“Teoria dei sistemi” - Capitolo 8
Raggiungibilità e controllabilità (2°)

Sistemi tempo-continui lineari tempo-invarianti

INTRODUZIONE

Nei paragrafi precedenti ci siamo occupati dello studio della raggiungibilità e della osservabilità con riferimento ai sistemi (tempo-continui) lineari, regolari e a dimensioni finite. Adesso restringiamo ulteriormente il campo di osservazione, aggiungendo l'ipotesi di tempo-invarianza.

I sistemi che consideriamo sono dunque descritti da una equazione di stato nella forma

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

dove U ed X sono spazi vettoriali di dimensione, rispettivamente, m ed n e dove anche l'insieme Ω delle funzioni di ingresso ammissibili è a sua volta uno spazio vettoriale.

Il primo risultato che ci interessa è stato già anticipato in precedenza: abbiamo infatti enunciato un teorema in base al quale, se il sistema lineare (oltre che regolare e a dimensioni finite) è periodico, allora, fissato un qualsiasi istante ξ, risulta che *l'insieme degli stati controllabili dall'istante x coincide con l'insieme degli stati raggiungibili all'istante x:* in altre parole, fissato un certo stato $x \in X$, se esiste una funzione di ingresso tale da portare il sistema da tale stato nello stato nullo, in un certo intervallo di tempo, allora esiste anche un'altra funzione di ingresso tale da riportare il sistema, partendo dallo stato nullo, nello stato x, in un certo intervallo di tempo e viceversa. Una particolarizzazione di questo risultato si ha se il sistema è anche tempo-invariante: infatti, abbiamo visto in precedenza che, data proprio la tempo-invarianza, risulta $X_C(\xi) = X_C$ e $X_r(\xi) = X_r$; d'altra parte, un sistema tempo-invariante è periodico di periodo qualsiasi, dal che deduciamo che $\boxed{X_C = X_r}$, il che significa che *tutti gli stati controllabili sono raggiungibili e viceversa*.

Il fatto che nei sistemi lineari, tempo-continui e tempo-invarianti (oltre che regolari a dimensioni finite), controllabilità e raggiungibilità coincidano fa si che, spesso, gli stati controllabili vengano definiti come quegli stati trasferibili nell'origine o raggiungibili nell'origine. Questo non deve però indurre a pensare che i due problemi siano sempre equivalenti, dato che questo non è assolutamente vero: basti pensare ai sistemi lineari, tempo-invarianti e tempo-discreti, nei quali si ha infatti che $X_C \supset X_r$ e non certo che $X_C = X_r$.

DETERMINAZIONE DEL SOTTOSPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ E CRITERIO DI KALMAN

Sia dato dunque il sistema descritto dall'equazione di stato nella forma

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

Sia X lo spazio di stato di questo sistema e sia n (numero intero positivo finito) la dimensione di tale spazio. Abbiamo in precedenza dimostrato che l'insieme X_r, contenente tutti e soli gli stati raggiungibili del sistema, è uno spazio vettoriale (che abbiamo chiamato "*sottospazio di* *raggiungibilità*”) di dimensione finita non superiore ad n. Ci chiediamo, allora, come si fa a determinare questo spazio vettoriale.

Fissato l’istante τ=0 come istante iniziale e un generico stato iniziale x(0), sappiamo che l’evoluzione temporale dello stato del sistema, in corrispondenza di un ingresso generico $u(\xi)$, è regolata dalla **formula di Lagrange**

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\xi)}Gu(\xi)d\xi$$

Vogliamo d’altra parte studiare gli stati raggiungibili del sistema, per cui lo stato iniziale da considerare è quello nullo: ponendo x(0)=0, abbiamo dunque che

$$x(t) = \int_0^t e^{F(t-\xi)}Gu(\xi)d\xi$$

Concentriamoci sulla matrice $e^{F(t-\xi)}$: in base al noto **teorema di Cayley-Hamilton**, sappiamo che questa matrice può essere espressa nella forma

$$e^{F(t-\xi)} = \alpha_0(t-\xi)I + \alpha_1(t-\xi)F + \alpha_2(t-\xi)F^2 + \ldots + \alpha_{n-1}(t-\xi)F^{n-1}$$

dove ricordiamo che n è l’ordine del sistema (pari all’ordine della matrice di stato F, ossia anche al grado del polinomio caratteristico di F), mentre $\alpha_0(t-\xi),\alpha_1(t-\xi),\alpha_2(t-\xi),\ldots,\alpha_{n-1}(t-\xi)$ sono coefficienti, funzioni di t-ζ, ossia funzioni di t-ζ. Allora, se sostituiamo l’espressione di $e^{F(t-\xi)}$ appena citata nell’espressione di x(t) e applichiamo la proprietà di linearità degli integrali definiti, otteniamo

$$x(t) = \int_0^t \alpha_0(t-\xi)Gu(\xi)d\xi + \int_0^t \alpha_1(t-\xi)FGu(\xi)d\xi + \ldots + \int_0^t \alpha_{n-1}(t-\xi)F^{n-1}Gu(\xi)d\xi$$

Per semplicità, consideriamo dapprima il caso in cui il sistema ha 1 solo ingresso (quindi <u>m=1</u>): ciò significa che $u(\xi)$ è una funzione scalare (cioè ad una sola componente) e che G è un vettore riga ad n componenti. Poniamo allora

$$\rho_0 = \int_0^t \alpha_0(t-\xi)u(\xi)d\xi$$

$$\rho_1 = \int_0^t \alpha_1(t-\xi)u(\xi)d\xi$$

....

$$\rho_{n-1} = \int_0^t \alpha_{n-1}(t-\xi)u(\xi)d\xi$$

Queste quantità $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ sono evidentemente dei numeri e prendono il nome di “**prodotti scalari**”. Usando questi prodotti scalari, possiamo esprimere x(t) nella forma

$$x(t) = G\rho_0 + FG\rho_1 + F^2G\rho_2 + \dots + F^{n-1}G\rho_{n-1}$$

o anche, in forma matriciale, come

$$x(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \\ \dots \\ \rho_{n-1} \end{bmatrix}$$

Questa relazione matriciale, una volta fissato il valore di x(t) (cioè il valore numerico delle sue componenti), rappresenta un sistema lineare di n equazioni in n incognite, che sono appunto gli n prodotti scalari $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$. La matrice dei coefficienti di questo sistema è $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$ e prende il nome di “**matrice di raggiungibilità**” per evidenti motivi.

Il sistema può o meno essere compatibile: è chiaro che, indicato con $\overline{x}$ il valore numerico dello stato considerato, il sistema è compatibile se e solo se

$$\overline{x} \in \mathrm{Range}\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix} = \mathrm{Range}\mathbf{K}$$

La conclusione cui siamo arrivati è dunque che *uno stato $\overline{x} \in X$ è raggiungibile se e solo se $\overline{x} \in \mathrm{Range}\mathbf{K}$, il che significa che il sottospazio di raggiungibilità è* $\boxed{X_r = \mathrm{Range}\mathbf{K}}$.

