli autovalori sono reali positivi*, il sistema è instabile e si dice che l'origine del piano di stato è un "**nodo instabile**";

- se *entrambi gli autovalori sono reali ma di segno opposto*, il sistema è ancora una volta instabile e si dice in questo caso che l'origine del piano di stato è una "**sella**";

- c'è poi il caso in cui *gli autovalori sono complessi (coniugati) con parte reale negativa*: in questo caso, il sistema è ancora una volta asintoticamente stabile e si dice che l'origine del piano di stato è un "**fuoco stabile**";

- se invece *gli autovalori sono complessi (coniugati) con parte reale positiva*, allora il sistema è instabile e si dice che l'origine del piano di stato è un "**fuoco instabile**";

- infine, c'è il caso limite in cui *gli autovalori sono complessi (coniugati) con parte reale nulla*: in questo caso, il sistema è stabile e si dice che l'origine del piano di stato è un "**centro**" (visto che le traiettorie del sistema sono delle ellissi centrate nell'origine).

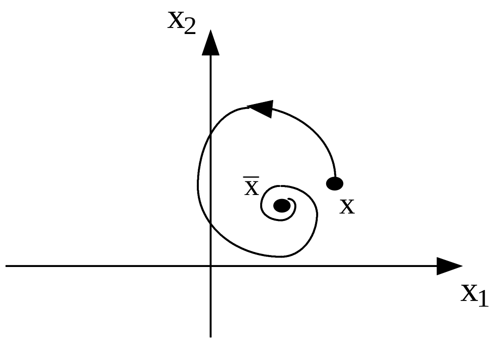
Le definizioni date in questo paragrafo riguardano l'andamento delle traiettorie del sistema nei pressi dell'origine.

Stabilità in grande

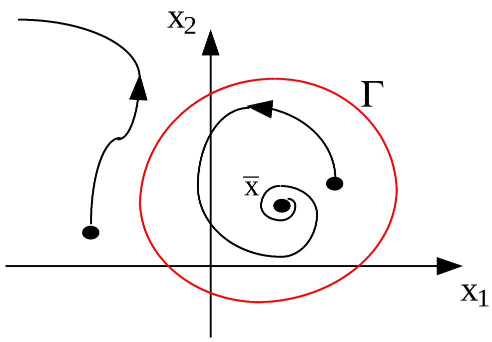
INTRODUZIONE

Abbiamo in precedenza visto come sia possibile discutere la stabilità dell'equilibrio di un sistema per mezzo dell'analisi del corrispondente sistema linearizzato. Abbiamo in particolare concluso che, tranne alcun casi critici, lo studio della stabilità dell'equilibrio di sistemi non lineari, anche a grandi dimensioni, può essere portato a termine con tecniche di calcolo di autovalori o con altre tecniche analoghe, comunque senza fare ricorso alcuno alla teoria delle funzioni di Liapunov. Questo è, in effetti, corretto se ci si accontenta, come abbiamo fatto fino ad ora, di una "*analisi in piccolo della stabilità*", ossia di una analisi in corrispondenza di perturbazioni comunque piccole sul sistema. Al contrario, se vogliamo discutere la stabilità dell'equilibrio per *grandi perturbazioni dello stato iniziale*, la teoria di Liapunov risulta essere insostituibile.

In particolare, è intuitivo comprendere l'opportunità di aver a disposizione dei metodi capaci di determinare, eventualmente in modo approssimato, l'entità degli scostamenti iniziali che si possono far subire allo stato del sistema in modo tale che la conseguente traiettoria perturbata ritorni nello stato di equilibrio desiderato. In effetti, proprio questo è il vero problema della stabilità di un sistema. Per comprendere a pieno questo concetto, si consideri la seguente situazione: supponiamo di avere un generico sistema del 2° ordine e di aver accertato che lo stato $\overline{x}$ sia uno stato di equilibrio per tale sistema. Supponiamo anche di aver trovato che $\overline{x}$ è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile, il che significa, in base alla definizione di asintotica stabilità fino ad ora adottata, che, in presenza di perturbazioni sufficientemente piccole sullo stato iniziale, la traiettoria che parte dal generico stato perturbato x tende comunque ad $\overline{x}$:



Allora, l'aver trovato che $\overline{x}$ è asintoticamente stabile non ci garantisce affatto che, in presenza di perturbazioni di entità qualsiasi sullo stato iniziale, le corrispondenti traiettorie perturbate tendano tutte asintoticamente ad $\overline{x}$ stesso. In altre parole, è possibile che solo le traiettorie perturbate che partono da un punto interno ad una certa curva chiusa Γ tendano asintoticamente ad $\overline{x}$, mentre quelle che partono da un punto esterno si allontanino indefinitamente da $\overline{x}$:



Allora, come detto prima, diventa importante sapere quale è l'entità massima della perturbazione che il sistema può subire affinché la corrispondente traiettoria perturbata tenda asintoticamente allo stato di equilibrio considerato.

Regione di asintotica stabilità

Il problema della "**stabilità in grande**" è essenzialmente basato sulla nozione di "*regione di asintotica stabilità*" di uno stato di equilibrio. Vediamo perciò di che si tratta.

Supponiamo di avere a disposizione un sistema (regolare a dimensioni finite) tempo-invariante, la cui equazione (differenziale vettoriale) di stato è perciò nella forma

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Se $\bar{x}$ è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile che si ottiene in corrispondenza dell'ingresso $\bar{u}$, risulta

$$f(\bar{x},\bar{u}) = 0$$

In corrispondenza dello stesso ingresso $\bar{u}$ e di una perturbazione (di entità qualsiasi) sullo stato iniziale, l'equazione del movimento perturbato del sistema è

$$x(t) = \varphi(t,\tau,x,\bar{u})$$

In base alla definizione di asintotica stabilità fino ad ora adottata, dire che $\bar{x}$ è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile equivale a dire che, in presenza di una perturbazione sufficientemente piccola sullo stato iniziale (che da $\bar{x}$ diventa x), risultino verificate le due condizioni

a) $\|x(t)-\bar{x}\| \le \varepsilon \qquad \forall t \ge \tau$

b) $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t)-\bar{x}\| = 0$

Sussiste allora la seguente definizione:

<u>Def.</u> *Prende il nome di "**regione di asintotica stabilità dello stato di equilibrio** $\bar{x}$" l'insieme di tutti gli stati perturbati $x \in X$ tali che*

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)-\bar{x}\| = 0$$

In termini formali, indicata con $S(\bar{x},\bar{u})$ la suddetta regione di asintotica stabilità, possiamo dunque scrivere che

$$\boxed{S(\bar{x},\bar{u}) = \left\{ x \in X \,\middle|\, \lim_{t\to\infty}\|x(t)-\bar{x}\| = 0 \right\}}$$

In termini concreti, *la regione di asintotica stabilità di uno stato di equilibrio $\bar{x}$ rappresenta l'insieme di tutti quegli stati per i quali passa una traiettoria che tende allo stato $\bar{x}$*

Questo significa che, se la perturbazione su $\bar{x}$ è tale da portare il sistema in uno stato iniziale perturbato contenuto in $S(\bar{x},\bar{u})$, allora l'equilibrio è asintoticamente stabile, visto che la traiettoria perturbata tende asintoticamente a quella nominale (cioè ad $\bar{x}$); viceversa, se la perturbazione è tale che lo stato iniziale perturbato risulti esterno a $S(\bar{x},\bar{u})$, allora l'equilibrio è instabile, visto che la traiettoria perturbata tende ad allontanarsi indefinitamente da quella nominale.

