“Teoria dei sistemi” - Capitolo 8

Raggiungibilità e controllabilità (1°)

INTRODUZIONE

Da questo punto in poi ci occupiamo nel dettaglio dei problemi della raggiungibilità e della controllabilità di un sistema, già anticipati in precedenza. E’ subito opportuno fare un confronto con il problema della stabilità studiato fino ad ora: infatti, mentre nell’analisi della stabilità del movimento la funzione di ingresso $u(\bullet)$ è sempre fissata, i risultati che presenteremo adesso mettono a fuoco le possibilità di azione che un operatore può avere su un sistema qualora egli possa scegliere a proprio piacimento la funzione $u(\bullet)$.

Detto sinteticamente, il problema della controllabilità è legato alla possibilità di trasferire lo stato di un sistema ad uno stato desiderato e prefissato che prende il nome di “stato zero” o “**stato nullo**”; al contrario, il problema della raggiungibilità riguarda la possibilità di raggiungere qualsiasi stato (tra quelli permessi) partendo da uno stato prefissato che è proprio lo “**stato nullo**”. In generale, diciamo subito che *le proprietà di raggiungibilità e controllabilità sono scorrelate tra loro, nel senso che non necessariamente una implica l’altra.*

Tuttavia, vedremo che, per un sistema lineare e tempo-invariante, ogni stato raggiungibile dallo stato zero è anche controllabile allo stato zero: ciò significa che, se esiste almeno una funzione di ingresso $u'(\bullet)$ che trasferisce il sistema dallo stato zero ad un certo stato x, allora esisterà anche una funzione di ingresso $u''(\bullet)$ che sia in grado di riportare il sistema dallo stato x allo stato zero. Inoltre, per questi sistemi (oltre che per particolari sistemi discreti che prendono il nome di “*sistemi a dati campionati*”) vale anche la proprietà inversa, ossia il fatto per cui ogni stato controllabile allo stato zero è anche raggiungibile dallo stato zero: possiamo perciò affermare che, per questi sistemi, l'insieme degli stati controllabili coincide con quello degli stati raggiungibili.

PRINCIPALI DEFINIZIONI SULLA "CONTROLLABILITÀ"

Nei prossimi paragrafi introdurremo le principali definizioni di "controllabilità" e di "raggiungibilità", valide, in generale, per un "sistema dinamico". E' importante fare una precisazione iniziale: queste definizioni fanno riferimento alla nozione già introdotta di "*stato zero*", convenzionalmente indicato con x=0; questa scrittura non deve far pensare che tali definizioni non valgano nel caso in cui l'insieme di stato non sia algebricamente strutturato: in questi casi, lo stato 0 è semplicemente un elemento particolare dell'insieme di stato X, assunto come riferimento e chiamato perciò, per semplicità, "*stato zero*".

Come detto all'inizio, i problemi della controllabilità e della raggiungibilità di un sistema vertono sulla possibilità di agire sull'ingresso operante sul sistema in modo che esso, partendo dallo stato x_1 in cui si trova, si porti in uno stato x_2 prefissato; nel caso in cui lo stato di arrivo sia lo stato 0 (mentre lo stato di partenza può essere qualsiasi) il problema è quello della "controllabilità":

Def. *Dato un sistema dinamico, uno suo stato* $x \in X$ *è "**controllabile nell'intervallo*** $[\tau, t]$*", con t<t, se esiste una funzione di ingresso* $u(\bullet) \in \Omega$ *tale che*

$$\varphi(t, \tau, x, u(\bullet)) = 0$$

Quindi, fissato l'istante iniziale τ e lo stato iniziale x, noi diciamo che questo stato x è controllabile nell'intervallo [τ,t] se è possibile trovare almeno una funzione di ingresso che porti il sistema nello stato nullo in corrispondenza dell'istante t.

E' abbastanza logico porsi, a proposito di questa definizione, la domanda seguente: fissati gli istanti τ e t, quali stati del sistema sono controllabili nell'intervallo [τ,t] ? Vedremo in seguito come si fa a determinare tali stati; per il momento ci limitiamo a dire che l'insieme degli stati $x \in X$ controllabili nell'intervallo [τ,t] si indica generalmente con $X_C(\tau, t)$ e prende il nome di "**insieme di controllabilità nell'intervallo [τ,t]**": in termini formali, possiamo scrivere che

$$\boxed{X_C(\tau, t) = \left\{ x \in X \;\middle|\; \exists u(\bullet) \in \Omega \text{ tale che } \varphi(t, \tau, x, u(\bullet)) = 0 \right\}}$$

Un'altra domanda che possiamo porci è la seguente: fissato lo stato iniziale $x \in X$ e fissato l'istante iniziale τ, esiste un istante t>τ per cui $x \in X_C(\tau, t)$? Ci chiediamo cioè se lo stato x sia controllabile in un intervallo [τ,t] con t qualsiasi: in pratica, mentre prima avevamo fissato x,τ e t, e ricercavamo una opportuna funzione di ingresso $u(\bullet) \in \Omega$, in questo caso abbiamo fissato solo x e τ e cerchiamo t e $u(\bullet) \in \Omega$. Se esistono almeno un istante t ed una corrispondente funzione di ingresso tali che $x \in X_C(\tau, t)$, diciamo che lo stato x è "**controllabile dall'istante τ**". L'insieme degli stati controllabili da un certo istante τ si indica generalmente con $X_C(\tau)$ e prende il nome di "**insieme di controllabilità dall'istante τ**": in termini formali, possiamo scrivere che

$$\boxed{X_C(\tau) = \left\{ x \in X \;\middle|\; \exists \begin{matrix} t > \tau \\ u(\bullet) \in \Omega \end{matrix} \text{ tali che } \varphi(t, \tau, x, u(\bullet)) = 0 \right\}}$$

L'insieme $X_C(\tau)$ racchiude dunque tutti gli stati che sono controllabili a partire dall'istante τ in un intervallo di tempo non meglio specificato. Proprio in conseguenza di questo, è ovvio che sussista la relazione

$$X_C(\tau) = \bigcup_{t \geq \tau} X_C(\tau, t)$$

Un caso particolare si ha quando tutti quanti gli stati del sistema sono controllabili dall'istante τ, ossia quando $X_C(\tau) = X$: quando questo accade, si dice che "**il sistema è controllabile dall'istante τ**". Un caso ancora più particolare si ha quando non ci sono vincoli sull'istante iniziale τ, ossia quando tutti gli stati del sistema sono controllabili a prescindere dall'istante iniziale: in questo caso, si dice che "**il sistema è (completamente) controllabile**". A proposito di questo, appare ovvia una considerazione a proposito dei sistemi tempo-invarianti: infatti, se si trova almeno un istante τ in corrispondenza del quale il sistema risulti controllabile, allora il sistema sarà controllabile da qualsiasi τ (data proprio la tempo-invarianza), ossia sarà (completamente) controllabile.

PRINCIPALI DEFINIZIONI SULLA "RAGGIUNGIBILITÀ"

Definizioni e osservazioni del tutto analoghe a quelle viste per la controllabilità valgono per il problema della raggiungibilità, che riguarda la possibilità di agire sull'ingresso operante sul sistema in modo che esso, partendo dallo stato nullo, si porti in uno stato x prefissato:

Def. *Dato un sistema dinamico, uno stato $x \in X$ di tale sistema è "**raggiungibile nell'intervallo** $[\tau, t]$", con t<t, se esiste una funzione di ingresso $u(\bullet) \in \Omega$ tale che*

$$\varphi(t, \tau, 0, u(\bullet)) = x$$

Quindi, fissato l'istante iniziale τ, noi diciamo che uno stato $x \in X$ è raggiungibile nell'intervallo [τ,t] se è possibile trovare almeno una funzione di ingresso che porti il sistema in tale stato, partendo dallo stato nullo, in corrispondenza dell'istante t.

Anche qui, possiamo porci, a proposito di questa definizione, la domanda seguente: fissati gli istanti τ e t, quali stati del sistema sono raggiungibili nell'intervallo [τ,t] ? La determinazione di tali stati sarà studiata più avanti, per cui ci limitiamo a dire che l'insieme degli stati $x \in X$ raggiungibili nell'intervallo [τ,t] si indica generalmente con $X_r(\tau, t)$ e prende il nome di "**insieme di raggiungibilità nell'intervallo [τ,t]**": in termini formali, possiamo scrivere che

$$\boxed{X_r(\tau, t) = \left\{ x \in X \mid \exists u(\bullet) \in \Omega \text{ tale che } \varphi(t, \tau, 0, u(\bullet)) = x \right\}}$$

Possiamo anche chiederci se, fissato lo stato $x \in X$ di arrivo e fissato l'istante di arrivo esiste un istante τ<t per cui $x \in X_r(\tau, t)$, ossia ci chiediamo se lo stato x sia raggiungibile in un intervallo [τ,t] con t fissato e τ qualsiasi. Se esistono almeno un istante τ ed una corrispondente funzione di ingresso tali che $x \in X_r(\tau, t)$, diciamo che lo stato x è "**raggiungibile all'istante t**". L'insieme degli stati raggiungibili in un certo istante t si indica generalmente con $X_r(t)$ e prende il nome di "**insieme di raggiungibilità all'istante t**": in termini formali, possiamo scrivere che

$$\boxed{X_R(\tau) = \left\{ x \in X \;\middle|\; \exists_{u(\bullet)\in\Omega}^{\tau<t} \text{ tali che } \varphi(t,\tau,0,u(\bullet)) = x \right\}}$$

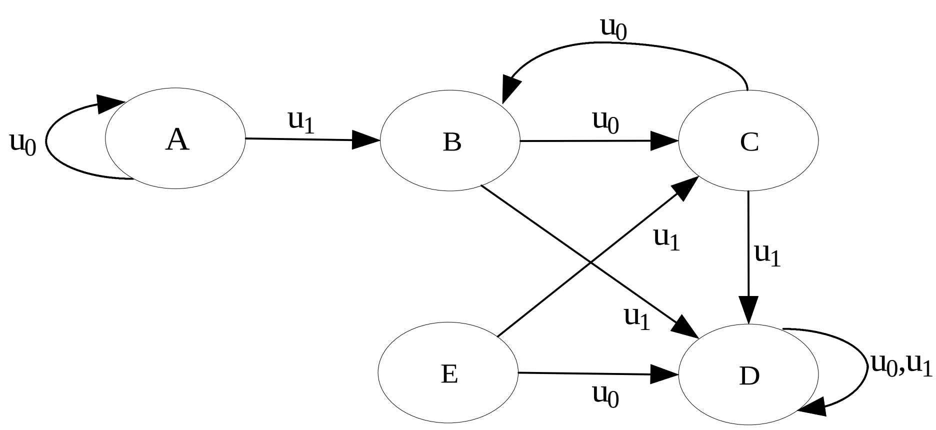
L'insieme $X_r(t)$ racchiude dunque tutti gli stati che sono raggiungibili nell'istante t (non specificato) partendo da un istante iniziale τ fissato. Proprio in conseguenza di questo, è ovvio che sussista la relazione

$$X_r(\tau) = \bigcup_{\tau \le t} X_r(\tau, t)$$

Un caso particolare si ha quando tutti quanti gli stati del sistema sono raggiungibili nell'istante t fissato, ossia quando $X_r(t) =$: quando questo accade, si dice che "**il sistema è raggiungibile all'istante t**". Un caso ancora più particolare si ha quando non ci sono vincoli sull'istante di arrivo t, ossia quando tutti gli stati del sistema sono raggiungibili a prescindere dall'istante in cui li si vuole raggiungere: in questo caso, si dice che "**il sistema è (completamente) raggiungibile**". Anche qui vale la considerazione sui sistemi tempo-invarianti fatta a proposito della controllabilità: se si trova almeno un istante t in corrispondenza del quale il sistema risulti raggiungibile, allora il sistema sarà raggiungibile in un qualsiasi t (data proprio la tempo-invarianza), ossia sarà (completamente) raggiungibile.