Quindi, la determinazione del sottospazio di raggiungibilità del sistema in esame corrisponde alla determinazione del range della matrice di raggiungibilità $\mathbf{K}$. Questo significa, in particolare, che la dimensione di X_r (cioè il numero massimo di vettori linearmente indipendenti che si possono trovare in tale spazio) è pari al rango della matrice di raggiungibilità.

Naturalmente, la conseguenza più immediata di questo risultato riguarda la completa raggiungibilità: intanto, dire che un sistema è completamente raggiungibile significa dire che tutti i suoi stati sono raggiungibili, ossia che $X = X_r$; allora, avendo trovato che $X_r = \mathrm{Range}\mathbf{K}$, è chiaro che la completa raggiungibilità del sistema corrisponde alla situazione per cui $X = \mathrm{Range}\mathbf{K}$; perché questa condizione sia verificata, la matrice $\mathbf{K}$ deve avere rango pari all’ordine di X, ossia rango pari ad n.

Quanto detto fino ad ora vale nel caso in cui il sistema abbia un solo ingresso, ossia nel caso in cui m=1. Vediamo allora se e come cambiano le cose nel caso di <u>m generico</u>.

Partiamo sempre dalla relazione

$$x(t) = \int_0^t \alpha_0(t-\xi)Gu(\xi)d\xi + \int_0^t \alpha_1(t-\xi)FGu(\xi)d\xi + \dots + \int_0^t \alpha_{n-1}(t-\xi)F^{n-1}Gu(\xi)d\xi$$

Se il sistema ha m ingressi, la quantità $u(\xi)$ è una funzione ad m componenti e G è una matrice di ordine n*m. Allora, se poniamo ancora una volta

$$\rho_0 = \int_0^t \alpha_0(t-\xi)u(\xi)d\xi$$
$$\rho_1 = \int_0^t \alpha_1(t-\xi)u(\xi)d\xi$$
$$\dots.$$
$$\rho_{n-1} = \int_0^t \alpha_{n-1}(t-\xi)u(\xi)d\xi$$

possiamo continuare ad esprimere x(t) nella forma

$$x(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \\ \dots \\ \rho_{n-1} \end{bmatrix}$$

con la differenza che, adesso, i prodotti scalari $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ sono dei vettori ad m componenti e non più degli scalari. Allora, quella relazione matriciale, per $x(t) = \bar{x}$ fissato, rappresenta ancora un sistema di n equazioni, ma in n*m incognite, costituite appunto dai prodotti scalari $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$. La matrice dei coefficienti di questo sistema è sempre la matrice di raggiungibilità $\mathbf{K}$, la quale è costituita da n blocchi, ciascuno di dimensione n*m (la verifica di questo è immediata). Il sistema, inoltre, è compatibile, ancora una volta, se e solo se $\bar{x} \in \mathrm{Range}\mathbf{K}$, per cui non è cambiato niente rispetto al caso visto prima (con l'eccezione che i prodotti scalari sono adesso vettori ad m componenti e non più degli scalari). Concludiamo, perciò, enunciando il seguente "**criterio di completa raggiungibilità**", dovuto a **Kalman**:

Teorema - *Dato un sistema descritto dall'equazione di stato* $\dot{x} = Fx + Gu$, *il sistema è completamente raggiungibile se e solo se* $X = \mathrm{Range}\mathbf{K}$, *ossia se il rango della matrice di raggiungibilità è massimo (cioè pari all'ordine del sistema)*

Prima di passare alla controllabilità, soffermiamoci un attimo sul seguente aspetto: abbiamo detto che, una volta fissato lo stato $\bar{x} \in X$ di interesse, se risulta $\bar{x} \in \mathrm{Range}\mathbf{K}$, tale stato è raggiungibile, per cui il sistema

$$\bar{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \\ \dots \\ \rho_{n-1} \end{bmatrix}$$

risulta compatibile: risolvendo il sistema, si ottengono gli n prodotti scalari $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ e, da questi, è necessario risalire alla funzione di ingresso $u(\xi)$ che realizzi il trasferimento desiderato, ossia che porti il sistema dallo stato nullo allo stato $\bar{x}$: per il momento, questa funzione è definita nell'intervallo [0,t] solo mediante i suoi prodotti con le funzioni $\alpha_0(t-\xi), \alpha_1(t-\xi), \alpha_2(t-\xi), \dots, \alpha_{n-1}(t-\xi)$; ma queste funzioni, per definizione, sono linearmente indipendenti tra di loro: ciò comporta che esistano infinite funzioni $u(\xi)$ che soddisfano le relazioni

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \int_0^t \alpha_0(t-\xi)u(\xi)d\xi \\ \rho_1 &= \int_0^t \alpha_1(t-\xi)u(\xi)d\xi \\ &\dots\dots \\ \rho_{n-1} &= \int_0^t \alpha_{n-1}(t-\xi)u(\xi)d\xi \end{aligned}$$

con $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ che sono adesso dei numeri fissati. Quindi, esistono infinite funzioni che operano il trasferimento desiderato. La scelta va fatta in base alle specifiche che si anno: per esempio, si può ipotizzare che le m componenti dell'ingresso siano delle combinazioni lineari delle funzioni $\alpha_0(t-\xi), \alpha_1(t-\xi), \dots, \alpha_{n-1}(t-\xi)$, il che significa supporre che

$$u_k(\xi) = c_{k0}\alpha_0(t-\xi) + c_{k1}\alpha_1(t-\xi) + c_{k2}\alpha_2(t-\xi) + \dots + c_{kn-1}\alpha_{n-1}(t-\xi) \qquad k = 1, \dots\dots, m$$

Imponendo che queste m funzioni soddisfino i valori dei prodotti scalari precedentemente determinati, si ottiene un sistema le cui incognite sono proprio i coefficienti c_{kj} delle combinazioni lineari, che quindi possono essere determinati. Negli esempi che faremo tra poco, questo aspetto sarà analizzato nei dettagli.

LA CONTROLLABILITÀ

Per quanto riguarda la controllabilità nei sistemi (regolari a dimensioni finite) tempo-continui, lineari e tempo-invarianti, abbiamo poco da dire, in quanto abbiamo in precedenza appurato che essa coincide con la raggiungibilità, nel senso che, per tali sistemi, risulta $X_C = X_r$, ossia risulta che tutti gli stati controllabili sono anche raggiungibili e viceversa. Di conseguenza, le considerazioni da fare sono le stesse:

- in primo luogo, il sottospazio di controllabilità si ottiene in base alla relazione $\boxed{X_C = \text{Range}\mathbf{K}}$, il che spiega per quale motivo la matrice **K** prenda anche il nome di "**matrice di controllabilità**";

- in secondo luogo, sussiste il seguente "**criterio di completa controllabilità**":

Teorema - *Dato un sistema descritto dall'equazione di stato $\dot{x} = Fx + Gu$, il sistema è completamente controllabile se e solo se il rango della matrice K è massimo (cioè pari all'ordine del sistema)*

Ad ogni modo, esaminiamo nei dettagli il problema della controllabilità così come abbiamo fatto per la raggiungibilità.