E' chiaro che *diventa importante sapere quanto sia ampia la regione di asintotica stabilità dello stato di equilibrio $\bar{x}$ considerato, in modo da conoscere l'ampiezza massima della perturbazione che l'equilibrio può tollerare, ossia l'ampiezza massima della perturbazione su $\bar{x}$ oltre la quale l'equilibrio diventa instabile.*

<u>La ricerca della dimensione della regione di asintotica stabilità di uno stato di equilibrio prende appunto il nome di "**analisi di stabilità in grande**".</u>

STABILITÀ GLOBALE

Un caso assolutamente particolare è quello in cui, dato lo stato di equilibrio $\bar{x}$ asintoticamente stabile in corrispondenza dell'ingresso $\bar{u}$, risulta $\boxed{S(\bar{x},\bar{u}) = X}$: dire che la regione di asintotica stabilità dello stato di equilibrio $\bar{x}$ coincide con l'intero spazio di stato del sistema significa dire che, in corrispondenza di un qualsiasi stato iniziale (e quindi di una qualsiasi perturbazione sul sistema), l'equilibrio del sistema, in corrispondenza dell'ingresso considerato $\bar{u}$, rimane stabile, ossia che

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t,\tau,x,\bar{u}) = \bar{x} \qquad \forall x \in X$$

Si dice, in questo caso, che $\bar{x}$ è uno "**stato di equilibrio globalmente stabile**".

> N.B. In pratica, dire che uno stato di equilibrio $\bar{x}$ è globalmente stabile significa anche dire che lo stato finale (cioè per $t\to\infty$) del sistema viene a dipendere solo dall'ingresso (che è una delle due cause del movimento), mentre non dipende in alcun modo dallo stato iniziale (che l'altra causa del movimento).

Spesso, nei sistemi fisici, ad ogni ingresso costante corrisponde uno ed un solo stato di equilibrio asintoticamente stabile e, a volte, ciascuno di questi stati di equilibrio risulta essere globalmente stabili: in questi casi, è giustificato parlare di "**sistema globalmente stabile**". Per capirci meglio, la definizione è la seguente:

Def. *Un sistema si dice "**globalmente stabile**" quando, in corrispondenza di ogni ingresso costante, c'è uno ed un solo stato di equilibrio globalmente stabile*

Vi sono casi, però, in cui solo alcuni stati di equilibrio (asintoticamente stabili), tra quelli associati agli ingressi di equilibrio, risultano globalmente stabili e casi ancora più critici in cui la stabilità globale di uno stato di equilibrio dipende dall'associato ingresso, come messo esplicitamente in evidenza dalla notazione $S(\bar{x},\bar{u})$ adottata per indicare la regione di asintotica stabilità. In questi casi, quindi, non si può parlare di stabilità globale del sistema, ma si deve parlare, più semplicemente, di stabilità globale di uno stato di equilibrio associato ad un ben preciso ingresso.

ESEMPIO DI LETOV

Il nostro scopo diventa adesso quello di utilizzare la teoria di Liapunov al fine di determinare (in modo eventualmente approssimato) la regione di asintotica stabilità $S(\bar{x},\bar{u})$ di uno stato di equilibrio $\bar{x}$ asintoticamente stabile. Prima, però, di presentare i risultati più importanti a questo proposito (dovuti, essenzialmente, a *La Salle*), è importante mettere in evidenza il punto fondamentale che differenzia l'analisi della stabilità in grande da quella della stabilità in piccolo, in modo tale che le considerazioni che seguono risultino più semplici.

Per questo consideriamo un sistema autonomo, del secondo ordine, descritto dalla generica equazione (vettoriale differenziale) di stato $\dot{x} = f(x)$. Supponiamo, per semplicità, che questo sistema abbia lo stato nullo come stato di equilibrio, il che significa che $f(0) = 0$.

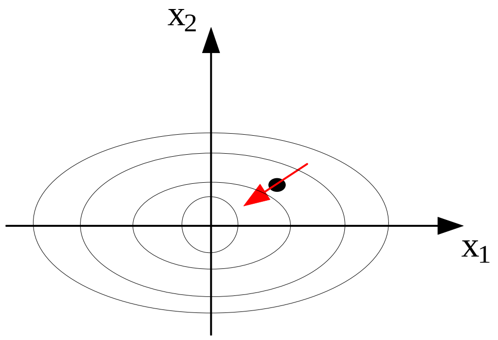
Consideriamo inoltre la funzione $V(x)=\frac{x_1^2}{1+x_1^2}+x_2^2$. Questa funzione si annulla nell'origine ed assume sempre valori positivi, per cui è definita positiva in $\overline{x}=0$. Anzi, il fatto che essa assuma valori positivi in qualunque $x\in X$ consente di dire che V(x) è "*definita positiva in* $\overline{x}=0$ *con riferimento a tutto X*".

Consideriamo allora la funzione

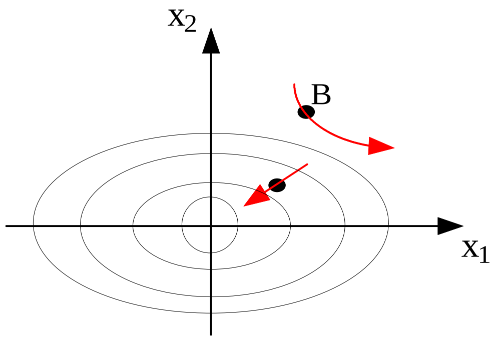
$$\dot{V}(x)=\frac{\partial V(x)}{dx_1}f_1(x)+\frac{\partial V(x)}{dx_2}f_2(x)$$

Facciamo l'ipotesi che l'equazione di stato $\dot{x}=f(x)$ del sistema sia tale che $\dot{V}(x)$ si annulli in $\overline{x}=0$ e assuma sempre valori negativi, il che significa che $\dot{V}(x)$ è "*definita negativa in* $\overline{x}=0$ *con riferimento a tutto X*".