Esempio

Supponiamo di avere il nostro sistema e di aver individuato l'insieme $X_r(\tau, t)$, ossia l'insieme di tutti gli stati che possono essere raggiunti nell'istante t partendo dallo stato nullo nell'istante τ: nel caso in cui il sistema sia tempo-invariante, è chiaro che $X_r(\tau, t)$ non dipenderà da τ e t in modo assoluto, ma solo dalla differenza t-τ. Una percezione immediata di questa proprietà si ha se consideriamo un automa, che, per definizione, è un sistema tempo-invariante. Supponiamo che l'insieme di stato sia $X = \{A, B, C, D, E\}$, dove A è lo stato che prendiamo come riferimento (cioè come stato 0), e supponiamo che l'insieme dei valori di ingresso sia $U\{u_0, u_1\}$; supponiamo infine che il grafo di transizione dell'automa sia il seguente:



Consideriamo un istante iniziale τ generico e valutiamo $X_r(\tau, t)$ in corrispondenza di alcuni istanti t particolari:

- il primo caso che consideriamo è quello in cui t=τ: partendo dallo stato di riferimento A all'istante τ, l'unico stato che può essere raggiunto all'istante t=τ (cioè in 0 passi) è proprio A, per cui $X_r(\tau,\tau) = A$;

- consideriamo adesso t=τ+1: partendo da A all'istante τ, in 1 passo il sistema può sia rimanere in A (se l'ingresso vale u_0) sia andare in B (se l'ingresso vale u_1), per cui $X_r(\tau,\tau+1) = \{A,B\}$;

- prendiamo t=τ+2: partendo da A all'istante τ, in 2 passi il sistema può rimanere in A (se la sequenza di ingresso è u_0,u_0) oppure andare in B (se l'ingresso è u_0,u_1) oppure andare in C (se l'ingresso è u_1,u_1) o infine andare in D (se l'ingresso è u_1,u_0), per cui $X_r(\tau,\tau+2) = \{A,B,C,D\}$;

- adesso consideriamo t=τ+3: si osserva facilmente che $X_r(\tau,\tau+3) = \{A,B,C,D\} = X_r(\tau,\tau+2)$ ed è anche facile verificare che $\forall t \ge \tau+2 \ : \ X_r(\tau,t) = \{A,B,C,D\}$.

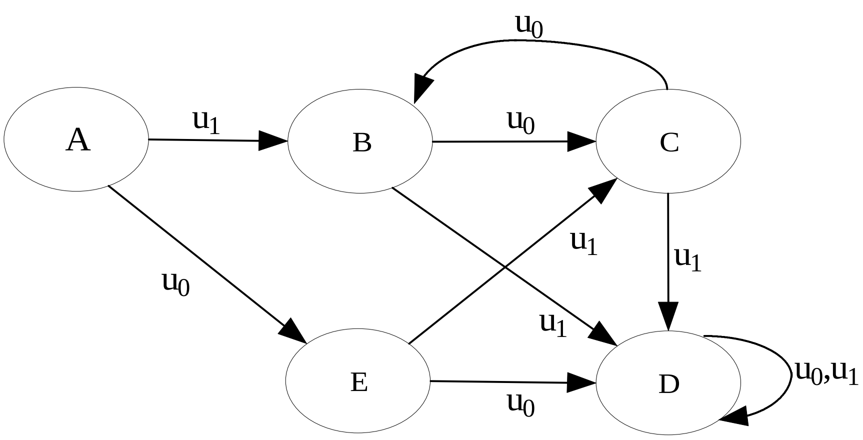
In conclusione, se si considera un qualsiasi istante t a partire da τ+2, tutti gli stati del sistema, fatta eccezione per lo stato E, sono raggiungibili partendo dallo stato di riferimento A: possiamo dunque scrivere che l'insieme di raggiungibilità è

$$X_r = \{A,B,C,D\} = X_r(t)$$

PROPRIETÀ DI INCLUSIONE

Dato il nostro generico sistema dinamico, supponiamo di aver fissato l'istante iniziale τ; fissato inoltre un certo istante $t_1>\tau$, supponiamo di aver individuato l'insieme $X_r(\tau,t_1)$ di tutti gli stati che possono essere raggiunti nell'istante t_1 partendo dallo stato nullo nell'istante τ. Adesso consideriamo un altro istante $t_2>t_1$ e supponiamo di individuare l'insieme $X_r(\tau,t_2)$: ci chiediamo, allora, se esista o meno un qualche legame tra gli insiemi $X_r(\tau,t_1)$ e $X_r(\tau,t_2)$; per esempio, a livello intuitivo, possiamo aspettarci che, se cresce l'intervallo di osservazione, aumenti il numero di stati raggiungibili dal sistema, il che significherebbe, in formule, che $X_r(\tau,t_1) \subseteq X_r(\tau,t_2)$.

Se consideriamo l'automa visto nell'esempio precedente, ci accorgiamo che, effettivamente, la relazione $X_r(\tau,t_1) \subseteq X_r(\tau,t_2)$ è verificata, per cui vogliamo verificare se si tratta di una proprietà generale o meno. Per fare questa verifica, consideriamo un automa solo leggermente diverso rispetto al precedente:



L'unica differenza, con l'altro automa, è nel fatto che, partendo da A, se l'ingresso vale u_0 non si rimane più in A, ma si passa in E. Facciamo allora la stessa analisi fatta prima per determinare $X_r(\tau,t)$:

- chiaramente, si ha sempre che $X_r(\tau,\tau)=A$;
- se $t=\tau+1$, invece, gli stati raggiungibili sono B (se l'ingresso vale u_1) ed E (se l'ingresso vale u_0), per cui $X_r(\tau,\tau+1)=\{B,E\}$;
- ora prendiamo $t=\tau+2$: partendo da A all'istante τ, in 2 passi il sistema può andare solo in C e in D per cui $X_r(\tau,\tau+2)=\{C,D\}$;

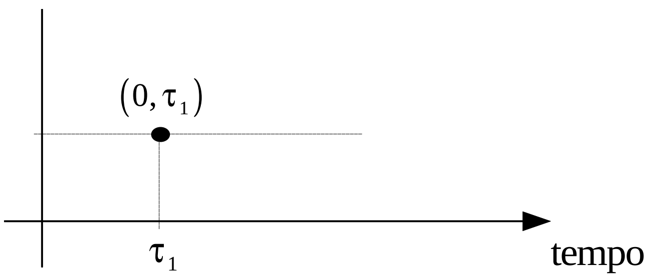
Ci accorgiamo subito, quindi, che $X_r(\tau,\tau+1)$ non è contenuto in $X_r(\tau,\tau+2)$, per cui la proprietà $X_r(\tau,t_1)\subseteq X_r(\tau,t_2)$ evidentemente non vale. Il motivo è chiaramente nel fatto che lo stato di riferimento A, in questo secondo automa, non è più uno stato di equilibrio per il sistema. Vediamo allora di generalizzare il discorso.

Intanto, dobbiamo introdurre una proprietà relativa all'insieme Ω delle funzioni di ingresso ammissibili per il sistema: supponiamo di avere due funzioni di ingresso $u_1(\bullet)\in\Omega$ e $u_2(\bullet)\in\Omega$ e supponiamo di considerare la nuova funzione

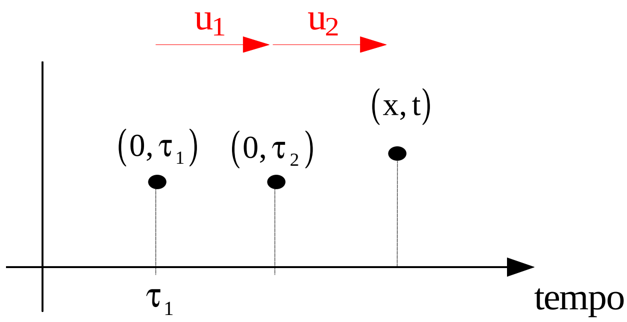
$$u(\bullet)=\begin{cases} u_1(\bullet) & [\tau_1,\tau_2[\\ u_2(\bullet) & [\tau_2,\tau_3[\end{cases}$$

Diremo allora che vale la "**proprietà di concatenazione degli ingressi**" se risulta $u(\bullet)\in\Omega$, ossia, appunto, se la concatenazione di due ingressi ammissibili rappresenta a sua volta un ingresso ammissibile.

Premesso questo, facciamo il seguente discorso: fissato un certo istante iniziale τ_1, supponiamo che il sistema sia nello stato 0 in tale istante; supponiamo inoltre che lo stato 0 sia uno stato di equilibrio per il sistema, il che significa che esiste almeno una funzione di ingresso ammissibile che mantiene il sistema invariabilmente in tale stato; indichiamo con $u_1(\bullet)\in\Omega$ tale funzione:



Adesso consideriamo un generico istante $\tau_2>\tau_1$: in questo istante, se l'ingresso operante è ancora $u_1(\bullet)$, il sistema si trova sempre nello stato 0; supponiamo, allora, di applicare, a partire da τ_2, un ingresso $u_2(\bullet)\in\Omega$ tale che il sistema, in un certo istante $t>\tau_2$, si porti nello stato x:



Dalla figura si intuisce che lo stato x è raggiungibile nell'intervallo $[\tau_2, t]$, mediante l'applicazione della funzione di ingresso $u_2(\bullet)$, ed anche nell'intervallo $[\tau_1, t]$, mediante l'applicazione della funzione di ingresso ottenuta concatenando $u_2(\bullet)$ con $u_1(\bullet)$: questo significa, estendendo il discorso, che, ampliando l'intervallo di osservazione, otteniamo un insieme di raggiungibilità che non può diminuire. Possiamo perciò scrivere che

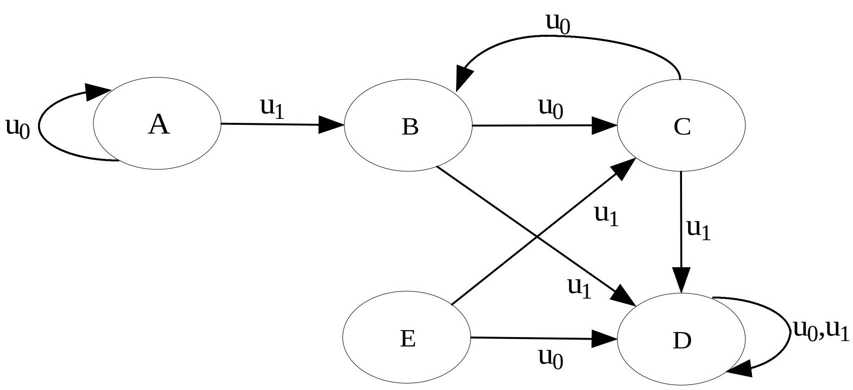
$$\boxed{X_r(\tau_1, t) \subseteq X_r(\tau_2, t) \qquad \tau_1 < \tau_2}$$

Questa proprietà va sotto il nome di "**proprietà di inclusione**" ed è dunque valida sotto due ipotesi fondamentali: lo stato di riferimento deve essere uno stato di equilibrio per il sistema e deve valere la proprietà di concatenazione degli ingressi. La prima ipotesi è senz'altro verificata, ad esempio, per un sistema lineare, per il quale abbiamo infatti visto che lo stato nullo è uno stato di equilibrio: di conseguenza, per questi sistemi, la proprietà di inclusione è verificata se e solo se vale la concatenazione degli ingressi.