Fissato l'istante τ=0 come istante iniziale e un generico stato iniziale x_0, l'evoluzione temporale dello stato del sistema, in corrispondenza di un ingresso generico $u(\xi)$, è regolata dalla relazione

$$x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\xi)}Gu(\xi)d\xi$$

Siamo interessati agli stati controllabili, ossia a quegli stati partendo dai quali si riesca a portare il sistema nello stato nullo: posto allora t=T (dove T è l'ampiezza, finita, dell'intervallo necessario per il trasferimento del sistema) e x(t)=0, per cui

$$0 = e^{FT}x_0 + \int_0^T e^{F(T-\xi)}Gu(\xi)d\xi$$

La matrice e^{FT} è una matrice invertibile per qualunque valore di T, per cui possiamo esplicitare x_0:

$$-x_0 = \left(e^{FT}\right)^{-1}\int_0^T e^{F(T-\xi)}Gu(\xi)d\xi = e^{-FT}\int_0^T e^{F(T-\xi)}Gu(\xi)d\xi = \int_0^T e^{-F\xi}Gu(\xi)d\xi$$

Applicando ancora una volta il teorema di Cayley-Hamilton, possiamo scrivere che

$$e^{-F\xi} = \alpha_0(-\xi)I + \alpha_1(-\xi)F + \alpha_2(-\xi)F^2 + \ldots + \alpha_{n-1}(-\xi)F^{n-1}$$

per cui, sostituendo nell'espressione di x_0 e applicando la proprietà di linearità degli integrali definiti, otteniamo

$$-x_0 = \int_0^T \alpha_0(-\xi)Gu(\xi)d\xi + \int_0^T \alpha_1(-\xi)FGu(\xi)d\xi + \int_0^T \alpha_2(-\xi)F^2Gu(\xi)d\xi + \ldots + \int_0^T \alpha_{n-1}(-\xi)F^{n-1}Gu(\xi)d\xi$$

Facciamo adesso le seguenti posizioni:

$$\rho_0 = \int_0^t \alpha_0(-\xi)u(\xi)d\xi$$

$$\rho_1 = \int_0^t \alpha_1(-\xi)u(\xi)d\xi$$

....

$$\rho_{n-1} = \int_0^t \alpha_{n-1}(-\xi)u(\xi)d\xi$$

Queste quantità $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$ sono ancora dei "**prodotti scalari**" e, nel caso generale di sistema con m ingressi, sono vettori ad m componenti. Usando questi prodotti scalari, possiamo esprimere x_0 nella forma

$$-x_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \ldots & F^{n-1}G \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \\ \ldots \\ \rho_{n-1} \end{bmatrix}$$

Questa relazione matriciale, una volta fissato il valore di x_0, rappresenta un sistema lineare di n equazioni in m*n incognite, che sono appunto i prodotti scalari $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$. La matrice dei coefficienti di questo sistema è ancora una volta la matrice $\mathbf{K}$, la quale, come detto, prende anche il nome di "**matrice di raggiungibilità**".

Il sistema può o meno essere compatibile: il sistema è compatibile se e solo se

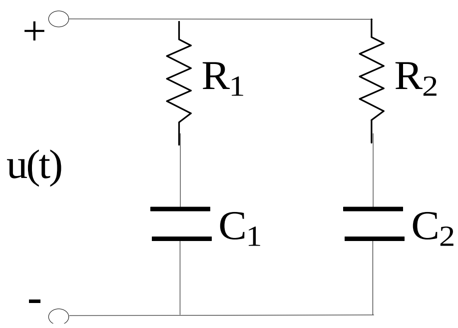
$$x_0 \in \text{Range}\mathbf{K}$$

il che significa, come anticipato, che *uno stato $x_0 \in X$ è controllabile se e solo se $x_0 \in \text{Range}\mathbf{K}$, il che significa che il sottospazio di controllabilità è $\boxed{X_C = \text{Range}\mathbf{K}}$.*

Naturalmente, anche qui, la conseguenza più immediata è il criterio di Kalman, enunciato prima, circa la completa controllabilità del sistema.

ESEMPIO

Consideriamo il seguente circuito elettrico:



L'ingresso al sistema è rappresentato dalla tensione u(t); le variabili di stato sono ovviamente le tensioni $x_1 = v_{C1}$ e $x_2 = v_{C2}$ ai capi dei condensatori. Non consideriamo alcuna uscita visto che i problemi di raggiungibilità e osservabilità non interessano questo aspetto del sistema.

Applicando la LKT e le relazioni di lato di resistore e condensatore, è immediato trovare che

$$\begin{cases} u = R_1C_1\dot{x}_1 + x_1 \\ u = R_2C_2\dot{x}_2 + x_2 \end{cases}$$

per cui l'equazione di stato del sistema, scritta in forma esplicita, è

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{R_1C_1}x_1 + \dfrac{1}{R_1C_1}u \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{R_2C_2}x_2 + \dfrac{1}{R_2C_2}u \end{cases}$$

In forma matriciale, abbiamo invece che

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1C_1} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1C_1} \\ \dfrac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}$$

Andiamo a determinare la matrice di raggiungibilità del sistema: essendo n=2 l'ordine del sistema, si tratta della matrice $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix}$ e, facendo il prodotto FG, risulta

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1C_1} & -\dfrac{1}{R_1^2C_1^2} \\ \dfrac{1}{R_2C_2} & -\dfrac{1}{R_2^2C_2^2} \end{bmatrix}$$

Ci interessiamo, per prima cosa, al rango di questa matrice: essendoci almeno un elemento non nullo nella matrice, deduciamo che il rango è 1 oppure 2 se il determinante è diverso da zero; il determinante di quella matrice è

$$\det \mathbf{K} = -\frac{1}{R_1C_1}\frac{1}{R_2^2C_2^2} + \frac{1}{R_1^2C_1^2}\frac{1}{R_2C_2}$$

ed esso è diverso da zero solo se $R_1C_1 \neq R_2C_2$. Allora, in base al criterio di Kalman, deduciamo subito che il sistema è completamente raggiungibile e completamente controllabile se e solo se $R_1C_1 \neq R_2C_2$.

Supponiamo allora che sia $R_1C_1 = 1$ e $R_2C_2 = \frac{1}{2}$, per cui il sistema è completamente raggiungibile e controllabile e la matrice di raggiungibilità è

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Consideriamo un generico stato $\overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix} \in X$: questo stato, in base a quanto detto, è raggiungibile dal sistema; vogliamo allora determinare la tensione di ingresso u(t) che porti il sistema in tale stato (partendo ovviamente dallo stato nullo) dopo un tempo T fissato.