Le condizioni del criterio di asintotica stabilità di Liapunov sono dunque verificate, per cui deduciamo che $\overline{x}=0$ è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema. In termini di traiettorie, ciò significa che le traiettorie partenti da punti sufficientemente vicini all'origine tendono all'origine stessa:



Al contrario, per punti più lontani dall'origine, se la regione di asintotica stabilità ha una estensione limitata (cioè non coincide con tutto X), passano traiettorie che non tendono più all'origine:



Tuttavia, avendo detto che $\dot{V}(x)<0$ per qualsiasi punto $x\in X$ (eccetto l'origine), è chiaro che anche le traiettorie passanti per punti "lontani" dall'origine intersecano curve di livello $V(x)=k$ via via decrescenti. Siamo cioè in una situazione in cui, nonostante la V(x) soddisfi i requisiti del criterio di Liapunov per l'asintotica stabilità in tutti i punti di X, ci sono comunque dei punti, più o meno distanti dall'origine, per i quali passano traiettorie che non tendono all'origine stessa.

Il problema, in questo caso, è rappresentato dal fatto che la funzione V(x) non ha curve di livello tutte chiuse; di conseguenza, tutte le volte che la funzione V(x) presenta le caratteristiche della “**funzione di Letov**” $V(x)=\frac{x_1^2}{1+x_1^2}+x_2^2$ (cioè ha linee di livello non tutte chiuse), le regioni in cui sono verificate le condizioni di asintotica stabilità non sono sempre contenute nella regione di asintotica stabilità (nell’esempio considerato, il punto B non può certamente appartenere alla regione di asintotica stabilità, visto che per esso passa una traiettoria che non tende all’origine).

Al contrario, proprio in base a quanto detto poco fa, è chiaro che *è certamente contenuta nella regione di asintotica stabilità ogni regione dello spazio X che è delimitata da una linea di livello chiusa della funzione* $V(x)$ *e all’interno della quale siano verificate le condizioni di asintotica stabilità del criterio di Liapunov.*

CRITERI DI LA SALLE

Fatte le premesse contenute nell’esempio di Letov, possiamo enunciare il primo importante risultato della teoria della stabilità in grande:

Teorema - *Sia dato il sistema* $\dot{x}=f(x,u)$ *e sia* $\bar{x}\in X$ *uno stato di equilibrio asintoticamente stabile di tale sistema in corrispondenza dell’ingresso* $\bar{u}\in\Omega$. *Sia* $V(\bullet)$ *una funzione continua insieme alle sue derivate parziali. Sia inoltre* Ω_k *una regione che gode delle seguenti proprietà:*

- *è una regione limitata che contiene* $\bar{x}$
- $\forall x\in\Omega_k:\quad V(x)<k$
- $V(\bullet)$ *definita positiva in* $\bar{x}$ *con riferimento a* Ω_k
  (ossia $V(\bar{x})=0$ *e* $V(x)>0\ \ \forall x\in\Omega_k-\{\bar{x}\}$*)*
- $\dot{V}(\bullet)=\frac{dV(\bullet)}{dx}f(\bullet,\bar{u})$ *definita negativa in* $\bar{x}$ *con riferimento a* Ω_k
  (ossia $\dot{V}(\bar{x})=0$ *e* $\dot{V}(x)>0\ \ \forall x\in\Omega_k-\{\bar{x}\}$*)*

Allora, la regione Ω_k *è contenuta nella regione di asintotica stabilità* $S(\bar{x},\bar{u})$

La dimostrazione di questo teorema è esattamente la stessa di quella del criterio di asintotica stabilità di Liapunov, dato che l’ipotesi che la regione Ω_k sia limitata implica che le curve di livello della funzione V siano chiuse.

Per analogia con quanto visto a proposito della stabilità asintotica dell’equilibrio (ci riferiamo al *criterio di Krasowskii*), vale inoltre il seguente risultato, relativo al caso (frequente nelle applicazioni) in cui la funzione $\dot{V}(\bullet)$ risulti semi-definita negativa anziché definita negativa come nel teorema precedente:

Teorema - *Sia dato il sistema* $\dot{x}=f(x,u)$ *e sia* $\overline{x}\in X$ *uno stato di equilibrio asintoticamente stabile di tale sistema in corrispondenza dell'ingresso* $\overline{u}\in\Omega$. *Sia* $V(\bullet)$ *una funzione continua insieme alle sue derivate parziali. Sia inoltre* Ω_k *una regione che gode delle seguenti proprietà:*

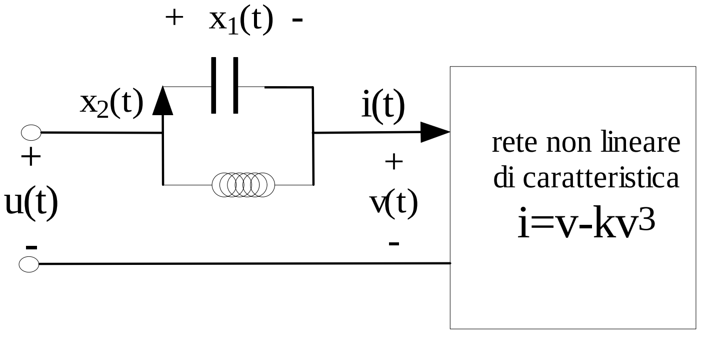
- *è una regione limitata che contiene* $\overline{x}$*;*
- $\forall x\in\Omega_k:\quad V(x)<k$
- $V(\bullet)$ *definita positiva in* $\overline{x}$ *con riferimento a* Ω_k *(ossia* $V(\overline{x})=0$ *e* $V(x)>0\quad\forall x\in\Omega_k-\{\overline{x}\}$*)*
- $\dot{V}(\bullet)=\dfrac{dV(\bullet)}{dx}f(\bullet,\overline{u})$ *semi-definita negativa in* $\overline{x}$ *con riferimento a* Ω_k *(ossia* $\dot{V}(\overline{x})=0$ *e* $\dot{V}(x)>0\quad\forall x\in\Omega_k-\{\overline{x}\}$*)*
- $\dot{V}(\bullet)$ *non identicamente nulla lungo nessuna traiettoria contenuta in* Ω_k *(ad eccezione dello stato di equilibrio* $\overline{x}$*).*

Allora, la regione Ω_k *è contenuta nella regione di asintotica stabilità* $S(\overline{x},\overline{u})$

I due teoremi appena enunciati non permettono, in generale, di determinare la regione di asintotica stabilità $S(\overline{x},\overline{u})$ di uno stato di equilibrio $\overline{x}$, ma solo di stimare per difetto tale regione, visto che la tesi di entrambi è che la regione Ω_k sia contenuta in $S(\overline{x},\overline{u})$. Di conseguenza, l'uso che si fa di questi teoremi nelle applicazioni pratiche è quello di individuare, una volta fissata la funzione V, la più grande regione Ω_k che soddisfi le condizioni di uno dei due teoremi. Per chiarire questo, vediamo subito alcuni esempi concreti.