Facciamo infine osservare che la proprietà di inclusione, così come è stata scritta prima, è valida per un sistema che non necessariamente sia tempo-invariante.

La proprietà di inclusione non vale solo a proposito del problema della raggiungibilità, ma anche a proposito del problema della controllabilità. Vediamo perciò come si ragiona in questo caso.

Consideriamo nuovamente l'automa descritto dal seguente grafo di transizione:



Mentre prima abbiamo condotto la ricerca dell'insieme $X_r(\tau, t)$, cerchiamo questa volta di determinare l'insieme $X_C(\tau, t)$, ossia l'insieme degli stati partendo dai quali, in un prefissato istante iniziale τ, si può giungere nello stato nullo in un certo istante t>τ: il grafo mostra immediatamente che non esiste alcuna sequenza di valori di ingresso tale da portare il sistema in A partendo da uno qualsiasi degli altri stati; di conseguenza, possiamo scrivere che

$$\forall t \geq \tau \; : \; X_C(\tau, t) = \{A\}$$

In parole povere, se il sistema esce dallo stato di riferimento, non è più in grado di ritornarvi; ciò significa, dunque, che l'unico stato controllabile è proprio lo stato A, a prescindere dall'ampiezza dell'intervallo di osservazione considerato: quindi

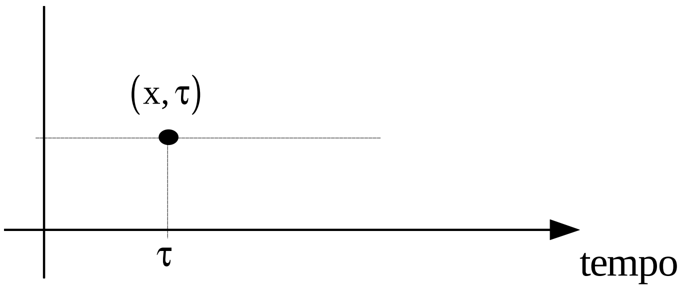
$$X_C(\tau) = \{A\}$$

Si intuisce, dunque, che vale, per questo particolare sistema, la proprietà secondo cui

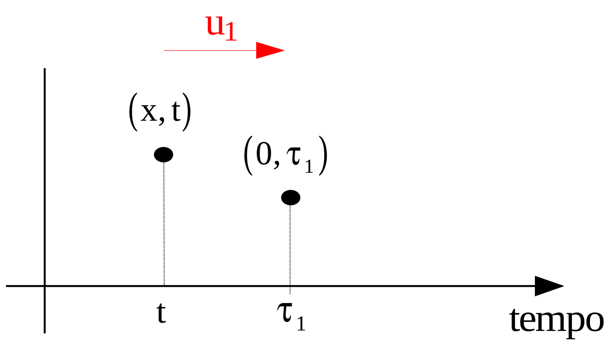
$$X_C(\tau, t_1) \equiv X_C(\tau, t_2)$$

Cerchiamo allora di ragionare in modo del tutto generale. Dato il nostro generico sistema dinamico, supponiamo di aver fissato l'istante iniziale τ; fissato inoltre un certo istante $t_1>\tau$, supponiamo di aver individuato l'insieme $X_C(\tau, t_1)$ di tutti gli stati partendo dai quali, all'istante τ, possa essere raggiunto lo stato nullo all'istante t_1; adesso consideriamo un altro istante $t_2>t_1$ e supponiamo di individuare l'insieme $X_C(\tau, t_2)$: ci chiediamo, allora, se valga o meno una relazione del tipo $X_C(\tau, t_1) \subseteq X_C(\tau, t_2)$, ossia se, aumentando l'intervallo di osservazione, aumenti il numero di stati controllabili.

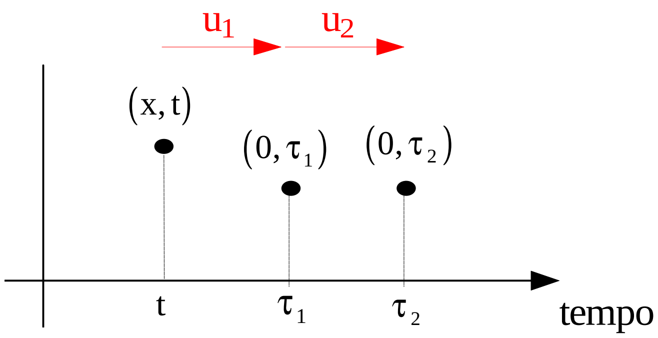
Supponiamo che il sistema si trovi nello stato x all'istante iniziale τ:



Supponiamo inoltre che lo stato x sia uno stato controllabile nell'intervallo $[\tau, t_1]$, il che significa che esiste una funzione di ingresso, che indichiamo con $u_1(\bullet) \in \Omega$, tale da portare il sistema nello stato 0 in corrispondenza dell'istante t_1:



A questo punto, se lo stato 0 è uno stato di equilibrio per il sistema esisterà una funzione di ingresso $u_2(\bullet) \in \Omega$ tale da mantenere il sistema in tale stato, per esempio fino ad un certo istante $\tau_2>\tau_1>t$:



In base a questa figura, se per il sistema considerato vale la proprietà di concatenazione degli ingressi, basta considerare la funzione di ingresso

$$u(\bullet)=\begin{cases} u_1(\bullet) & [t,\tau_1[\\ u_2(\bullet) & [\tau_1,\tau_2[\end{cases}$$

per accorgersi che lo stato x è controllabile sia nell'intervallo $[t,\tau_1]$ sia anche nell'intervallo $[t,\tau_2]$.

Possiamo dunque concludere, anche a proposito della controllabilità, che la "**proprietà di inclusione**" è valida sotto le ipotesi fondamentali che lo stato di riferimento sia uno stato di equilibrio per il sistema e che valga la proprietà di concatenazione degli ingressi.

Quindi, riepilogando quanto detto in questo paragrafo, possiamo enunciare il seguente risultato:

Teorema - *Dato un generico sistema dinamico, se lo stato di riferimento è uno stato di equilibrio e se vale la proprietà di concatenazione degli ingressi, allora sono verificate le seguenti due relazioni:*

$$\boxed{\begin{array}{ll} X_r(\tau_1,t)\subseteq X_r(\tau_2,t) & \tau_1<\tau_2 \\ X_C(\tau,t_1)\subseteq X_C(\tau,t_2) & t_1<t_2 \end{array}}$$

SISTEMI TEMPO-CONTINUI LINEARI

Mentre, nei paragrafi precedenti, abbiamo parlato di controllabilità e raggiungibilità per sistemi dinamici generici, vogliamo adesso descrivere le principali proprietà degli insiemi di controllabilità e di raggiungibilità per sistemi tempo-continui che siano lineari (oltre che regolari e a dimensioni finite).

Sappiamo, intanto, che sistemi di questo tipo sono descrivibili, in forma di stato, mediante una equazione nella forma

$$\dot{x}(t)=F(t)x(t)+G(t)u(t)$$

dove U ed X sono spazi vettoriali di dimensione, rispettivamente, m ed n e dove anche l'insieme Ω delle funzioni di ingresso ammissibile è a sua volta uno spazio vettoriale. Un risultato fondamentale è il seguente:

Teorema - *Dato un sistema descritto dall'equazione di stato* $\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$*, fissati un istante iniziale t e un istante finale t, l'insieme* $X_C(\tau,t)$ *di controllabilità nell'intervallo [t,t] è uno spazio vettoriale*

Dimostrazione

Dobbiamo dunque dimostrare che l'insieme

$$X_C(\tau,t) = \left\{ x \in X \mid \exists u(\bullet) \in \Omega \text{ tale che } \varphi(t,\tau,x,u(\bullet)) = 0 \right\}$$

è uno spazio vettoriale: per fare questo è sufficiente dimostrare che, se $\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \in X_C(\tau,t)$, allora anche $ax_1 + bx_2 \in X_C(\tau,t)$, dove a e b sono due costanti reali qualsiasi.

Intanto, dire che $\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \in X_C(\tau,t)$ significa dire che x_1 ed x_2 sono due stati controllabili nell'intervallo [τ,t], ossia esistono due funzioni $\begin{matrix} u_1(\bullet) \\ u_2(\bullet) \end{matrix} \in \Omega$ tali che

$$\begin{aligned} \varphi(t,\tau,x_1,u_1(\bullet)) &= 0 \\ \varphi(t,\tau,x_2,u_2(\bullet)) &= 0 \end{aligned}$$

Inoltre, essendo il sistema lineare, possiamo considerare sia la nuova funzione di ingresso $au_1(\bullet) + bu_2(\bullet) \in \Omega$ sia lo stato $ax_1 + bx_2 \in X$: fissati l'istante iniziale τ, lo stato iniziale $ax_1 + bx_2$ e l'ingresso $au_1(\bullet) + bu_2(\bullet)$, il movimento prodotto dal sistema, considerando la linearità, è

$$\begin{aligned} &\varphi(t,\tau,ax_1+bx_2,au_1(\bullet)+bu_2(\bullet)) = \varphi_{lib}(t,\tau,ax_1+bx_2) + \varphi_{forz}(t,\tau,au_1(\bullet)+bu_2(\bullet)) = \\ &= a\varphi_{lib}(t,\tau,x_1) + b\varphi_{lib}(t,\tau,x_2) + a\varphi_{forz}(t,\tau,u_1(\bullet)) + b\varphi_{forz}(t,\tau,u_2(\bullet)) = \\ &= a\left[\varphi_{lib}(t,\tau,x_1) + \varphi_{forz}(t,\tau,u_1(\bullet))\right] + b\left[\varphi_{lib}(t,\tau,x_2) + \varphi_{forz}(t,\tau,u_2(\bullet))\right] = \\ &= a\varphi(t,\tau,x_1,u_1(\bullet)) + b\varphi(t,\tau,x_2,u_2(\bullet)) = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Abbiamo dunque concluso che $\varphi(t,\tau,ax_1+bx_2,au_1(\bullet)+bu_2(\bullet)) = 0$, il che significa che $ax_1 + bx_2 \in X_C(\tau,t)$, come volevamo dimostrare.