Per risolvere questo problema, dobbiamo intanto individuare il valore numerico dei prodotti scalari, che in questo caso sono ρ_0 e ρ_1: questi prodotti scalari si ottengono risolvendo il sistema

$$K\begin{bmatrix}\rho_0\\ \rho_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{bmatrix}$$

che rappresenta, in pratica, l'equazione del movimento del sistema in termini di prodotti scalari. Avendo detto che la matrice di raggiungibilità è non singolare, abbiamo facilmente che

$$\begin{bmatrix}\rho_0\\ \rho_1\end{bmatrix}=\mathbf{K}^{-1}\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\det\mathbf{K}}\left(\mathrm{adj}\,\mathbf{K}\right)\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{bmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1/2\\ 1 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{bmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases}\rho_0=2\overline{x}_1-\dfrac{1}{2}\overline{x}_2\\ \rho_1=\overline{x}_1-\dfrac{1}{2}\overline{x}_2\end{cases}$$

Questi sono dunque i valori dei due prodotti scalari necessari per ottenere lo stato $\overline{x}$ a partire dallo stato nullo. A questo punto, la funzione di ingresso che stiamo cercando è quella che soddisfa le due condizioni

$$\rho_0=\int_0^T\alpha_0(T-\xi)u(\xi)d\xi$$
$$\rho_1=\int_0^T\alpha_1(T-\xi)u(\xi)d\xi$$

Per imporre tali condizioni, dobbiamo determinare le funzioni $\alpha_0(t-\xi),\alpha_1(t-\xi)$: queste funzioni sono legate alla matrice e^{Ft} dalla relazione

$$e^{Ft}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)F$$

Gli autovalori della matrice di stato $F=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ sono chiaramente -1 e -2, per cui le condizioni da imporre per determinare $\alpha_0(t-\xi)$ e $\alpha_1(t-\xi)$ sono

$$\begin{cases}e^{-t}=\alpha_0(t)-\alpha_1(t)\\ e^{-2t}=\alpha_0(t)-2\alpha_1(t)\end{cases}$$

Da questo sistema si ricava facilmente che

$$\begin{cases}\alpha_1(t)=e^{-t}-e^{-2t}\\ \alpha_0(t)=2e^{-t}-e^{-2t}\end{cases}$$

Note queste funzioni, dobbiamo scegliere una forma d'onda dell'ingresso tale da soddisfare i valori trovati prima per i due prodotti scalari: possiamo per esempio supporre che l'ingresso sia del tipo

$$u(\xi) = c_0\alpha_0(T-\xi) + c_1\alpha_1(T-\xi)$$

per cui dobbiamo calcolare i coefficienti scalari c_0 e c_1. Le due condizioni, come detto, sono

$$\rho_0 = 2\overline{x}_1 - \frac{1}{2}\overline{x}_2 = \int_0^T \alpha_0(T-\xi)u(\xi)d\xi$$
$$\rho_1 = \overline{x}_1 - \frac{1}{2}\overline{x}_2 = \int_0^T \alpha_1(T-\xi)u(\xi)d\xi$$

Sostituendo l'espressione che abbiamo scelto per l'ingresso, otteniamo

$$2\overline{x}_1 - \frac{1}{2}\overline{x}_2 = \int_0^T \alpha_0(T-\xi)[c_0\alpha_0(T-\xi) + c_1\alpha_1(T-\xi)]d\xi$$
$$\overline{x}_1 - \frac{1}{2}\overline{x}_2 = \int_0^T \alpha_1(T-\xi)[c_0\alpha_0(T-\xi) + c_1\alpha_1(T-\xi)]d\xi$$

Queste due relazioni, da riscrivere in modo opportuno, costituiscono un sistema di 2 equazioni nelle incognite c_0 e c_1: in generale, si tratterà di un sistema nella forma

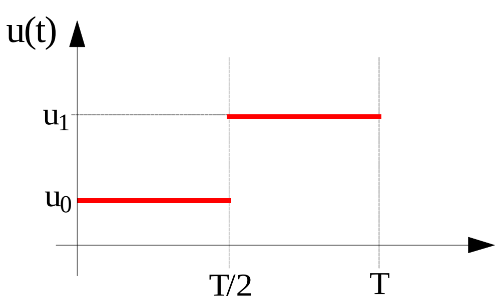
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \end{bmatrix}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è senz'altro invertibile, in quanto le funzioni $\alpha_0(t-\xi)$ e $\alpha_1(t-\xi)$ sono indipendenti per definizione: si può perciò scrivere che

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \end{bmatrix}$$

ed il problema è così risolto.

Naturalmente, quello trovato è solo 1 tra gli ∞ possibili ingressi che realizzano il trasferimento voluto, ossia che portano il sistema, in un intervallo di ampiezza T, dallo stato nullo allo stato $\overline{x}$ voluto. Per esempio, anziché scegliere un ingresso nella forma $u(\xi) = c_0\alpha_0(T-\xi) + c_1\alpha_1(T-\xi)$, possiamo pensare di scegliere un ingresso costante a tratti del tipo indicato nella figura seguente:



Analiticamente, questo ingresso è rappresentabile nel modo seguente:

$$u(\xi) = \begin{cases} u_0 & \xi \in \left[0, \frac{T}{2}\right[\\ u_1 & \xi \in \left[\frac{T}{2}, T\right[\end{cases}$$

Allora, in questo caso le due condizioni

$$\rho_0 = \int_0^T \alpha_0(T-\xi)u(\xi)d\xi$$
$$\rho_1 = \int_0^T \alpha_1(T-\xi)u(\xi)d\xi$$

diventano

$$\rho_0 = \int_0^{T/2} \alpha_0(T-\xi)u_0 d\xi + \int_{T/2}^{T} \alpha_0(T-\xi)u_1 d\xi$$
$$\rho_1 = \int_0^{T/2} \alpha_1(T-\xi)u_0 d\xi + \int_{T/2}^{T} \alpha_1(T-\xi)u_1 d\xi$$

e permettono di determinare i valori u_0 e u_1 che definiscono in modo univoco l'ingresso voluto.

ESEMPIO

Sia dato un sistema $\dot{x} = Fx + Gu$ in cui le matrici di stato e di ingresso siano rispettivamente

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vogliamo determinare il sottospazio di raggiungibilità X_r di questo sistema.

Cominciamo con l'individuazione della matrice di raggiungibilità: essendo n=3, si tratta della matrice

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G \end{bmatrix}$$

La matrice G è nota, per cui dobbiamo determinare le matrici FG e F^2G:

$$FG = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{LC} \\ 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}$$

$$F^2G = F(FG) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{LC} \\ 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{L^2C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo dunque costruire la matrice di raggiungibilità:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{LC} & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & -\frac{2}{L^2C} \\ 0 & \frac{1}{LC} & 0 \end{bmatrix}$$

I vettori colonna da cui è composta questa matrice generano il sottospazio di raggiungibilità X_r: questo significa che una base di X_r è costituita dall'insieme dei vettori colonna della matrice K che siano linearmente indipendenti e tali che tutti gli altri vettori colonna di K possano esprimersi come loro combinazioni lineari: si osserva subito che la matrice K ha rango 2, il che significa che solo 2 delle 3 colonne sono linearmente indipendenti. Di conseguenza, possiamo ad esempio scrivere che

$$X_r = sp\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{LC} \\ 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}$$

Forme canoniche

INTRODUZIONE

Come per il problema della stabilità, anche per i problemi della raggiungibilità e della controllabilità esistono particolari "forme canoniche" (cioè particolari strutture delle matrici che definiscono il sistema) che mettono in evidenza le proprietà appunto di raggiungibilità e di osservabilità del sistema stesso. Naturalmente, mentre, per la stabilità, le forme canoniche riguardavano solo la struttura della matrice F (si pensi alla forma canonica di Jordan), ora le forme canoniche riguardano la struttura della coppia di matrici (F,G).