Esempio

Consideriamo il circuito elettrico non lineare rappresentato in figura:

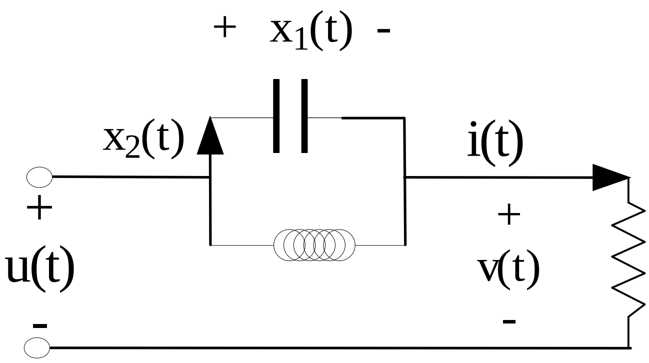


Questo circuito può essere facilmente modellato mediante un sistema tempo-continuo, tempo-invariante, del 2° ordine, la cui equazione (differenziale vettoriale) di stato sia

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{1}{C}\left[u - x_1 - k(u - x_1)^3 - x_2\right] \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{L}x_1 \end{cases}$$

Consideriamo, come ingresso al sistema, l'ingresso nullo $\bar{u} = 0$: è immediato verificare che, in corrispondenza di tale ingresso, il sistema ammette lo stato nullo $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ come stato di equilibrio. Sia usando una funzione di Liapunov sia usando la linearizzazione, è anche possibile verificare che tale stato è di equilibrio asintoticamente stabile. Allora, è interessante chiedersi se questo stato di equilibrio sia globalmente stabile, ossia se la sua regione di asintotica stabilità $S(\bar{x}, \bar{u})$ coincida o meno con lo spazio di stato del sistema; in particolare, nel caso risulti $S(\bar{x}, \bar{u}) \neq X$, è importante determinare delle regioni che facciano parte di $S(\bar{x}, \bar{u})$, al fine di avere una stima, sia pure approssimata, della grandezza di tale regione.

Per prima cosa, possiamo adottare un ragionamento del tutto intuitivo per dimostrare che $S(\bar{x}, \bar{u}) \neq X$. Consideriamo infatti la caratteristica $i = v - kv^3$ della rete non lineare: è chiaro che, per valori sufficientemente piccoli della tensione e della corrente, questa rete si comporta approssimativamente come un bipolo di caratteristica $i = v$, il che significa che il circuito diventa approssimativamente del tipo seguente:



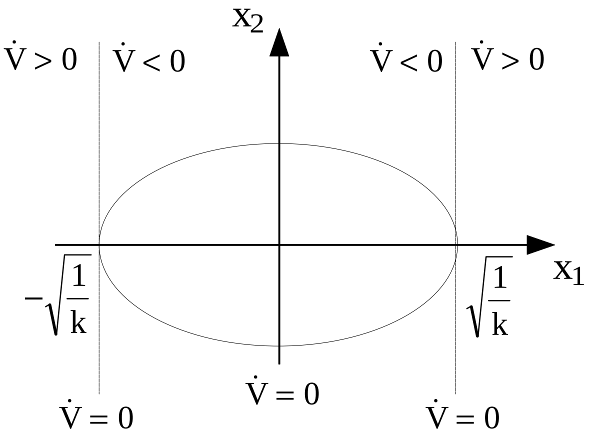
Questo circuito è asintoticamente stabile: infatti, nelle vicinanze dell'origine, la caratteristica del bipolo non lineare è assimilabile a quella di un resistore con resistenza positiva. Al contrario, per valori elevati della tensione e della corrente, i tratti della caratteristica del bipolo non lineare che diventano interessanti sono quelli che si trovano nel secondo a quarto quadrante (k>0), per cui il circuito equivalente è lo stesso di prima, ma con resistenza (non lineare) negativa. E' allora intuitivo pensare che, per stati per i quali $\|x\|$ sia sufficientemente grande, passino traiettorie che si allontanano dall'origine. Per ragioni di continuità, deve perciò esistere una traiettoria chiusa isolata che racchiude la regione di asintotica stabilità dell'origine.

Premesso questo, proviamo a determinare una sottoregione Ω_k di asintotica stabilità dell'origine per mezzo del primo tra i due teoremi enunciati prima.

Consideriamo, come funzione V, la **funzione energia**, ossia $V(x) = \frac{1}{2}Cx_1^2 + \frac{1}{2}Lx_2^2$. Questa funzione è chiaramente definita positiva nell'origine. Si ha inoltre che

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{dx_1} f_1(x) + \frac{\partial V(x)}{dx_2} f_2(x) = \ldots = -x_1^2\left(1 - kx_1^2\right)$$

Questa funzione $\dot{V}(x)$ si annulla in x_1=0 e in $x_1 = \mp\sqrt{\frac{1}{k}}$; inoltre, essa risulta evidentemente negativa nei punti con $|x_1| < \sqrt{\frac{1}{k}}$, mentre risulta positiva nei punti con $|x_1| > \sqrt{\frac{1}{k}}$:



Le curve di livello della funzione V (cioè le intersezioni di questa funzione con piani paralleli al piano di stato) sono delle ellissi aventi centro nell'origine: allora, la più grande linea di livello all'interno della quale sono verificate le condizioni del primo teorema è quella tangente alle rette $x_1 = \mp\sqrt{\frac{1}{k}}$: infatti, ...?

Deduciamo, perciò, che questa curva di livello racchiude una regione certamente contenuta nella regione di asintotica stabilità. Oltre a questo, questa regione rappresenta la migliore stima che si possa effettuare per mezzo della funzione energia. Altre stime possono essere effettuare usando altre funzioni V opportune.

CRITERI PER LA STABILITÀ GLOBALE

L'ultimo aspetto di cui dobbiamo occuparci riguarda i criteri per stabilire se uno stato di equilibrio sia globalmente stabile o meno. Questi criteri possono essere visti come casi limite dei due teoremi enunciati poco fa, ma possono anche essere formulati indipendentemente da tali teoremi, a patto di imporre, in modo opportuno, che le curve di livello della funzione V siano chiuse.