Lo spazio vettoriale $X_C(\tau,t)$ prende dunque il nome di "**sottospazio di controllabilità nell'intervallo [τ,t]**". Chiaramente, essendo $X_C(\tau,t)$ un sottoinsieme di X ed essendo X uno spazio vettoriale di dimensione finita, anche $X_C(\tau,t)$ è a dimensione finita. Ci chiediamo allora cosa accade a $X_C(\tau,t)$ se, fissato τ, aumentiamo via via (e con continuità) il valore di t, ossia aumentiamo l'intervallo di osservazione.

Intanto, in base alla proprietà di inclusione, possiamo senz'altro affermare che $X_C(\tau,t_1)\subseteq X_C(\tau,t_2)$ con $t_1<t_2$; d'altra parte, dire che uno spazio vettoriale "aumenta" significa dire semplicemente che aumenta la sua dimensione (ossia che è possibile trovare un numero crescente di vettori linearmente indipendenti appartenenti allo spazio considerato); esiste dunque un certo numero di istanti in cui il sottospazio di controllabilità $X_C(\tau,t)$ si allarga, aumentando la sua dimensione in modo tale da contenere, però, tutti i sottospazi precedenti. Ma, essendo $X_C(\tau,t)\subseteq X$, la dimensione di $X_C(\tau,t)$ non può certo superare la dimensione di X, ossia n: di conseguenza, possiamo star certi che ci sarà un istante $t=\bar{t}$ in corrispondenza del quale la dimensione di $X_C(\tau,t)$ arriva al valore n per poi rimanere invariata in corrispondenza di ulteriori aumenti di t:

$$\forall t\geq\bar{t}\ :\ \dim X_C(\tau,t)=n$$

Scritto in altro modo, abbiamo che

$$\boxed{\forall t\geq\bar{t}\ :\ X_C(\tau,t)\equiv X_C(\tau,\bar{t})}$$

Questa scrittura dice in effetti che il sottospazio $X_C(\tau,\bar{t})$ contiene tutti gli stati controllabili dall'istante τ, il che corrisponde a dire che

$$\boxed{X_C(\tau,\bar{t})=X_C(\tau)}$$

L'immediata conseguenza di ciò è che anche $X_C(\tau)$ è uno spazio vettoriale, cui diamo il nome di "**sottospazio di controllabilità dall'istante τ**".

Tutto questo discorso può essere ripetuto, pari pari, per il problema della raggiungibilità. In primo luogo, sussiste il seguente risultato:

Teorema - *Dato un sistema descritto dall'equazione di stato $\dot{x}(t)=F(t)x(t)+G(t)u(t)$, fissati un istante iniziale t e un istante finale t, l'insieme $X_r(\tau,t)$ di raggiungibilità nell'intervallo [t,t] è uno spazio vettoriale*

La dimostrazione del teorema è del tutto analoga a quella fatta prima a proposito del sottospazio di controllabilità.

Lo spazio vettoriale $X_r(\tau,t)$ prende il nome di "**sottospazio di raggiungibilità nell'intervallo [τ,t]**". Si tratta di uno spazio vettoriale di dimensione finita ed il valore massimo di tale dimensione è ancora una volta pari ad n: esiste dunque un certo numero di istanti in cui $X_r(\tau,t)$ si allarga, aumentando la sua dimensione in modo tale da contenere, però, tutti i sottospazi precedenti, ed esiste, in particolare, un istante $t=\bar{t}$ in corrispondenza del quale la dimensione di $X_r(\tau,t)$ arriva al valore n per poi rimanere invariata in corrispondenza di ulteriori aumenti di t:

$$\boxed{\forall t\geq\bar{t}\ :\ X_r(\tau,t)\equiv X_r(\tau,\bar{t})}$$

Questa scrittura dice che $X_r(\tau,\bar{t})$ contiene tutti gli stati raggiungibili all'istante t, il che corrisponde a dire che

$$\boxed{X_r(\tau,\bar{t}) = X_r(t)}$$

La conseguenza di ciò è che anche $X_r(t)$ è uno spazio vettoriale, cui diamo il nome di "**sottospazio di raggiungibilità all'istante t**".

SOTTOSPAZIO DI NON-CONTROLLABILITÀ

Facciamo sempre riferimento ad un sistema tempo-continuo (regolare a dimensioni finite) lineare, descritto da una equazione di stato nella forma

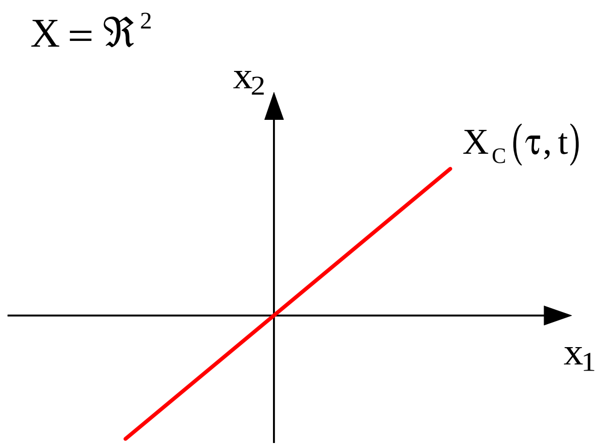
$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$$

Abbiamo detto che $X_C(\tau,t)$ è il sottospazio di controllabilità nell'intervallo [τ,t]: ciò significa che, fissato l'istante iniziale τ, fissato l'istante finale t e fissato come stato iniziale un qualsiasi elemento di $X_C(\tau,t)$, è possibile trovare una funzione di ingresso che porti il sistema nello stato di riferimento in corrispondenza dell'istante t. Consideriamo allora l'insieme complementare di $X_C(\tau,t)$ rispetto ad X:

$$X'_{nC}(\tau,t) = X - X_C(\tau,t) = \left\{ x \in X \;\middle|\; \text{non esiste } u(\bullet) \in \Omega \text{ tale che } \varphi(t,\tau,x,u(\bullet)) = 0 \right\}$$

L'insieme $X'_{nC}(\tau,t)$ racchiude dunque tutti gli stati a partire dai quali il sistema non può mai giungere nello stato di riferimento nell'intervallo [τ,t]. Si tratta cioè dell' "**insieme degli stati non controllabili nell'intervallo [τ,t]**".

Per avere una idea migliore di cosa sia questo insieme, possiamo fare l'esempio seguente. Supponiamo che il sistema in esame abbia, come spazio di stato, l'insieme $\Re^2$, il che significa che il generico stato del sistema sarà $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ con $\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \in \Re$. Fissati τ e t, supponiamo inoltre di aver trovato che il sottospazio $X_C(\tau,t)$ sia costituito dagli stati tali che $x_1=x_2$. Graficamente, possiamo schematizzare la situazione nel modo seguente:



Mentre il sottospazio di controllabilità $X_C(\tau,t)$ consiste nella bisettrice del 1° e del 3° quadrante, l'insieme di non controllabilità $X'_{nC}(\tau,t)$ corrisponde all'insieme dei punti di $\Re^2$ non appartenenti alla suddetta bisettrice.

Da qui consegue evidentemente che $X'_{nC}(\tau,t)$ ***NON è uno spazio vettoriale***.

Allora, è d'uso definire comunque un "*sottospazio di non controllabilità nell'intervallo [t,t]*"; lo si fa scegliendo uno tra quei sottospazi che sono complementari a $X_C(\tau,t)$ (rispetto, ovviamente, ad X): indicato con $X_{nC}(\tau,t)$ tale sottospazio, esso deve cioè essere tale che

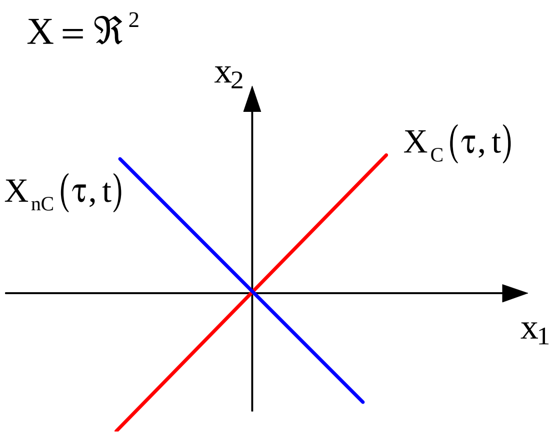
$$X_{nC}(\tau,t) \oplus X_C(\tau,t) = X$$

dove con il simbolo "$\oplus$" indichiamo l'operatore di "*somma diretta tra sottospazi*".

I sottospazi complementari ad $X_C(\tau,t)$ sono diversi, ma, per ragioni di simmetria, si prende quello ortogonale a $X_C(\tau,t)$. Vale, quindi, la seguente definizione:

Def. *Si definisce "**sottospazio di non controllabilità nell'intervallo [t,t]**" il sottospazio* $\boxed{X_{nC}(\tau,t) = X_C(\tau,t)^{\perp}}$

Se facciamo riferimento all'esempio di prima, di sottospazi che siano complementari a $X_C(\tau,t)$ ce ne sono diversi e si tratta delle infinite rette passanti per l'origine; tra queste rette, si sceglie allora quella ortogonale a $X_C(\tau,t)$, ossia la bisettrice del 2° e del 4° quadrante:



Questa figura aiuta a sottolineare il concetto per cui $X_{nC}(\tau,t)$ *non è l'insieme degli stati non controllabili nell'intervallo [t,t], in quanto tale insieme, indicato prima con* $X'_{nC}(\tau,t)$, *racchiude tutti gli stati non appartenenti a* $X_C(\tau,t)$ *e non è uno spazio vettoriale.*

Ovviamente, però, $X_{nC}(\tau,t)$ è costituito solo da stati non controllabili in [τ,t] (a eccezione dello stato nullo, che invece è in comune a $X_C(\tau,t)$) per cui è contenuto in $X'_{nC}(\tau,t)$.

DETERMINAZIONE DEI SOTTOSPAZI DI CONTROLLABILITÀ E NON CONTROLLABILITÀ

Consideriamo sempre un sistema (tempo-continuo) lineare, regolare, a dimensioni finite, descritto da una equazione di stato nella forma

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$$

Ci chiediamo come è possibile determinare il sottospazio $X_C(\tau,t)$ di controllabilità nell'intervallo $[\tau,t]$. Per rispondere a questa domanda, dobbiamo preventivamente dare una fondamentale definizione.