Il problema della determinazione di queste forme canoniche è, essenzialmente, il problema dell'analisi del cambiamento della struttura delle matrici F e G conseguente ad un cambiamento della base dello spazio di stato X.

Consideriamo perciò un sistema (regolare a dimensioni finite) tempo-continuo, lineare e tempo-invariante rappresentato da una equazione di stato nella forma

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

Consideriamo inoltre una matrice T quadrata di ordine n: per il momento, non facciamo alcuna ipotesi su tale matrice, salvo il fatto che sia non singolare, ossia che $\det T \neq 0$. Sulla base di questa matrice, consideriamo la trasformazione

$$x = Tz$$

Questa trasformazione "trasforma" appunto il vettore di stato x (inteso come n-pla di numeri rappresentanti le coordinate dello stato rispetto ad una certa base B_1) nel nuovo vettore $z = T^{-1}x$ ((inteso come n-pla di numeri rappresentanti le coordinate dello stato rispetto ad una nuova base B_2). Sostituendo questa espressione di x nell'equazione di stato del sistema, otteniamo

$$T\dot{z} = FTz + Gu$$

Essendo T non singolare, possiamo pre-moltiplicare ambo i membri per T^{-1}, ottenendo

$$\dot{z} = T^{-1}FTz + T^{-1}Gu$$

A questo punto, se poniamo

$$\hat{F} = T^{-1}FT$$

$$\hat{G} = T^{-1}G$$

possiamo riscrivere quella equazione come

$$\boxed{\dot{z} = \hat{F}z + \hat{G}u}$$

Questa equazione rappresenta una nuova rappresentazione, in forma di stato, dello stesso sistema di partenza: la differenza con l'equazione $\dot{x} = Fx + Gu$ è solo nel fatto che abbiamo cambiato il riferimento rispetto al quale consideriamo lo stato del sistema stesso. Si dice che il sistema $\dot{x} = Fx + Gu$ ed il sistema $\dot{z} = \hat{F}z + \hat{G}u$, per come è stato costruito quest'ultimo, sono "*(algebricamente) equivalenti*" tra di loro.

E' ovvio che la struttura della nuova matrice di stato $\hat{F}$ e della nuova matrice di ingresso $\hat{G}$ dipende sia dalla struttura delle matrici iniziali F e G sia anche da quella della matrice T scelta per operare la trasformazione. Allora *l'obbiettivo che ci poniamo è quello di trovare una matrice T che porti ad una coppia di matrici $\hat{F},\hat{G}$ tali che le proprietà di raggiungibilità e/o di controllabilità del sistema siano immediatamente deducibili.*

E' chiaro, infatti, così come abbiamo già visto per la stabilità, che le proprietà di raggiungibilità e di controllabilità del sistema sono assolutamente indipendenti dalla base scelta per rappresentare gli elementi di X, per cui il nostro obbiettivo è solo quello di evidenziare, nel modo più immediato possibile, queste proprietà nelle matrici $\hat{F},\hat{G}$.

SCOMPOSIZIONE CANONICA DI KALMAN PER LA RAGGIUNGIBILITÀ

La prima forma canonica cui ci interessiamo è basata sulla decomposizione dello spazio di stato in sottospazio di raggiungibilità X_r e in sottospazio di non raggiungibilità X_{nr} (ricordiamo, a tale proposito, che sussiste la relazione $X_{nr} \oplus X_r = X$).

Partiamo dal sistema rappresentato dall'equazione

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

La conoscenza della coppia di matrici (F,G) ci consente di individuare la "*matrice di raggiungibilità*" del sistema, definita dalla relazione

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$$

Questa matrice è importante in quanto sappiamo che $X_r = \text{Range}\mathbf{K}$: questo significa, tra le altre cose, che il rango di $\mathbf{K}$ corrisponde alla dimensione del *sottospazio di raggiungibilità* X_r. Posto allora $r = \text{rango}\mathbf{K} = \rho(\mathbf{K})$, possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} r &= \dim(X_r) \\ n - r &= \dim(X_{nr}) \end{aligned}$$

dove ricordiamo che X_{nr} è il "*sottospazio di non raggiungibilità*" del sistema, ossia l'insieme dei vettori di X che non sono raggiungibili e che sono ortogonali ai vettori di X_r.

A questo punto, consideriamo una qualsiasi base del sottospazio di raggiungibilità X_r: indichiamo con $(p_1, p_2, \dots, p_r)$ i vettori che costituiscono tale base. Usiamo questi vettori per costruire le prima r colonne della matrice di trasformazione T:

$$T = [p_1 \mid p_2 \mid \dots \mid p_r \mid \dots\dots]$$

La matrice T è una matrice quadrata di ordine n, per cui restano da riempire altre n-r colonne; queste colonne devono essere indipendenti tra di loro e indipendenti anche dalle altre: fanno allora al caso nostro gli n-r vettori che costituiscono una qualsiasi base di X_{nr}: indicati con $(p_{r+1}, p_{r+2}, \dots, p_n)$ tali vettori, abbiamo dunque che

$$T = \left[\underbrace{p_1 \mid p_2 \mid \dots \mid p_r}_{\substack{\text{base di } X_r \\ \text{(r vettori)}}} \quad \underbrace{p_{r+1} \mid p_{r+2} \mid \dots \mid p_n}_{\substack{\text{base di } X_{nr} \\ \text{(n-r vettori)}}} \right]$$

Questa matrice, per come è stata costruita, è senz'altro non singolare, per cui può essere usata come matrice per la trasformazione $z = T^{-1}x$ che porta il sistema nella forma

$$\dot{z} = \hat{F}z + \hat{G}u$$

dove

$$\hat{F} = T^{-1}FT$$
$$\hat{G} = T^{-1}G$$

Vediamo perciò di capire quali sono le proprietà di questa nuova rappresentazione, che prende il nome di "**scomposizione canonica di Kalman rispetto alla raggiungibilità**".