Esistono allora fondamentalmente due modi per esprimere questo fatto. Il primo modo, molto intuitivo dal punto di vista geometrico, consiste nell'imporre che la funzione V sia "radialmente illimitata", ossia tale da soddisfare la proprietà

$$\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$$

Dire che è verificata questa condizione significa infatti dire che, allontanandosi dall'origine in una direzione qualsiasi a partire da punti x con $\|x\|$ sufficientemente elevata, si intersecano curve di livello corrispondenti a valori via via crescente fino ad ∞; è quindi intuitivo che questa condizione sia sufficiente a garantire che le curve di livello siano chiuse.

Un secondo modo consiste invece nell'imporre che il gradiente $\frac{dV}{dx}$ si annulli solo nello stato di equilibrio in esame.

Ad ogni modo, sussiste il seguente "**criterio di globale stabilità di uno stato di equilibrio**":

Teorema - *Sia dato il sistema* $\dot{x} = f(x,u)$ *e sia* $\overline{x} \in X$ *uno stato di equilibrio asintoticamente stabile di tale sistema in corrispondenza dell'ingresso* $\overline{u} \in \Omega$. *Condizione sufficiente affinché* $\overline{x}$ *sia uno stato di equilibrio asintoticamente stabile è che esista una funzione* $V(\bullet)$ *che goda delle seguenti proprietà:*

- $V(\bullet)$ *continua con tutte le sue derivate parziali prime;*
- $V(\bullet)$ *definita positiva in* $\overline{x}$ *con riferimento a tutto X (ossia* $V(\overline{x}) = 0$ *e* $V(x) > 0 \quad \forall x \in X - \{\overline{x}\}$*)*
- $V(\bullet)$ *radialmente illimitata (ossia tale che* $\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$*)*
- $\dot{V}(\bullet) = \dfrac{dV(\bullet)}{dx} f(\bullet, \overline{u})$ *definita negativa in* $\overline{x}$ *con riferimento a tutto X (ossia* $\dot{V}(\overline{x}) = 0$ *e* $\dot{V}(x) > 0 \quad \forall x \in X - \{\overline{x}\}$*)*

Esempio

Consideriamo un sistema non lineare del secondo ordine descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_2^3 + u \end{cases}$$

E' facile verificare che, in corrispondenza dell'ingresso u=0, il sistema presenta l'origine $\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ come unico stato di equilibrio. Al fine di stabilire se si tratti o meno di uno stato di equilibrio asintoticamente stabile, proviamo ad usare la funzione $V(x) = x_1^2 + x_2^2$, che sappiamo essere definita positiva in (0,0) con riferimento a tutto $X=\Re^2$. Se calcoliamo la sua derivata, abbiamo che

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{dx_1} f_1(x) + \frac{\partial V(x)}{dx_2} f_2(x) = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_2^4$$

e questa è evidentemente una funzione definita negativa in (0,0) con riferimento a tutto $X=\Re^2$.

Si osserva inoltre che la funzione V(x) è anche radialmente illimitata: infatti

$$\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = \lim_{\|x\| \to \infty} x_1^2 + x_2^2 = \infty$$

In base al criterio esposto prima, deduciamo che l'origine è uno stato di equilibrio globalmente stabile per il sistema, ossia che la sua regione di asintotica stabilità coincide con $X=\Re^2$.

Una diretta conseguenza di questo teorema vale per i sistemi lineari che siano asintoticamente stabili:

Teorema - *Ogni sistema $\dot{x}=Fx$ asintoticamente stabile è anche globalmente stabile*

Dimostrazione

La dimostrazione di questo teorema è abbastanza semplice. Partiamo dall'ipotesi che il sistema $\dot{x}=Fx$ sia asintoticamente stabile (ricordiamo che questa frase ha senso solo per i sistemi lineari, per i quali la stabilità di un qualsiasi movimento implica la stabilità di tutti i possibili movimenti): applicando il criterio di Liapunov, siamo allora certi che esistano due matrici P e Q, entrambe simmetriche e definite positive, che soddisfano l'equazione di Liapunov

$$F^T P + PF = -Q$$

Allora, usando la matrice P, possiamo costruire la forma quadratica $V(x)=x^T Px$, che risulta sicuramente definita positiva nell'origine con riferimento a tutto X. Inoltre, abbiamo che

$$\lim_{\|x\|\to\infty} V(x) = \lim_{\|x\|\to\infty} x^T Px = \infty$$

per cui V(x) è anche radialmente illimitata. Infine, è facile verificare (è stato già fatto in precedenza in occasione di un'altra dimostrazione) che risulta $\dot{V}(x)=-x^T Qx$, il che significa che $\dot{V}(x)$ è definita negativa nell'origine con riferimento a tutto X. Allora, in base al criterio di stabilità globale prima enunciato, deduciamo che $\dot{x}=Fx$ è globalmente stabile.

Esempio (Appello di Febbraio 1994 - Esercizio 2)

Utilizzando la funzione $V(x)=4x_1^2+x_2^2$, si analizzi, se possibile, la stabilità dell'origine per il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - \dfrac{1}{2}x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2x_1x_2 \end{cases}$$

<u>Risoluzione</u>

Il sistema in esame è un sistema del 2° ordine (avente cioè uno spazio di stato di dimensione 2), non lineare, autonomo (tale cioè che l'ingresso non abbia alcuna influenza sullo stato). L'origine

$\overline{x}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ è evidentemente uno stato di equilibrio per il sistema, in quanto soddisfa le due condizioni $\dot{x}_1=0$ e $\dot{x}_2=0$. Dobbiamo studiare la stabilità di questo stato di equilibrio usando la funzione $V(x)=4x_1^2+x_2^2$: chiaramente si tratta di una funzione definita positiva nell'origine con riferimento a tutto $X=\Re^2$, per cui tutto sta ad analizzare le eventuali proprietà di segno della funzione $\dot{V}(x)$. L'espressione analitica di questa funzione è

$$\dot{V}(x)=\frac{\partial V(x)}{dx_1}f_1(x)+\frac{\partial V(x)}{dx_2}f_2(x)=(8x_1)\left(-x_1-\frac{1}{2}x_2^2\right)+(2x_2)(-x_2+2x_1x_2)=-8x_1^2-2x_2^2$$

e si tratta chiaramente di una funzione definita negativa in (0,0) con riferimento a $X=\Re^2$. Deduciamo che $\overline{x}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema considerato.