Abbiamo in precedenza visto che, per sistemi come quello in esame, è possibile definire una particolare matrice, che abbiamo chiamato "*matrice di transizione di stato*", indicandola con $\Phi(\tau,t)$, la cui conoscenza è condizione necessaria e sufficiente per determinare l'andamento temporale x(t) dello stato del sistema in corrispondenza delle specificate condizioni iniziali e dello specificato ingresso. Allora, utilizzando questa matrice (quadrata di ordine n) e la matrice di ingresso G(t) (di ordine n*m), è possibile costruire una nuova matrice nel modo seguente:

$$\boxed{W(\tau,t) = \int_{\tau}^{t} \Phi(\tau,\xi)G(\xi)G^T(\xi)\Phi^T(\tau,\xi)d\xi}$$

Questa matrice prende il nome di "**gramiano di controllabilità**" e si può verificare che si tratta di una matrice quadrata, di ordine n, simmetrica. Sulla base di questa definizione, sussiste il seguente risultato:

Teorema - *Dato un sistema lineare descritto da una equazione di stato nella forma* $\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$*, fissati l'istante iniziale t e l'istante finale t, il sottospazio* $X_C(\tau,t)$ *di controllabilità nell'intervallo [t,t] corrisponde al range del gramiano di controllabilità:*

$$\boxed{X_C(\tau,t) = \mathrm{Range}[W(\tau,t)]}$$

Dimostrazione

Per far vedere che $X_C(\tau,t)$ coincide con $\mathrm{Range}[W(\tau,t)]$ è sufficiente far vedere che $X_C(\tau,t) \subset \mathrm{Range}[W(\tau,t)]$ e che $X_C(\tau,t) \supset \mathrm{Range}[W(\tau,t)]$.

Cominciamo a dimostrare che $X_C(\tau,t) \subset \mathrm{Range}[W(\tau,t)]$: dobbiamo far vedere che, se $x \in \mathrm{Range}[W(\tau,t)]$, allora $x \in X_C(\tau,t)$.

Dire che $x \in \mathrm{Range}[W(\tau,t)]$ significa dire che esiste un vettore z tale che $x = W(\tau,t)z$. Allora, fissiamo la seguente funzione di ingresso per il sistema:

$$u(\xi) = -G'(\xi)\Phi^T(\tau,\xi)z$$

Se supponiamo che, all'istante iniziale τ, lo stato del sistema sia proprio x, possiamo scrivere, in base alla formula di Lagrange, che lo stato del sistema, all'istante generico t, è dato da

$$x(t)=\Phi(t,\tau)x(\tau)+\int_\tau^t \Phi(t,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi=\Phi(t,\tau)x(\tau)-\int_\tau^t \Phi(t,\xi)G(\xi)G'(\xi)\Phi^T(\tau,\xi)zd\xi=$$
$$=\Phi(t,\tau)x(\tau)-\left(\int_\tau^t \Phi(t,\xi)G(\xi)G'(\xi)\Phi^T(\tau,\xi)d\xi\right)z$$

Possiamo applicare la proprietà di semi-gruppo della matrice di transizione di stato, secondo la quale $\Phi(t,\xi)=\Phi(t,\tau)\Phi(\tau,\xi)$: sostituendo, abbiamo che

$$x(t)=\Phi(t,\tau)x(\tau)-\left(\int_\tau^t \Phi(t,\tau)\Phi(\tau,\xi)G(\xi)G'(\xi)\Phi^T(\tau,\xi)d\xi\right)z=$$
$$=\Phi(t,\tau)x(\tau)-\Phi(t,\tau)\left(\int_\tau^t \Phi(\tau,\xi)G(\xi)G'(\xi)\Phi^T(\tau,\xi)d\xi\right)z=\Phi(t,\tau)x(\tau)-\Phi(t,\tau)W(\tau,t)z=$$
$$\Phi(t,\tau)\left(x(\tau)-W(\tau,t)z\right)$$

Avevamo detto che lo stato iniziale era x(τ)=x e che $x=W(\tau,t)z$, da cui concludiamo che x(t)=0. Abbiamo dunque trovato che lo stato del sistema, nell'istante t, è lo stato nullo, il che significa che lo stato x da cui siamo partiti è uno stato controllabile nell'intervallo [τ,t], ossia che $x\in X_C(\tau,t)$, come volevamo dimostrare.

Adesso, per dimostrare l'implicazione inversa, ossia $X_C(\tau,t)\supset \mathrm{Range}[W(\tau,t)]$, possiamo far vedere che, se $x\notin \mathrm{Range}[W(\tau,t)]$, allora $x\notin X_C(\tau,t)$.

Dire che $x\notin \mathrm{Range}[W(\tau,t)]$ significa dire che non esiste alcun vettore z tale che $x=W(\tau,t)z$; ciò significa anche che

$$X=\mathrm{Range}[W(\tau,t)]\oplus \mathrm{Nucleo}[W(\tau,t)]$$

ossia che, preso un qualsiasi $x\in X$, esisteranno $x_A\in \mathrm{Range}[W(\tau,t)]$ e $x_B\in \mathrm{Nucleo}[W(\tau,t)]$ tali che $x=x_A+x_B$. In particolare, perché risulti $x\notin \mathrm{Range}[W(\tau,t)]$, deve necessariamente essere $x_B\neq 0$, perché, in caso contrario, risulterebbe $x=x_A\in \mathrm{Range}[W(\tau,t)]$. Inoltre, richiedere che sia $x\notin X_C(\tau,t)$ equivale a richiedere che sia anche $x_B\notin X_C(\tau,t)$: infatti, se $x_A\in \mathrm{Range}[W(\tau,t)]$, in base a quanto dimostrato prima risulta anche $x_A\in X_C(\tau,t)$ e quindi deve necessariamente essere $x_B\notin X_C(\tau,t)$ perché si possa avere che $x\notin X_C(\tau,t)$. Quindi, avendo assodato che $x_B\in \mathrm{Nucleo}[W(\tau,t)]$, dobbiamo far vedere che $x_B\notin X_C(\tau,t)$.

Per dimostrare questo, possiamo scrivere semplicemente che $x\in \mathrm{Nucleo}[W(\tau,t)]$, con $x\neq 0$, e dimostrare semplicemente che $x\notin X_C(\tau,t)$.

Procediamo per assurdo, supponendo che $x\in X_C(\tau,t)$.

Dire che $x \in \text{Nucleo}[W(\tau,t)]$ significa dire, per definizione di "nucleo di una matrice", che $W(\tau,t)x = 0$; da qui consegue ovviamente che

$$x^T W(\tau,t)x = 0$$

Sostituendo l'espressione di W(τ,t), abbiamo dunque che

$$x^T\left(\int_\tau^t \Phi(\tau,\xi)G(\xi)G^T(\xi)\Phi^T(\tau,\xi)d\xi\right)x = 0$$

Portando dentro l'integrale i termini x^T e x, questa diventa

$$\int_\tau^t x^T\Phi(\tau,\xi)G(\xi)G^T(\xi)\Phi^T(\tau,\xi)x d\xi = 0$$

L'argomento dell'integrale è il prodotto di due vettori, uno il trasposto dell'altro: posto infatti $y = G^T(\xi)\Phi^T(\tau,\xi)x$, risulta

$$y^T = \left(G^T(\xi)\Phi^T(\tau,\xi)x\right)^T = x^T\Phi(\tau,\xi)G(\xi)$$

per cui possiamo scrivere che $\int_\tau^t y^T y d\xi = 0$.

D'altra parte, il prodotto di un vettore per il suo trasposto è il quadrato della norma euclidea del vettore stesso: quindi, posto $y^T y = \left\|G^T(\xi)\Phi^T(\tau,\xi)x\right\|^2$, abbiamo che

$$\int_\tau^t \left\|G^T(\xi)\Phi^T(\tau,\xi)x\right\|^2 d\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad G^T(\xi)\Phi^T(\tau,\xi)x = 0 \quad \forall \xi \in [\tau,t]$$

Stavamo supponendo, per assurdo, che $x \in X_C(\tau,t)$, il che significa che esiste almeno una funzione di ingresso $u(\xi)$ tale che

$$x(t) = 0 = \Phi(t,\tau)x + \int_\tau^t \Phi(t,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi$$

Se premoltiplichiamo, ambo i membri, per $\Phi(\tau,t)$, questa relazione equivale a

$$0 = \Phi(\tau,t)\Phi(t,\tau)x + \Phi(\tau,t)\int_\tau^t \Phi(t,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi$$

In base ad una nota proprietà della matrice di transizione di stato, sappiamo che $\Phi(\tau,t)\Phi(t,\tau) = I$, per cui quella diventa

$$x = -\Phi(\tau,t)\int_\tau^t \Phi(t,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi = -\int_\tau^t \Phi(\tau,t)\Phi(t,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi = -\int_\tau^t \Phi(\tau,\xi)G(\xi)u(\xi)d\xi$$

Se ora premoltiplichiamo per x^T, abbiamo che

$$x^T x = \|x\| = -\int_{\tau}^{t} x^T \Phi(\tau,\xi) G(\xi) u(\xi) d\xi$$

A questo punto, osserviamo che il prodotto $x^T\Phi(\tau,\xi)G(\xi)$ è un vettore riga corrispondente al trasposto del vettore $G^T(\xi)\Phi^T(\tau,\xi)x$: ma avevamo trovato che questo vettore è nullo nell'intervallo [τ,t], dal che deduciamo che $\|x\| = 0$, ossia che x=0. A questo punto, siamo caduti in contraddizione, in quanto, per definizione, il vettore nullo non può appartenere a $\text{Nucleo}[W(\tau,t)]$. Deduciamo, perciò, che deve essere $x \notin X_C(\tau,t)$, come volevamo dimostrare.

Naturalmente, la conoscenza di $X_C(\tau,t)$ consente di determinare immediatamente anche il sottospazio $X_{nC}(\tau,t)$ di non controllabilità nell'intervallo [τ,t]: in questo caso, possiamo sfruttare una proprietà degli spazi vettoriali secondo la quale, data la matrice A (quadrata di ordine n), e dato il sottospazio $Z = \text{range}(A)$, risulta $Z^{\perp} = \text{Nucleo}(A^T)$. Nel nostro caso, avendo dimostrato che $X_C(\tau,t) = \text{Range}[W(\tau,t)]$, possiamo dunque scrivere che

$$X_{nC}(\tau,t) = \text{Nucleo}\left[W(\tau,t)^T\right]$$

D'altra parte, abbiamo detto che il gramiano di controllabilità è una matrice simmetrica, per cui coincide con la sua trasposta: possiamo perciò concludere che

$$\boxed{X_{nC}(\tau,t) = \text{Nucleo}[W(\tau,t)]}$$

N.B. Ricordiamo che il "*nucleo*" di una matrice A (detto anche "*spazio nullo*" di A) è quell'insieme di vettori x che godono delle proprietà per cui $Ax = 0$, ossia del fatto per cui il prodotto scalare di ogni colonna della matrice A per il vettore x è uguale a 0, ossia che le colonne di A rappresentano vettori ortogonali al vettore x.