Intanto, per come abbiamo costruito la matrice T, possiamo scrivere che

$$x = Tz = z_1 p_1 + z_2 p_2 + \dots + z_n p_n$$

Questa relazione dice, in pratica, che il generico stato x viene espresso come combinazione lineare di n componenti, secondo opportuni coefficienti, delle quali le prime r sono rispetto ad una base di X_r, mentre le restanti n-r sono rispetto ad una base X_{nr}. Possiamo allora pensare di partizionare il vettore z nel modo seguente:

$$z = \begin{bmatrix} z_A \\ z_B \end{bmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \text{r componenti} \\ \longleftarrow \text{n - r componenti} \end{matrix}$$

Il blocco z_A racchiude le componenti di z corrispondenti alla base di X_r, ossia rappresenta le coordinate del vettore di stato rispetto a X_r, mentre il blocco z_B racchiude le componenti di z corrispondenti alla base di X_{nr}, ossia rappresenta le coordinate del vettore di stato rispetto a X_{nr}.

Cerchiamo adesso di partizionare tutta l'equazione di stato $\dot{z} = \hat{F}z + \hat{G}u$ in accordo alla partizione scelta per z: abbiamo che

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_A \\ \dot{z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{AA} & \hat{F}_{AB} \\ \hat{F}_{BA} & \hat{F}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_A \\ z_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{G}_A \\ \hat{G}_B \end{bmatrix} u$$

A questo punto, è possibile dimostrare che, *in questa rappresentazione, i blocchi $\hat{F}_{BA}$ e $\hat{G}_B$ contengono solo elementi nulli.*

Possiamo perciò riscrivere quella equazione matriciale a blocchi nella forma

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{z}_A \\ \dot{z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{AA} & \hat{F}_{AB} \\ 0 & \hat{F}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_A \\ z_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{G}_A \\ 0 \end{bmatrix} u}$$

Se la scriviamo in forma esplicita, questa relazione corrisponde a

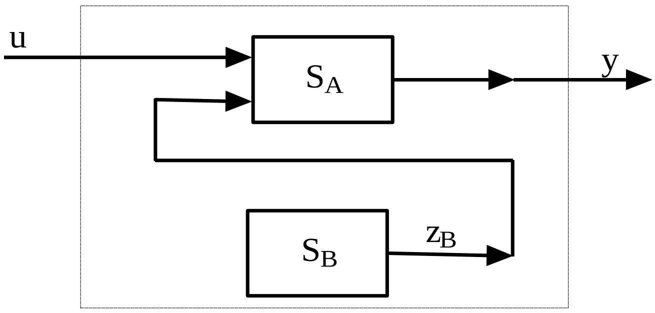
$$\begin{cases} \dot{z}_A = \hat{F}_{AA} z_A + \hat{F}_{AB} z_B + \hat{G}_A u \\ \dot{z}_B = \hat{F}_{BB} z_B \end{cases}$$

Queste sono due equazioni differenziali corrispondenti, rispettivamente, ad r e ad n-r equazioni differenziali scalari. Possiamo pensare a queste due equazioni come alle equazioni di stati di due sottosistemi distinti e interconnessi tra di loro per formare il sistema complessivo:

$$\dot{z}_A = \hat{F}_{AA} z_A + \hat{F}_{AB} z_B + \hat{G}_A u : \quad \text{sottosistema } S_A \begin{cases} \text{vettore di stato } z_A \\ \text{ingressi } z_B \text{ e } u \end{cases}$$

$$\dot{z}_B = \hat{F}_{BB} z_B : \quad \text{sottosistema } S_B \begin{cases} \text{vettore di stato } z_B \\ \text{ingresso nullo} \end{cases}$$

Il seguente diagramma a blocchi aiuta a capire l'interconnessione tra questi due sottosistemi:



Si osserva subito, dalle equazioni di stato dei due sottosistemi, che S_B è un sistema autonomo (nel quale, cioè, l'ingresso non ha alcuna influenza sullo stato) di ordine $n-r$. Ciò significa che, fissato lo stato z_B di partenza per questo sottosistema, esso rimane in tale stato a prescindere da quale sia l'ingresso u applicato dall'esterno. L'immediata conseguenza di ciò è chiaramente che l'unico stato raggiungibile del sottosistema S_B è lo stato nullo, visto che tale sottosistema, partendo da $z_B=0$, non può che rimanere in tale stato a prescindere dall'ingresso applicato. Possiamo allora affermare, in base alle definizioni date in precedenza, che ***S_B è un sottosistema completamente non raggiungibile.***

Diversa è invece la situazione per il sottosistema S_A (di ordine r) : facciamo infatti vedere che ***S_A è un sottosistema completamente raggiungibile.***

Intanto, la matrice di raggiungibilità del sistema $\dot{z} = \hat{F}z + \hat{G}u$ è

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{F}\hat{G} & \hat{F}^2\hat{G} & \dots & \hat{F}^{n-1}\hat{G} \end{bmatrix}$$

Usando la partizione prima ottenuta per $\hat{F}$ e $\hat{G}$, possiamo scrivere che

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \hat{G}_A & \hat{F}_{AA}\hat{G}_A & \hat{F}_{AA}^2\hat{G}_A & \dots & \hat{F}_{AA}^r\hat{G}_A & \dots & \hat{F}_{AA}^{n-1}\hat{G}_A \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo che il rango di questa matrice deve essere pari alla dimensione del sottospazio di raggiungibilità X_r del sistema: questo sottospazio non dipende dalla rappresentazione utilizzata per lo spazio di stato, per cui la sua dimensione è sempre r; di conseguenza, anche la matrice $\hat{\mathbf{K}}$, così come la matrice $\mathbf{K}$, ha rango r.

I blocchi nulli che compaiono nella espressione di $\hat{\mathbf{K}}$ non incidono ovviamente sul suo rango; d'altra parte, in base al teorema di Cayley-Hamilton, possiamo affermare che anche i blocchi $\hat{F}_{AA}^{r+1}\hat{G}_A, \hat{F}_{AA}^{r+2}\hat{G}_A, \ldots, \hat{F}_{AA}^{n-1}\hat{G}_A$ non incidono su tale rango. Di conseguenza, la matrice che ha rango r è la matrice

$$\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \hat{G}_A & \hat{F}_{AA}\hat{G}_A & \hat{F}_{AA}^2\hat{G}_A & \ldots & \hat{F}_{AA}^r\hat{G}_A \end{bmatrix}$$

A ben vedere, questa matrice $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{A}}$ è la matrice di raggiungibilità del sottosistema S_A: il fatto che la matrice abbia rango r e che anche l'ordine di S_A sia pari ad r ci dice che S_A è un sottosistema completamente raggiungibile, come volevamo dimostrare.

Quindi, preso un qualsiasi stato $s_A \in X_A$ di questo sottosistema, siamo certi che esista una funzione di ingresso $u(\bullet)$ che, in un intervallo di tempo finito, trasferisca il sistema dallo stato nullo in tale stato.

In conclusione, *l'utilità della scomposizione canonica di Kalman è quella di scomporre il sistema complessivo S in una parte (S_A) completamente raggiungibile e in una parte (S_B) completamente non raggiungibile.*

Naturalmente, non è detto che esistano entrambi S_A ed S_B:

- se il sistema è completamente raggiungibile, è chiaro che n=r, il che significa che $S=S_A$;
- se il sistema è completamente non raggiungibile, è chiaro che r=0, il che significa che $S=S_B$.