Il fatto che $\overline{x}$ sia uno stato di equilibrio asintoticamente stabile ci consente di verificare se ci sia anche la stabilità globale. Possiamo allora utilizzare il primo criterio di La Salle: infatti, avendo trovato che $V(x)$ e $\dot{V}(x)$ sono, rispettivamente, definita positiva e definita negativa in (0,0) con riferimento a tutto $X=\Re^2$ e osservando inoltre che $V(x)$ è radialmente illimitata, deduciamo che $\overline{x}$ è uno stato di equilibrio globalmente stabile, ossia che la regione di asintotica stabilità di $\overline{x}$ coincide con X.

Metodi di determinazione delle funzioni di Lyapunov

INTRODUZIONE

Nei paragrafi precedenti, sia per quanto riguarda la stabilità in piccolo sia quella in grande, si è visto come l'ostacolo principale, ai fini della applicazione dei criteri di stabilità, sia il fatto che non esistono dei metodi sistematici e al tempo stesso efficaci per la determinazione delle funzioni di Liapunov (dove si definisce "*<u>funzione di Liapunov</u>*" una funzione $V(x)$ che sia definita positiva nell'origine e tale che $\dot{V}(x)=\frac{dV(x)}{dx}f(x)$ sia definita negativa sempre nell'origine). La determinazione di queste funzioni è, quindi, spesso basata sulle capacità dell'operatore. Per rimediare, almeno in parte, a questo inconveniente vengono ora presentati alcuni dei metodi più importanti per la determinazione delle funzioni di Liapunov.

Per semplicità, ci riferiremo a sistemi autonomi descritti da una equazione (differenziale vettoriale) di stato del tipo

$$\dot{x}=f(x)$$

Per sistemi di questo tipo, l'origine è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile (cosa che può essere spesso accertata, salvo casi critici, per mezzo del calcolo degli autovalori del sistema linearizzato).

Autore: Sandro Petrizzelli

Il modo più semplice per risolvere il problema è quello di prendere una funzione $V(x)$ che sia definita positiva nell'origine e di verificare successivamente, tramite la relazione $\dot{V}(x)=\frac{dV(x)}{dx}f(x)$, che $\dot{V}(x)$ risulti definita negativa nell'origine. Se questo accade, allora il problema è risolto; se, invece, ciò non accade, allora bisogna modificare $V(x)$ e ripetere la verifica.

E' chiaro che questo modo di procedere non è assolutamente conveniente. Risulta già migliore quest'altro modo di procedere (peraltro già accennato in precedenza): si può fissare, per mezzo dell'introduzione di qualche parametro, una intera famiglia di funzioni $V(x)$ definite positive nell'origine, in modo poi da poter scegliere (tramite i valori opportuni dei parametri) quale di queste funzioni sia tale che $\dot{V}(x)$ risulti definita negativa nell'origine.

USO DELLA EQUAZIONE DI LIAPUNOV

Un altro metodo ancora consiste nel fissare dapprima la funzione $\dot{V}(x)$ e nel ricavare la $V(x)$ per integrazione della relazione $\dot{V}(x)=\frac{dV(x)}{dx}f(x)$ con la condizione al contorno V(0)=0. Questo metodo, apparentemente più complesso di quelli esposti nel paragrafo precedente, è quello usato nel contesto dei sistemi lineari: infatti, possiamo verificare facilmente che il metodo di analisi della stabilità dei sistemi lineari, basato sulla soluzione dell'equazione di Liapunov $F^TP+PF=-Q$, è basato proprio su questa idea.

Per fare questa verifica, enunciamo nuovamente il criterio di stabilità basato sull'equazione di Liapunov:

Teorema - *Sia dato un sistema lineare (libero) rappresentato, in forma di stato, dall'equazione* $\dot{x}(t)=Fx(t)$. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia asintoticamente stabile è che, presa una qualsiasi matrice Q simmetrica e definita positiva, esista una matrice P, anch'essa simmetrica e definita positiva, che soddisfi la seguente equazione:*

$$\boxed{F^TP+PF=-Q}$$

L'applicazione di questo metodo consiste nei seguenti passi:

- per prima cosa si fissa una qualsiasi matrice Q che sia simmetrica e definita positiva (per esempio la matrice identità);

- successivamente, si considera l'equazione di Liapunov $F^TP+PF=-Q$: abbiamo a suo tempo visto che essa rappresenta un sistema di $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni in n^2 incognite (che sono gli elementi della matrice P);

- bisogna verificare se il sistema rappresentato dall'equazione di Liapunov ammette soluzione o meno: se il sistema NON ammette soluzione, ossia non è possibile trovare una matrice P che lo soddisfi, allora si può immediatamente concludere che il sistema $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$ non è asintoticamente stabile; al contrario, se il sistema ammette una soluzione, ossia se esiste una matrice P che lo soddisfa, allora bisogna verificare se P sia definita positiva o meno (per esempio mediante il "*test di Sylester*" o un qualsiasi altro criterio analogo); se P è definita positiva, allora il sistema è asintoticamente stabile, mentre, se P non è definita positiva, allora il sistema non è asintoticamente stabile.

Allora, fissare la matrice Q significa fissare la funzione $\dot{V}(x) = -x^T Qx$ definita negativa nell'origine, mentre risolvere l'equazione di Liapunov, al fine di determinare la matrice P, significa integrare la relazione $\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dx} f(x)$.

E' chiaro che, nel caso il sistema sia non lineare, l'operazione di integrazione risulta senz'altro più complessa rispetto al caso lineare. Tuttavia, possiamo far vedere che è possibile sfruttare ancora una volta il sistema linearizzato al fine di determinare una funzione di Liapunov per il sistema non lineare.

Sia dunque $\dot{x} = f(x)$ il sistema non lineare in esame. Per questo sistema l'origine è uno stato di equilibrio e facciamo l'ipotesi che si tratti di uno stato di equilibrio asintoticamente stabile. Il corrispondente sistema linearizzato è $\dot{z} = Fz$, dove ricordiamo che $F = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\bar{x}, \bar{u}}$; facciamo l'ipotesi che tale sistema risulti a sua volta asintoticamente stabile (cosa che, in base a quanto visto a suo tempo, non è necessariamente verificata). Fissata una qualsiasi matrice Q simmetrica e definita positiva, in base al criterio di Liapunov prima richiamato, siamo certi che esiste almeno una matrice P simmetrica e definita positiva tale che

$$F^T P + PF = -Q$$

Di conseguenza, la funzione $V(z) = z^T Pz$, cui corrisponde $\dot{V}(z) = -z^T Qz$, è una funzione di Liapunov per il sistema linearizzato (basta andare a rivedere la dimostrazione del criterio di Liapunov prima richiamato). Ma questa stessa funzione $V(\bullet)$ risulta essere una funzione di Liapunov anche per il sistema non lineare $\dot{x} = f(x)$, in quanto, nell'intorno dell'origine, la funzione $\dot{V}(\bullet)$ risulta essere uguale, a meno di infinitesimi di ordine superiore, a $-z^T Qz$, che è , per ipotesi, definita negativa.