SOTTOSPAZIO DI NON-RAGGIUNGIBILITÀ

Risultati del tutto analoghi a quelli esposti nei due paragrafi precedenti valgono a proposito della raggiungibilità. Facciamo ancora riferimento ad un sistema tempo-continuo (regolare a dimensioni finite) lineare, descritto da una equazione di stato nella forma

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$$

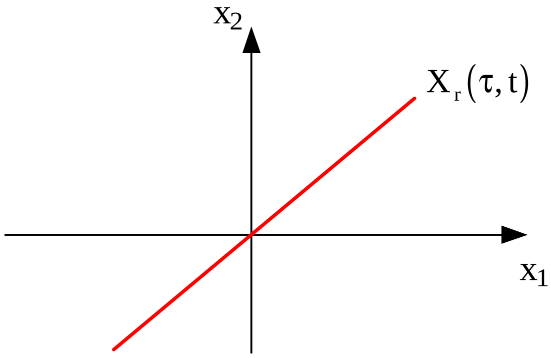
Abbiamo detto che $X_r(\tau,t)$ è il sottospazio di raggiungibilità nell'intervallo [τ,t]: ciò significa che, fissati l'istante iniziale τ e l'istante finale t, è sempre possibile trovare una funzione di ingresso che, in corrispondenza dell'istante t, porti il sistema dallo stato di riferimento ad uno qualsiasi degli stati contenuti $X_r(\tau,t)$. Consideriamo allora l'insieme

$$X'_{nr}(\tau,t) = X - X_r(\tau,t) = \left\{ x \in X \;\middle|\; \text{non esiste } u(\bullet) \in \Omega \text{ tale che } \varphi(t,\tau,0,u(\bullet)) = x \right\}$$

L’insieme $X'_{nr}(\tau,t)$ racchiude dunque tutti gli stati nei quali il sistema non può mai andare, partendo dallo stato nullo, nell’intervallo [τ,t]. Si tratta cioè dell’ “**insieme degli stati non raggiungibili nell’intervallo [τ,t]**”.

Anche in questo caso, possiamo visualizzare la situazione in modo grafico: supponiamo che il sistema in esame abbia, come spazio di stato, l’insieme $\Re^2$, per cui il generico stato del sistema sarà $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ con $\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\in\Re$. Fissati τ e t, supponiamo inoltre di aver trovato che il sottospazio $X_r(\tau,t)$ sia costituito dagli stati tali che $x_1=x_2$:

$$X=\Re^2$$



Mentre il sottospazio di controllabilità $X_r(\tau,t)$ consiste nella bisettrice del 1° e del 3° quadrante, l’insieme di non raggiungibilità $X'_{nr}(\tau,t)$ corrisponde all’insieme dei punti di $\Re^2$ non appartenenti alla suddetta bisettrice.

Si osserva, anche in questo caso, che $X'_{nr}(\tau,t)$ *NON è uno spazio vettoriale*.

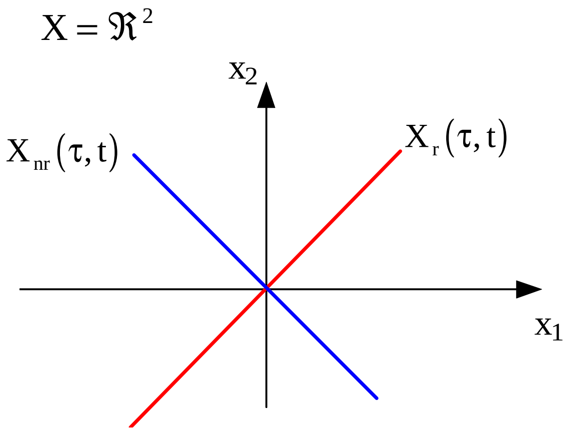
Per definire comunque un “*sottospazio di non raggiungibilità nell’intervallo [t,t]*”, si sceglie uno tra quei sottospazi che sono complementari a $X_r(\tau,t)$ (rispetto, ovviamente, ad X): indicato con $X_{nr}(\tau,t)$ tale sottospazio, esso deve cioè essere tale che

$$X_{nr}(\tau,t)\oplus X_r(\tau,t)=X$$

Inoltre, così come si fa per la controllabilità, tra i sottospazi complementari ad $X_r(\tau,t)$ si prende quello ortogonale a $X_r(\tau,t)$, per cui vale la seguente definizione:

Def. *Si definisce* ***“sottospazio di non raggiungibilità nell’intervallo [t,t]”*** *il sottospazio* $\boxed{X_{nr}(\tau,t)=X_r(\tau,t)^{\perp}}$

Se facciamo riferimento all’esempio di prima, è chiaro che $X_{nr}(\tau,t)$ non può che essere la bisettrice del 2° e del 4° quadrante:



Ancora una volta, è bene ribadire che $X_{nr}(\tau,t)$ *non è l'insieme degli stati non raggiungibili nell'intervallo [τ,t], in quanto tale insieme, indicato prima con* $X'_{nr}(\tau,t)$*, racchiude tutti gli stati non appartenenti a* $X_r(\tau,t)$ *e non è uno spazio vettoriale.*

DETERMINAZIONE DEI SOTTOSPAZI DI RAGGIUNGIBILITÀ E NON RAGGIUNGIBILITÀ

Consideriamo sempre un sistema tempo-continuo (regolare a dimensioni finite) lineare, descritto da una equazione di stato nella forma

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$$

Vogliamo determinare il sottospazio $X_r(\tau,t)$ di raggiungibilità nell'intervallo [τ,t]. Anche in questo caso, dobbiamo preventivamente introdurre una definizione: si definisce "**gramiano di raggiungibilità**" la matrice

$$\boxed{\hat{W}(\tau,t) = \int_{\tau}^{t} \Phi(t,\xi)G(\xi)G^T(\xi)\Phi^T(t,\xi)d\xi}$$

Questa matrice (anch'essa simmetrica di ordine n) differisce dal gramiano di controllabilità per il fatto che le matrici Φ e Φ^T hanno argomento (t,ξ), mentre, nel gramiano di controllabilità, avevano argomento (τ,ξ).

Sulla base di questa definizione, sussiste il seguente risultato:

<u>Teorema</u> - *Dato un sistema lineare descritto da una equazione di stato nella forma* $\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$*, fissati l'istante iniziale τ e l'istante finale t, il sottospazio* $X_r(\tau,t)$ *di raggiungibilità nell'intervallo [τ,t] corrisponde al range del gramiano di raggiungibilità:*

$$\boxed{X_r(\tau,t) = \mathrm{Range}\left[\hat{W}(\tau,t)\right]}$$

La conoscenza di $X_r(\tau,t)$ consente evidentemente di determinare anche il sottospazio $X_{nr}(\tau,t)$ di non raggiungibilità nell'intervallo [τ,t]: sfruttando sempre la proprietà degli spazi vettoriali secondo cui, data una matrice A (quadrata di ordine n), e dato il sottospazio $Z = \text{range}(A)$, risulta $Z^{\perp} = \text{Nucleo}\left(A^T\right)$, possiamo scrivere, tenendo conto che $X_{nr}(\tau,t) = \text{Range}\left[\hat{W}(\tau,t)\right]$, che

$$X_{nr}(\tau,t) = \text{Nucleo}\left[\hat{W}(\tau,t)^T\right]$$

D'altra parte, essendo il gramiano di raggiungibilità è una matrice simmetrica, esso coincide con la sua trasposta e possiamo perciò concludere che

$$\boxed{X_{nr}(\tau,t) = \text{Nucleo}\left[\hat{W}(\tau,t)\right]}$$

PROPRIETÀ DEI SISTEMI PERIODICI

Prima di passare all'esame dei sistemi lineari tempo-invarianti (oltre che regolari e a dimensioni finite), vogliamo adesso enunciare due semplici risultati relativi ad una particolare classe di sistemi: consideriamo sempre un sistema (tempo-continuo) lineare, regolare, a dimensioni finite, descritto da una equazione di stato nella forma

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$$

Diremo che questo sistema è "**periodico di periodo T**" se le matrici F(t) e G(t) contengono funzioni periodiche di periodo T: deve cioè accadere che

$$F(t) = F(t + kT)$$
$$G(t) = G(t + kT)$$

Per sistemi di questo tipo, vale un primo importante risultato, che andiamo ad enunciare:

Teorema - *Dato un sistema periodico* $\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$, *fissato un istante x e individuati i sottospazi di controllabilità* $X_C(\xi)$ *e di raggiungibilità* $X_r(\xi)$ *relativi a tale istante, risulta che* $\boxed{X_C(\xi) = X_r(\xi)}$

Questo teorema afferma dunque che *l'insieme degli stati controllabili dall'istante x coincide con l'insieme degli stati raggiungibili all'istante x:* in altre parole, fissato un certo stato $x \in X$, se esiste una funzione di ingresso tale da portare il sistema da tale stato nello stato nullo (cioè se lo stato è controllabile), in un certo intervallo di tempo, allora esiste anche un'altra funzione di ingresso tale da riportare il sistema, partendo dallo stato nullo, nello stato x, in un certo intervallo di tempo (cioè lo stato è raggiungibile) e viceversa.

E' chiaro che un caso particolare si ha se il sistema è tempo-invariante: infatti, abbiamo visto in precedenza che, in questo caso, risulta $X_C(\xi)=X_C$ e $X_r(\xi)=X_r$, per cui, considerando che un sistema tempo-invariante è periodico di periodo qualsiasi, allora risulta $X_C=X_r$, il che significa che tutti gli stati controllabili sono raggiungibili e viceversa.

L'altro risultato che ci interessa enunciare è il seguente:

Teorema - *Dato un sistema periodico* $\dot{x}(t)=F(t)x(t)+G(t)u(t)$ *di ordine n, fissato un istante x, individuati i sottospazi di controllabilità* $X_C(\xi)$ *e di raggiungibilità* $X_r(\xi)$ *relativi a tale istante, presi due stati* $x_1\in X_C(\xi)$ *e* $x_2\in X_r(\xi)$*, risulta che*

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1\in X_C(\xi-nT,\xi)\\ x_2\in X_r(\xi-nT,\xi)\end{array}}$$

Cerchiamo di capire cosa dice questo teorema, per esempio con riferimento alla raggiungibilità: dire che $x_2\in X_r(\xi)$ significa dire che x_2 è uno stato raggiungibile all'istante ξ; in questa definizione non viene specificato l'istante di partenza, ossia non viene specificato l'intervallo di tempo necessario perché il sistema giunga in x_2 partendo dallo stato 0; allora, il teorema dice che $x_2\in X_r(\xi-nT,\xi)$, ossia che x_2 è raggiungibile, all'istante ξ, in un intervallo di tempo non superiore a n volte il periodo T del sistema. Stesso discorso, ovviamente, per la controllabilità.

Ancora una volta, una situazione particolare si ha se il sistema considerato è anche tempo-invariante: la particolarità è che il valore del periodo T è qualsiasi.