(pag. 272) Ricordiamo, inoltre, che *la scomposizione canonica di Kalman del sistema* $\dot{x} = Fx + Gu$ *non è unica, visto che c'è la più totale libertà per la scelta delle basi di X_r e X_{nr} con cui costruire la matrice di trasformazione T.*

Inoltre, al contrario di altre scomposizione che vedremo più avanti, essa è valida per sistemi con un numero m di ingressi qualsiasi.

Legame ingresso-uscita e matrice di trasferimento

Un'altra osservazione importante sulla scomposizione canonica di Kalman riguarda il legame ingresso-uscita: in base alla interconnessione tra S_A ed S_B, si osserva che, se si cerca il legame ingresso-uscita in corrispondenza di stato nullo (cioè in corrispondenza di z_A=0 e z_B=0), questo legame è influenzato SOLO dalle proprietà di S_A, mentre non è in alcun modo influenzato da quella di S_B. Possiamo visualizzare la cosa anche da un punto di vista analitico.

Le equazioni rappresentative del sistema, prima della trasformazione, sono

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases}$$

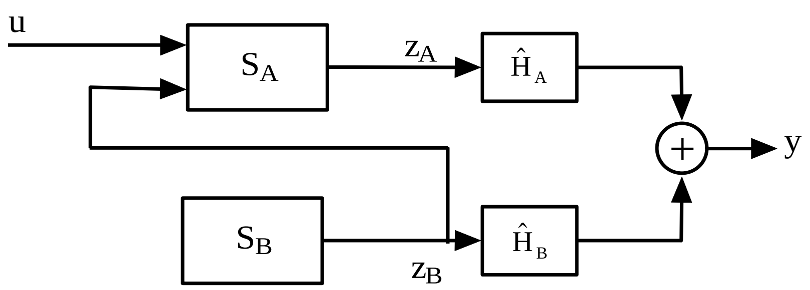
Mediante la trasformazione $x = Tz$, abbiamo visto che l'equazione di stato diventa $\dot{z} = \hat{F}z + \hat{G}u$, mentre è immediato verificare che quella di uscita diventa

$$y = \hat{H}z$$

dove si è posto $\hat{H} = HT$. Partizionando ancora una volta lo stato nella forma $z = \begin{bmatrix} z_A \\ z_B \end{bmatrix}$, otteniamo una equazione di uscita nella forma

$$y = \begin{bmatrix} \hat{H}_A & \hat{H}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_A \\ z_B \end{bmatrix} = \hat{H}_A z_A + \hat{H}_B z_B$$

Mentre abbiamo visto che le matrici $\hat{F}$ e $\hat{G}$, ottenute mediante la suddetta trasformazione $x = Tz$, godono di particolarità proprietà, si verifica che, invece, <u>la matrice $\hat{H}$ non gode di alcuna proprietà rilevante</u>. Allora, possiamo rappresentare la relazione $y = \hat{H}_A z_A + \hat{H}_B z_B$ mediante il seguente schema a blocchi:



Da questo sistema si osserva che ***se il sistema parte dallo stato nullo, solo il sottosistema S_A influenza il legame tra l'ingresso e l'uscita, mentre S_B non ha alcuna rilevanza.***

Lo si capisce in quanto, quale che sia il valore dell'ingresso, S_B, partendo dallo stato 0, permane in tale stato, mentre S_A passa in uno stato che è influenzato dall'ingresso e che, a sua volta, influenza l'uscita.

Andiamo a vedere allora come si traduce tutto ciò in termini di matrice di trasferimento del sistema.

Intanto, indicate con Y(s) e U(s) le trasformate di Laplace, rispettivamente, dell'uscita e dell'ingresso, sappiamo che, nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle, la matrice di trasferimento W(s) del sistema è data da

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = H(sI - F)^{-1} G$$

La prima cosa che facciamo vedere è che

$$\boxed{W(s) = H(sI - F)^{-1} G = \hat{H}(sI - \hat{F})^{-1} \hat{G}}$$

Ricordando che

$$\hat{F} = T^{-1}FT$$
$$\hat{G} = T^{-1}G$$
$$\hat{H} = HT$$

si ha infatti che

$$\hat{H}(sI-\hat{F})^{-1}\hat{G} = HT(sI - T^{-1}FT)^{-1}T^{-1}G = HT\left(s\underbrace{T^{-1}T}_{I} - T^{-1}FT\right)^{-1}T^{-1}G =$$
$$= HT(T^{-1}(sI-F)T)^{-1}T^{-1}G = \ldots = H((sI-F))^{-1}G = W(s)$$

Premesso questo, troviamo una espressione di W(s) che tenga conto della particolare struttura delle matrici $\hat{F}$ e $\hat{G}$.

Facendo la solita partizione del vettore di stato z (e quindi anche della sua trasformata) abbiamo che

$$W(s) = \hat{H}(sI-\hat{F})^{-1}\hat{G} = \begin{bmatrix}\hat{H}_A & \hat{H}_B\end{bmatrix}\begin{bmatrix} sI-\hat{F}_{AA} & -\hat{F}_{AB} \\ 0 & sI-\hat{F}_{BB}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{G}_A \\ 0\end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix}\hat{H}_A & \hat{H}_B\end{bmatrix}\begin{bmatrix} (sI-\hat{F}_{AA})^{-1} & -(\hat{F}_{AB})^{-1} \\ 0 & (sI-\hat{F}_{BB})^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{G}_A \\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{H}_A & \hat{H}_B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(sI-\hat{F}_{AA})^{-1}\hat{G}_A \\ 0\end{bmatrix} =$$
$$= \hat{H}_A(sI-\hat{F}_{AA})^{-1}\hat{G}_A$$

Abbiamo dunque trovato che

$$\boxed{W(s) = \hat{H}_A(sI-\hat{F}_{AA})^{-1}\hat{G}_A}$$

Questa relazione, come era anche prevedibile, dice che *la matrice di trasferimento W(s) dell'intero sistema non contiene alcun elemento legato al sottosistema non raggiungibile S_B.*

Non solo, ma possiamo verificare anche un'altra cosa: abbiamo visto prima che la rappresentazione di stato del sottosistema S_A è

$$\begin{cases} \dot{z}_A = \hat{F}_{AA}z_A + \hat{F}_{AB}z_B + \hat{G}_A u \\ y_A = \hat{H}_A z_A \end{cases}$$

Abbiamo anche detto che $\hat{F}_{AB} = 0$, per cui la rappresentazione diventa

$$\begin{cases} \dot{z}_A = \hat{F}_{AA}z_A + \hat{G}_A u \\ y_A = \hat{H}_A z_A \end{cases}$$

Da qui si deduce che la matrice di trasferimento di S_A è

$$W_A(s) = \hat{H}_A(sI-\hat{F}_{AA})^{-1}\hat{G}_A$$

e si osserva che è uguale alla matrice di trasferimento dell'intero sistema.