In conclusione, abbiamo mostrato che, *dato il sistema non lineare* $\dot{x} = f(x)$ *e dato il corrispondente sistema linearizzato, una funzione di Liapunov per quest'ultimo, ottenuta tramite l'equazione di Liapunov, è, a meno di infinitesimi di ordine superiore, una funzione di Liapunov anche per* $\dot{x} = f(x)$.

Tra l'altro, quanto detto prima implica che esista una regione S entro la quale sono verificate le condizioni del 1° criterio di La Salle: questa regione S è dunque contenuta nella regione di asintotica stabilità dell'origine. Allora, ripetendo il procedimento varie volte, per differenti matrici Q_k, si possono determinare diverse regioni S_k utili per approssimare meglio la regione di asintotica stabilità per mezzo della regione $\Omega = \bigcup_k S_k$

METODO DEL GRADIENTE

Vediamo adesso in cosa consiste il cosiddetto "**metodo del gradiente**" per la determinazione di una funzione di Liapunov.

Il presupposto fondamentale di questo metodo è quello che, anziché fissare inizialmente la funzione $V(x)$ o la funzione $\dot{V}(x)$, viene fissato, come dato di partenza, il gradiente

$$\frac{dV}{dx}(\bullet)=\begin{bmatrix}\frac{\partial V}{\partial x_1}(\bullet) & \frac{\partial V}{\partial x_2}(\bullet) & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_n}(\bullet)\end{bmatrix}$$

Questo gradiente viene fissato introducendo alcuni parametri che, in pratica, servono a fissare una famiglia di gradienti.

Si procede poi a considerare a ricavare $V(x)$ per integrazione e $\dot{V}(x)$ per mezzo della solita relazione $\dot{V}(x)=\frac{dV(x)}{dx}f(x)$.

Infine, i parametri che individuano la famiglia di funzioni $\frac{dV}{dx}(\bullet)$ vengono scelti in modo tale che $V(x)$ risulti definita positiva e che $\dot{V}(x)$ risulti definita negativa.

Naturalmente, nel fissare la funzione $\frac{dV}{dx}(\bullet)$, si deve tenere presente che un qualsiasi vettore (riga) di funzioni non necessariamente è il gradiente di uno scalare. Poiché le componenti di un gradiente sono delle derivate parziali prime, le loro derivate devono soddisfare il noto "*teorema di Schwarz*", in base al quale deve risultare

$$\frac{d^2V}{dx_i dx_j}=\frac{d^2V}{dx_j dx_i}$$

e proprio questa relazione può essere utilizzata per fissare i parametri di cui sopra.

Esempio

Consideriamo il sistema autonomo

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_1^3-x_2\end{cases}$$

Questo sistema, evidentemente non lineare, ha lo stato nullo come unico stato di equilibrio. Per sapere se questo stato di equilibrio è asintoticamente stabile, la linearizzazione non fornisce alcuna indicazione: infatti, la matrice di stato del sistema linearizzato risulta essere

$$F=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{\bar{x}\\ \bar{u}}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{\bar{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3x_1^2 & -1\end{bmatrix}_{\bar{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

e la presenza di due autovalori, di cui uno nullo, indica che il sistema linearizzato non è asintoticamente stabile. Siamo allora "costretti" ad applicare il criterio di Liapunov direttamente al sistema non lineare di partenza, per cui abbiamo bisogno di individuare una funzione di Liapunov. Per fare questo, fissiamo l'attenzione sulla seguente famiglia di funzioni $\frac{dV}{dx}(\bullet)$ candidate ad essere il gradiente della funzione di Liapunov ricercata:

$$\frac{dV}{dx}(\bullet) = \left[a(\bullet,\bullet)x_1 + b(\bullet,\bullet)x_2 , c(\bullet,\bullet)x_1 + d(\bullet,\bullet)x_1\right]$$

dove $a(\bullet,\bullet), b(\bullet,\bullet), c(\bullet,\bullet), d(\bullet,\bullet)$ sono funzioni (dello stato) da determinare in modo opportuno. Per esempio, le possiamo determinare imponendo la condizione di Schwarz

$$\frac{d^2V}{dx_i dx_j} = \frac{d^2V}{dx_j dx_i}$$

Nel nostro caso, questa condizione si traduce nella relazione

$$\frac{\partial a}{\partial x_2}x_1 + b + b\frac{\partial b}{\partial x_2}x_2 = c + \frac{\partial c}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial d}{\partial x_1}x_2$$

Adesso, la funzione $\dot{V}(x)$ risulta data da

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dx}f(x) = \frac{dV(x)}{dx_1}f_1(x) + \frac{dV(x)}{dx_2}f_2(x) = (ax_1 + bx_2)x_2 + +(cx_1 + dx_2)\left(-x_2 - x_1^3\right) = \ldots. =$$
$$= -cx_1^4 + (b-d)x_2^2 + \left(a - c - dx_1^2\right)x_1x_2$$

Dobbiamo imporre che questa funzione sia definita negativa nell'origine: è evidente che si annulla nell'origine, per cui dobbiamo imporre che assuma valori negativi. Possiamo ad esempio imporre che

$$\begin{cases} -c < 0 \\ b - d < 0 \\ a - c - dx_1^2 = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} c > 0 \\ b < d \\ a - c = dx_1^2 \end{cases}$$

Possiamo allora prendere le funzioni $b(\bullet,\bullet), c(\bullet,\bullet), d(\bullet,\bullet)$ pari a delle costanti che soddisfino le prime due condizioni e possiamo inoltre prendere $a(x_1, x_2) = c + dx_1^2$. Con questi vincoli, la funzione è

$$\dot{V}(x) = -cx_1^4 + (b-d)x_2^2 + \left(a - c - dx_1^2\right)x_1x_2$$

e siamo certi che sia definita negativa nell'origine.