Sistemi tempo-discreti lineari tempo-invarianti

INTRODUZIONE

Mentre, nei paragrafi precedenti, abbiamo parlato di controllabilità e raggiungibilità per sistemi tempo-continui, adesso ci occupiamo, in modo molto rapido, dei sistemi tempo-discreti e, in particolare, dei sistemi lineari (regolari a dimensioni finite) e tempo-invarianti. Sappiamo, intanto, che sistemi di questo tipo sono descrivibili, in forma di stato, mediante una equazione (detta "*equazione alle differenze*") nella forma

$$x(t+1)=Fx(t)+Gu(t)$$

mentre non ci interessa, in questo studio, l'equazione di uscita.

Una prima osservazione importante da fare è la seguente: *er sistemi di questo tipo, il sottospazio di controllabilità X_C non coincide, in generale, con quello di raggiungibilità X_r.*

Questo fatto rappresenta una importante differenza con quanto accade con i sistemi tempo-continui: come vedremo, infatti, in un sistema tempo-continuo, lineare e tempo-invariante (oltre che regolare a dimensione finite) risulta $X_C=X_r$.

Per convincersi che, nei sistemi tempo-discreti, risulta in generale $X_C \neq X_r$, basta citare un esempio particolare : supponiamo che il sistema $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$ presenti le matrici F e G composte tutte da elementi nulle; in base all'equazione di stato, ciò comporta che $x(t+1) = 0$, ossia che, quale che sia lo stato di partenza, il sistema giunge comunque nello stato nullo. Ciò significa che il sistema è completamente controllabile, ossia che, partendo da un qualsiasi stato, si può sempre giungere nello stato nullo. Allo stesso tempo, il fatto che $x(t+1) = 0$ quale che sia x(t) indica che non è possibile giungere ad alcuno stato del sistema (fatta eccezione per quello nullo) partendo dallo stato nullo: ciò significa che non ci sono stati raggiungibili, ossia che il sistema è "*completamente non raggiungibile*". Possiamo dunque riassumere la situazione nel modo seguente:

$$X_C = X$$
$$X_r = \{0\}$$

Si deduce, quindi che $X_C \neq X_r$.

D'altra parte, è possibile dimostrare la seguente proprietà:

Teorema - *Per un sistema tempo-discreto descritto da una equazione di stato $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$, tutti gli stati raggiungibili sono anche controllabili, ossia $X_r \subset X_C$*

La dimostrazione di questa proprietà si basa sulle proprietà dei sistemi tempo-discreti e periodici, considerando il fatto che un sistema tempo-invariante è un sistema periodico di periodo qualsiasi. Sempre in base a questa dimostrazione, si ricava che *a condizione per cui risulti $X_C = X_r$ è che il sistema sia reversibile, il che corrisponde a dire che $\det F \neq 0$.*

N.B. Ricordiamo che, dato un generico sistema dinamico, dire che esso sia "**reversibile**" (o anche "*irreversbile all'indietro*") significa dire che la sua funzione di transizione di stato è tale che, noti l'istante iniziale τ, l'ingresso, l'istante finale t e lo stato all'istante t, sia possibile ricavare, in modo univoco, lo stato iniziale x(τ) da cui il sistema è partito.

Volendo allora riepilogare quanto appena detto, possiamo affermare quanto segue: *per un sistema tempo-discreto descritto da una equazione di stato nella forma $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$, in generale risulta $X_C \neq X_r$; se, invece, il sistema è reversibile (ossia se $\det F \neq 0$), allora risulta $X_C = X_r$.*

RAGGIUNGIBILITÀ

Cominciamo dallo studio della raggiungibilità per un sistema di questo tipo. Indichiamo con X_{r1} (sottoinsieme di X) l'insieme degli stati raggiungibili in 1 solo passo. Vogliamo determinare gli stati appartenenti a tale insieme. Intanto, essendo il sistema tempo-invariante, possiamo prendere un qualsiasi istante iniziale e prendiamo ovviamente τ=0; sappiamo che la formula generale che fornisce lo stato del sistema in un generico istante t≥0 è

$$x(t) = F^t x(0) + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k)$$

Se vogliamo trovare gli stati raggiungibili in 1 solo passo, ci basta imporre due condizioni su questa relazione: la prima è che lo stato di partenza sia quello nullo, ossia x(0)=0, e la seconda è che l'istante di arrivo sia appunto t=1. Imponendo tali condizioni, otteniamo

$$x(1) = Gu(0)$$

In base a questa relazione, al variare del valore di u(0), otteniamo tutti gli stati raggiungibili in 1 passo; allora, nell'ipotesi che il sistema abbia m ingressi e ciascuno di questi ingressi sia reale, ossia nell'ipotesi che $u(t) \in \Re^m$, possiamo scrivere che $Gu(0) = \mathrm{Range}(G)$ e quindi che

$$X_{r1} = \mathrm{Range}(G)$$

Adesso, con lo stesso identico metodo, determiniamo l'insieme X_{r2} contenente gli stati raggiungibili dal sistema in 2 passi: usando ancora la formula generale riportata prima, abbiamo che

$$x(2) = \underbrace{F^2 x(0)}_{=0} + FGu(0) + Gu(1) = FGu(0) + Gu(1)$$

Questa relazione, scritta in forma matriciale, è

$$x(2) = \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

dove $\begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix}$ è una matrice di dimensione n*2m, mentre $\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$ è un vettore colonna a 2m componenti.

Sempre nell'ipotesi che $u(t) \in \Re^m$, è ovvio che $\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \in \Re^{2m}$ e possiamo perciò scrivere che

$$X_{r2} = \mathrm{Range}\begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix}$$

Adesso, seguendo ancora lo stesso discorso, cerchiamo l'insieme X_{r3} contenente gli stati raggiungibili dal sistema in 3 passi: abbiamo che

$$x(3) = \underbrace{F^3 x(0)}_{=0} + F^2 Gu(0) + FGu(1) + Gu(2) = \begin{bmatrix} G & FG & F^2 G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

da cui deduciamo, in modo analogo ai casi precedenti, che

$$X_{r3} = \mathrm{Range}\begin{bmatrix} G & FG & F^2 G \end{bmatrix}$$

A questa punto, è intuitivo accorgersi che

$$x(k) = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{k-1}G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \dots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

e questo corrisponde a dire che

$$\boxed{X_{rk} = \mathrm{Range}\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{k-1}G \end{bmatrix}}$$

Una cosa interessante che si osserva da questa formula è che, all'aumentare di k, l'insieme X_{rk} si estende (cioè aumenta la propria dimensione) e contiene via via tutti i sottospazi precedenti:

$$\dots \subseteq X_{rk-1} \subseteq X_{rk} \subseteq X_{rk+1} \subseteq \dots$$

Naturalmente, essendo $X_{rk} \subseteq X$, la dimensione massima raggiungibile da parte di X_{rk} è pari alla dimensione di X, ossia n (=ordine del sistema):

$$X_{rn} = \mathrm{Range}\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$$

Ci chiediamo, allora, cosa accade quando k=n+1, ossia quando si ricercano gli stati del sistema raggiungibili in n passi: applicando la formula abbiamo che

$$X_{rn+1} = \mathrm{Range}\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G & F^nG \end{bmatrix}$$

La matrice di cui bisogna calcolare il range presenta, come ultimo blocco, la matrice F^nG: questo blocco, in base al teorema di Cayley-Hamilton, è formato da colonne che possono essere espresse come combinazioni lineari delle colonne delle matrici precedenti $G,FG,\dots,F^{n-1}G$. Ciò significa che il blocco F^nG introduce delle colonne linearmente dipendenti, ossia non introduce alcuna informazione aggiuntiva rispetto a quelle fornite dai blocchi precedenti. Questo consente di scrivere che

$$\boxed{\forall k \geq n: \quad X_{rk} = \mathrm{Range}\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{k-1}G \end{bmatrix}}$$

ossia che l'insieme X_{rk}, a partire da k=n in poi, rimane invariato. Concretamente, questo significa che *un generico stato* $x \in X$ *o è raggiungibile, e lo è in non più di n passi, oppure non è raggiungibile in alcun passo.*

Criterio di completa raggiungibilità

A questo punto, ci si può porre la seguente domanda: cosa deve accadere affinché il sistema sia completamente raggiungibile? Intanto, da quanto detto a proposito dei sistemi tempo-continui si deduce che la condizione di completa raggiungibilità corrisponde a dire che $X = X_{rn}$, ossia che

$$\forall x \in X \ : \ x \in \mathrm{Range}\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$$

Richiedere che si verifichi questa relazione equivale anche a richiedere che la dimensione di X_{rn} sia pari alla dimensione dello spazio di stato e cioè che il rango della matrice $\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$ sia pari alla dimensione dello spazio di stato (che poi è l'ordine del sistema); possiamo allora fornire il seguente criterio di completa raggiungibilità, dovuto a **Kalman**:

Teorema - *Un sistema* $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$ *è completamente raggiungibile se e solo se il rango della matrice* $\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$ *è pari all'ordine del sistema*

CONTROLLABILITÀ

Adesso passiamo allo studio della controllabilità per un sistema tempo-discreto descritto da una equazione alle differenze del tipo

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Il discorso da fare è molto simile a quello fatto per la raggiungibilità.

Data la tempo-invarianza, scegliamo ancora una volta, come istante iniziale, l'istante τ=0: sotto questa ipotesi, l'evoluzione temporale dello stato del sistema è retta dall'equazione

$$x(t) = F^t x(0) + \sum_{i=0}^{t-1} F^{t-i-1} Gu(i)$$

Ci interessa ricercare gli stati controllabili, ossia gli stati partendo dai quali, in un intervallo di tempo finito, il sistema passi nello stato nullo: dobbiamo perciò porre x(t)=0, ottenendo che

$$-F^t x_C = \sum_{i=0}^{t-1} F^{t-i-1} Gu(i)$$

dove abbiamo posto $x(0)=x_C$ per indicare che x_C è il generico stato controllabile che stiamo ricercando.

Consideriamo, ad esempio, gli stati controllabili in un passo: ponendo t=1, otteniamo che

$$-Fx_{C1} = Gu(0)$$

Se, consideriamo, invece, gli stati controllabili in 2 passi (cioè t=2), otteniamo

$$-F^2 x_{C2} = FGu(0) + Gu(1) = \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Iterando il procedimento, è facile accorgersi che, per t=k, risulta

$$-F^k x_{Ck} = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{k-1}G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \dots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Questa relazione matriciale, una volta fissato lo stato x_{Ck}, rappresenta un sistema di n equazioni scalari (basta osservare il primo membro) in k incognite, che sono i valori dell'ingresso $u(0), u(1), \dots, u(k-1)$ (che si suppone sia ad 1 sola componente). Il sistema è compatibile (ossia ammette almeno una soluzione) se e solo se $F^k x_{Ck}$ appartiene al range della matrice $\mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{k-1}G \end{bmatrix}$.

Quindi, possiamo cominciare ad affermare che *condizione necessaria e sufficiente affinché lo stato x_{Ck} sia controllabile a zero in k passi è che* $F^k x_{Ck} \in \mathbf{K}_k$.

Proseguendo con questi discorsi, si può dimostrare seguente risultato:

Teorema - *Dato un sistema, di ordine n, del tipo $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$, ogni suo stato controllabile a zero è sicuramente controllabile a zero in n passi*

In altre parole, una volta accertato che un certo stato x_0 sia controllabile a zero in un numero k qualsiasi di passi, possiamo star certi che esso sia controllabile a 0 in n passi, dove n è l'ordine del sistema.

Sempre in base alla dimostrazione di prima, si capisce facilmente che l'insieme degli stati controllabili del sistema è così definito:

$$\boxed{X_C = \left\{ x \in X \middle| F^n x \in \text{Range}\,\mathbf{K} \right\}}$$

Si può verificare che questo insieme è uno spazio vettoriale e gli diamo perciò il nome di "**sottospazio di controllabilità**".

Criterio di completa controllabilità

Naturalmente, possiamo adesso porci la "solita" domanda: cosa deve accadere affinché il sistema sia completamente controllabile? Sappiamo ormai bene che la condizione di completa controllabilità significa che $X = X_C$: allora, in base a come abbiamo definito poco fa XC, deduciamo che il sistema è completamente controllabile se e solo se

$$\forall x \in X \ : \ F^n x \in \text{Range} \underbrace{\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}}$$

Questa condizione è del tutto equivalente alla condizione

$$\boxed{\mathrm{Range}\left(F^n\right) \subseteq \mathrm{Range}(\mathbf{K})}$$

per cui possiamo esprimere il criterio di completa controllabilità per un sistema tempo-discreto (lineare tempo-invariante oltre che regolare a dimensioni finite) nel modo seguente:

Teorema - *Un sistema del tipo* $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$ *è completamente controllabile se e solo se il range della matrice* F^n *è contenuto nel range della matrice di Kalman* $\mathbf{K}$

Un caso particolare si ha quando il sistema è reversibile, ossia quando $\det F \neq 0$: infatti, in questo caso è facile verificare che sussiste la relazione $\mathrm{Range}\left(F^n\right) \equiv X$. Allora, dato che sussiste sempre l'altra relazione $\mathrm{Range}(\mathbf{K}) \subseteq X$, possiamo formulare il seguente criterio di completa controllabilità per un sistema tempo-discreto (lineare tempo-invariante oltre che regolare a dimensioni finite) *reversibile*:

Teorema - *Un sistema del tipo* $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$*, reversibile (ossia con* $\det F \neq 0$*) è completamente controllabile se e solo se la matrice di Kalman* $\mathbf{K}$ *ha rango pari ad n*

D'altra parte, era un risultato assolutamente prevedibile, in quanto abbiamo detto in precedenza che, nei sistemi tempo-discreti lineari e tempo-invarianti (oltre che regolari a dimensioni finite) reversibili, il sottospazio di controllabilità coincide con quello di raggiungibilità, per cui è ovvio che il criterio di completa controllabilità dovesse coincidere con quello di completa raggiungibilità.

Esempio

Determinare i sottospazi di raggiungibilità, di non-raggiungibilità, di controllabilità e di non-controllabilità del sistema tempo-discreto descritto dalle seguenti matrici:

$$F = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Risoluzione

La prima cosa da fare è individuare la matrice di Kalman $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Il determinante di questa matrice è nullo in quanto le due colonne (righe) sono linearmente dipendenti: deduciamo che $\rho(\mathbf{K})=1$, il che significa che $\dim X_r = \rho(\mathbf{K})=1$ (e quindi che $\dim X_{nr} = n-\rho(\mathbf{K})=1$). Allora, come base di X_r ci basta una qualsiasi delle colonne che costituiscono la matrice di raggiungibilità: prendiamo ad esempio la prima, per cui possiamo scrivere

$$X_r = \text{sp}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il sottospazio di non raggiungibilità è ortogonale ad X_r, per cui i suoi vettori sono quelli che soddisfano la condizione

$$-2x_1 + x_2 = 0$$

Deduciamo quindi che $X_{nr} = \text{sp}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Passiamo adesso alla controllabilità. Per prima cosa, verifichiamo se il sistema è completamente controllabile o meno: la matrice di stato è una matrice singolare, per cui il sistema non è reversibile; di conseguenza, la condizione necessaria e sufficiente di completa controllabilità è che $\text{Range}(F^2) \subseteq \text{Range}(\mathbf{K})$. Abbiamo già individuato $\text{Range}(\mathbf{K})$: sappiamo infatti che

$$\text{Range}(\mathbf{K}) = X_r = \text{sp}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ci conviene scrivere in altro modo questo spazio vettoriale: in particolare, conviene scrivere che $\text{Range}(\mathbf{K})$ è l'insieme dei vettori del tipo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha - 8\beta \\ \alpha + 4\beta \end{bmatrix}$$

Andiamo ora ad individuare $\text{Range}(F^2)$: essendo

$$F^2 = F \cdot F = \begin{bmatrix} 8 & -16 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

deduciamo che $\text{Range}(F^2)$ è composto dai vettori del tipo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & -16 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}}_{F^2} \begin{bmatrix} \gamma \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\gamma - 16\sigma \\ -4\gamma + 8\sigma \end{bmatrix}$$

A questo punto, richiedere che sia verificata la condizione $\mathrm{Range}(F^2) \subseteq \mathrm{Range}(\mathbf{K})$ significa richiedere che, fissato un qualsiasi vettore del tipo $\begin{bmatrix} 8\gamma - 16\sigma \\ -4\gamma + 8\sigma \end{bmatrix}$, esistano due valori reali α e β tali che

$$\begin{bmatrix} 8\gamma - 16\sigma \\ -4\gamma + 8\sigma \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} -2\alpha - 8\beta \\ \alpha + 4\beta \end{bmatrix}$$

Questa relazione matriciale rappresenta un sistema lineare di 2 equazioni nelle 2 incognite α e β: la matrice dei coefficienti di questo sistema è la matrice di Kalman $\mathbf{K}$, che ha rango 1; di conseguenza, il sistema è compatibile ed ammette ∞ soluzioni, dal che deduciamo che, effettivamente, risulta $\mathrm{Range}(F^2) \subseteq \mathrm{Range}(\mathbf{K})$, ossia che il sistema è completamente controllabile, ossia che $X=X_C$.

Facciamo osservare che, se $\mathbf{K}$ avesse avuto rango 2, il sistema avrebbe ammesso 1 soluzione, il che avrebbe significato che $\mathrm{Range}(F^2) = \mathrm{Range}(\mathbf{K})$.

A conferma di quanto abbiamo trovato, vediamo di ragionare in termini di evoluzione dello stato del sistema. In primo luogo, avendo a che fare con un sistema di ordine 2, possiamo subito affermare che tutti gli eventuali stati raggiungibili (controllabili) sono raggiungibili (controllabili) in 2 passi. Inoltre, fissati l'istante iniziale τ=0 e lo stato iniziale x(0), lo stato del sistema in t=2 è dato da

$$x(2) = F^2 x(0) + FGu(0) + Gu(1)$$

Per quanto riguarda la raggiungibilità, dobbiamo porre x(0)=0, per cui questa relazione si riduce a

$$x(2) = FGu(0) + Gu(1) = \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \mathbf{K}\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Questo è un sistema lineare di 2 equazioni nelle 2 incognite u(1) e u(0): la matrice dei coefficienti di questo sistema è la matrice di Kalman $\mathbf{K}$, che ha rango 1; allora, il sistema risulta compatibile se e solo se la matrice completa

$$\begin{bmatrix} x_1(2) & -2 & -8 \\ x_2(2) & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ha a sua volta rango 1: la condizione perché questo accada è evidentemente che la colonna $\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix}$ sia linearmente dipendente dalle altre 2 e questo accade se e solo se risulta

$$x_1(2) + 2x_2(2) = 0$$

Possiamo allora concludere che solo gli stati che soddisfano questa condizione sono stati raggiungibili: a bene vedere, questa relazione è proprio quella che descrive il sottospazio di raggiungibilità X_r trovato prima, per cui abbiamo trovato la prima conferma dei ragionamenti analitici fatti in precedenza.

Passiamo adesso alla controllabilità: in questo caso, dobbiamo porre x(2)=0, per cui la relazione da considerare è

$$0 = F^2 x(0) + FGu(0) + Gu(1)$$

Da essa si ricava che

$$-F^2 x(0) = FGu(0) + Gu(1) = \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \mathbf{K}\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Sostituendo anche l'espressione di F^2, abbiamo che

$$-\begin{bmatrix} 8 & -16 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Ponendo allora genericamente

$$\begin{cases} \alpha = -8x_1(0) + 16x_2(0) \\ \beta = 4x_1(0) - 8x_2(0) = -\dfrac{1}{2}\alpha \end{cases}$$

quel sistema diventa

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}\alpha = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

La matrice dei coefficienti è sempre la matrice $\mathbf{K}$, che ha rango 1; in questo caso, il sistema è compatibile solo se la matrice completa

$$\begin{bmatrix} \alpha & -2 & -8 \\ \dfrac{\alpha}{2} & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ha a sua volta rango pari ad 1. La condizione perché questo accada è evidentemente che la prima colonna di quella matrice sia linearmente dipendente dalle altre 2 ed è facile accorgersi che questo accade per qualsiasi valore di α. Deduciamo perciò che tutti gli stati del sistema sono controllabili, ossia che, come trovato prima, il sistema è completamente controllabile.

Determinazione degli ingressi per il trasferimento del sistema

Il problema che ci poniamo adesso è il seguente: dato un sistema descritto da una equazione di stato nella forma $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$, come è possibile determinare l'ingresso che operi il trasferimento da e verso lo stato nullo?

Cominciamo dalla raggiungibilità: abbiamo prima trovato che il generico stato x(k) raggiungibile dopo k passi è dato da

$$x(k) = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{k-1}G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \dots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Questa relazione matriciale rappresenta un sistema di equazioni in cui le incognite (in numero k) sono i termini $u(k-1), u(k-2), \dots, u(0)$. Allora, se è stato preventivamente accertato che lo stato x(k) è raggiungibile, il sistema è senz'altro compatibile, in quanto la definizione di stato raggiungibile implica l'esistenza di almeno un ingresso che porti il sistema dallo stato nullo allo stato considerato. Di conseguenza, basta risolvere il sistema nelle incognite $u(k-1), u(k-2), ,. u(0)$ per determinare l'ingresso richiesto. Naturalmente, il sistema può ammettere più di una soluzione, ossia più di un ingresso che realizzi il trasferimento voluto, nello stesso numero di passi (=k): in questo caso, si può scegliere una qualsiasi tra le possibili soluzioni, ad esempio quella a norma minima.

Il discorso è ovviamente identico per la controllabilità: in questo caso, il sistema da considerare è

$$-F^k x(0) = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{k-1}G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \dots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

dove lo stato iniziale x(0) è quello in esame: se è stato accertato che si tratta di uno stato controllabile, allora il sistema è senz'altro compatibile e basta perciò risolverlo, ancora una volta rispetto alle incognite $u(k-1), u(k-2), ,. u(0)$, per determinare l'ingresso o gli ingressi che realizzano il trasferimento voluto.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1