A questo punto, con queste posizioni, torniamo alla condizione di Schwarz: avendo preso $b(\bullet,\bullet), c(\bullet,\bullet), d(\bullet,\bullet)$ costanti (per cui le rispettive derivate parziali sono nulle), la condizione diventa semplicemente

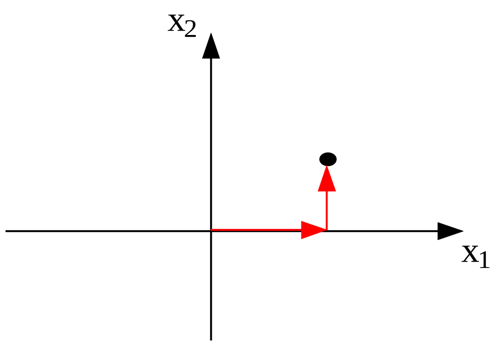
$$\frac{\partial a}{\partial x_2} x_1 + b = c$$

Avendo inoltre preso $a(x_1, x_2) = c + dx_1^2$, risulta evidentemente $\frac{\partial a}{\partial x_2} = 0$, per cui la condizione si riduce a $b = c$. Questo nuovo vincolo non contraddice quelli imposti precedentemente, per cui possiamo proseguire.

L'ultima cosa da fare è ricavare V(x) e verificare che sia definita positiva nell'origine. Per ottenere V(x) dobbiamo integrare la relazione $\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dx} f(x)$ con la condizione al contorno V(0)=0:

$$V(x) = \int_0^x \dot{V}(\xi) d\xi$$

L'integrale che compare in questa relazione è un integrale curvilineo, per risolvere il quale è necessario scegliere un qualsiasi cammino che congiunga l'origine con il generico stato x. Possiamo allora scegliere il cammino indicato nella figura seguente:



Abbiamo cioè costruito un cammino costituito da due segmenti, descritti, rispettivamente, dalle equazioni

$$S_1 \begin{cases} \xi_1 \in [0, x_1] \\ \xi_2 = 0 \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} \xi_1 = x_1 \\ \xi_2 \in [0, x_2] \end{cases}$$

Così facendo, possiamo scrivere che

$$V(x) = \int_0^x \dot{V}(\xi) d\xi = \int_0^x \left(\frac{dV}{dx_1} d\xi_1 + \frac{dV}{dx_2} d\xi_2 \right) = \int_{[x_1,0]} \left(\frac{dV}{dx_1} d\xi_1 + \frac{dV}{dx_2} d\xi_2 \right) + \int_{[x_1,x_2]} \left(\frac{dV}{dx_1} d\xi_1 + \frac{dV}{dx_2} d\xi_2 \right) =$$

$$= \int_{[x_1,0]} \frac{dV}{dx_1} d\xi_1 + \underbrace{\int_{[x_1,0]} \frac{dV}{dx_2} d\xi_2}_{=0} + \underbrace{\int_{[x_1,x_2]} \frac{dV}{dx_1} d\xi_1}_{=0} + \int_{[x_1,x_2]} \frac{dV}{dx_2} d\xi_2$$

Il 2° ed il 3° integrale sono nulli in quanto non ci sono variazioni, rispettivamente, di ξ_2 lungo il primo segmento di integrazione e di ξ_1 lungo il secondo segmento. Abbiamo perciò che

$$V(x) = \int_{[x_1,0]} \frac{dV}{dx_1} d\xi_1 + \int_{[x_1,x_2]} \frac{dV}{dx_2} d\xi_2 = \int_0^{x_1} \left.\frac{dV}{dx_1}\right|_{[\xi_1,0]} d\xi_1 + \int_0^{x_2} \left.\frac{dV}{dx_2}\right|_{[x_1,\xi_2]} d\xi_2 =$$

$$= \int_0^{x_1} \left.(ax_1 + bx_2)\right|_{[\xi_1,0]} d\xi_1 + \int_0^{x_2} \left.(cx_1 + dx_2)\right|_{[x_1,\xi_2]} d\xi_2 = \int_0^{x_1} a\xi_1 d\xi_1 + \int_0^{x_2} cx_1 + d\xi_2 d\xi_2$$

D'altra parte, avevamo detto che $a(x_1, x_2) = c + dx_1^2$, per cui

$$V(x) = \int_0^{x_1} \underbrace{\left(c + d\xi_1^2\right)}_{a}\xi_1 d\xi_1 + \int_0^{x_2} cx_1 + d\xi_2 d\xi_2 = \ldots = \frac{c}{2}x_1^2 + \frac{d}{4}x_1^4 + cx_1x_2 + \frac{d}{2}x_2^2$$

Abbiamo dunque ottenuto l'espressione analitica di V(x). Resta da stabilire se si tratti o meno di una funzione definita positiva. Se trascuriamo il termine $\frac{d}{4}x_1^4$, che è un infinitesimo di almeno 2 ordini superiori agli altri termini, possiamo ritenere che

$$V(x) \cong \frac{c}{2}x_1^2 + cx_1x_2 + \frac{d}{2}x_2^2$$

e questa funzione è la forma quadratica della matrice

$$A = \begin{bmatrix} \frac{c}{2} & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & \frac{d}{2} \end{bmatrix}$$

Allora, V(x) è definita positiva in x=0 se e solo se la matrice A risulta essere definita positiva. Per verificare questo, usiamo il test di Sylvester: avendo supposto in precedenza che c>0, dobbiamo solo verificare se sia positivo o meno il determinante di A: risulta

$$\det A = \frac{cd}{4} - \frac{c^2}{4}$$

e da qui deduciamo che $\det A > 0$ se e solo se d>c. Ma questo è proprio uno tra i vincoli imposti in precedenza, per cui deduciamo che A è definita positiva.

La conclusione di tutto il discorso è che abbiamo trovato una funzione di Liapunov per il sistema considerato, il quale, quindi, presenta nell'origine uno stato di equilibrio asintoticamente stabile.

Possiamo anche osservare una cosa in più: se prendiamo ad esempio

$$\begin{cases} c = 1 \\ b = 1 \\ d = 2 \end{cases}$$

otteniamo

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1^4 + x_1x_2 + x_2^2$$

Questa funzione, oltre ad essere definita positiva in (0,0) con riferimento a tutto $X=\Re^2$, oltre ad essere tale che $\dot{V}(x)$ sia definita negativa in (0,0) con riferimento a tutto X^2, gode anche della proprietà di essere "*radialmente illimitata*": è evidente infatti che

$$\lim_{\|x\|\to\infty} V(x) = \lim_{\|x\|\to\infty} \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1^4 + x_1x_2 + x_2^2 = \infty$$

Allora, in base al criterio di La Salle, possiamo dedurre che l'origine è anche uno stato di equilibrio globalmente stabile per il sistema, ossia uno stato di equilibrio asintoticamente stabile la cui regione di asintotica stabilità coincide con tutto lo spazio di stato $X=\Re^2$.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1