Quindi, *la scomposizione canonica di Kalman comporta anche che la matrice di trasferimento W(s) dell'intero sistema, oltre a non contenere alcun elemento legato al sottosistema S_B, coincida con la matrice di trasferimento $W_A(s)$ del sottosistema S_A.*

Autovalori raggiungibili e autovalori non raggiungibili

C'è ancora dell'altro: la relazione $W(s) = H(sI - F)^{-1}G$ può anche essere scritta nella forma

$$W(s) = H\frac{\operatorname{adj}(sI - F)}{\det(sI - F)}G$$

Questa relazione evidenzia che, in generale, la matrice di trasferimento di un sistema possa presentare come poli (cioè come zeri del denominatore) tutti e soli gli autovalori della matrice di stato F. Vediamo allora cosa succede nel caso in cui il sistema venga posto nella forma canonica di Kalman.

Intanto, per come viene costruita, la matrice $\hat{F}$ possiede gli stessi autovalori della matrice F, pure con la stessa molteplicità; d'altra parte, $\hat{F}$ è una matrice diagonale a blocchi, per cui i suoi autovalori sono quelli dei blocchi $\hat{F}_{AA}$ e $\hat{F}_{BB}$; di conseguenza, avendo trovato che $W(s) = \hat{H}(sI - \hat{F})^{-1}\hat{G}$, possiamo affermare, sempre in linea generale, che la matrice W(s) può avere come poli tutti e soli gli autovalori dei blocchi $\hat{F}_{AA}$ e $\hat{F}_{BB}$. Per comodità, chiamiamo gli autovalori di $\hat{F}_{AA}$ come "**autovalori raggiungibili**", per indicare che sono relativi ad S_A, mentre gi autovalori di $\hat{F}_{BB}$ saranno gli "**autovalori non raggiungibili**", per indicare che sono relativi a S_B. Adesso, dall'altra relazione $W(s) = \hat{H}_A\left(sI - \hat{F}_{AA}\right)^{-1}\hat{G}_A$, se calcoliamo esplicitamente quella inversa, otteniamo che

$$W(s) = \hat{H}_A\frac{\operatorname{adj}\left(sI - \hat{F}_{AA}\right)}{\det\left(sI - \hat{F}_{AA}\right)}\hat{G}_A$$

Da qui si deduce che *la matrice di trasferimento W(s) può avere come poli solo gli autovalori del blocco $\hat{F}_{AA}$, ossia gli autovalori raggiungibili.*

Al contrario, gli autovalori non raggiungibili non sono poli per W(s). Anche questa è una caratteristica importante garantita dalla scomposizione canonica di Kalman.

Esempio

Supponiamo di avere un sistema descritto dalla seguente rappresentazione di stato:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Questo sistema è stato già analizzato in precedenza e, in particolare, si è trovato che esso non risulta completamente raggiungibile. La matrice di raggiungibilità di questo sistema è

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ed essa ha evidentemente rango $\rho(\mathbf{K}) = 1 \neq n = 2$ (a conferma del fatto che il sistema non è completamente raggiungibile). Il sottospazio di raggiungibilità ha dimensione $n - \rho(\mathbf{K}) = 1$ e corrisponde al range della matrice $\mathbf{K}$: essendo tale matrice formata da due colonne dipendenti, possiamo scegliere una qualsiasi di tali colonne per formare una base di X_r: scelta ad esempio la prima, avremo che

$$X_r = sp\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il sottospazio di non raggiungibilità è l'insieme dei vettori di X che sono ortogonali ai vettori di X_r: sarà evidentemente $X_{nr} = sp\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Premesso questo, <u>avendo appurato che il sistema non è completamente raggiungibile, ha senso trovarne la scomposizione canonica di Kalman</u>, in modo da evidenziare la parte raggiungibile e quella non raggiungibile.

Possiamo subito dire che il sottosistema S_A completamente raggiungibile ha dimensione pari a $r = \rho(\mathbf{K}) = 1$ e che il sottosistema S_B completamente non raggiungibile ha dimensione $n - r = 1$. Per trovare tali sottosistemi, dobbiamo intanto costruire la matrice di trasformazione T: questa è una matrice quadrata di ordine 2 le cui colonne sono costituite da una base di X_r ed una di X_{nr}. In base a quanto trovato poco fa, possiamo allora prendere

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La trasformazione da utilizzare è dunque $z = T^{-1}x$ dove

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T}\,\mathrm{adj}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il nuovo vettore di stato è dunque

$$\begin{bmatrix} z_A \\ z_B \end{bmatrix} = T^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} z_A = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ z_B = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

Queste due relazioni servono, in pratica, a definire il significato fisico del nuovo vettore di stato. Eseguendo la trasformazione, otteniamo

$$\hat{F} = T^{-1}FT = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\hat{G} = T^{-1}G = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\hat{H} = HT = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

N.B. Facciamo osservare che, in accordo a quanto ci aspettavamo, risultano nulli sia l'elemento di posto 21 nella matrice $\hat{F}$ sia la seconda componente del vettore $\hat{G}$; oltre a questi, compaiono anche altri elementi nulli nelle matrici, ma si tratta di un evento puramente casuale, non legato alla trasformazione utilizzata. Inoltre, si osserva anche che $\hat{F} = F$, il che è un ulteriore evento del tutto casuale.

La nuova rappresentazione del sistema è dunque

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_A \\ \dot{z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_A \\ z_B \end{bmatrix}$$

Andiamo a calcolare la matrice di trasferimento del sistema, che poi si riduce ad una sola funzione: abbiamo prima trovato che

$$W(s) = \hat{H}_A\left(sI - \hat{F}_{AA}\right)^{-1}\hat{G}_A$$

per cui si tratta della funzione

$$W(s) = [0](sI - [-1])^{-1}[1] = 0$$

Siamo dunque nel caso particolare per cui il legame ingresso-uscita è nullo. Facciamo comunque osservare che, se la W(s) avesse avuto una certa espressione, avrebbe potuto avere, come unico polo, al più l'unico autovalore raggiungibile, che in questo caso è $\hat{F}_{AA} = [-1]$.

SCOMPOSIZIONE CANONICA DI JORDAN PER LA RAGGIUNGIBILITÀ

Passiamo adesso a vedere un'altra possibile forma canonica nella quale è possibile porre il sistema $\dot{x} = Fx + Gu$ al fine di evidenziarne le proprietà di raggiungibilità. Il nostro scopo è quello di porre la matrice di stato F in forma di Jordan. Per fare questo, dobbiamo scegliere in modo opportuno la matrice T che realizza la trasformazione $x = Tz$: sapendo allora che $\hat{F} = T^{-1}FT$ e sapendo anche che $J = M^{-1}FM$, dove M è la “*matrice modale generalizzata*” associata ad F, è chiaro che ci basta prendere $T = M$.

Con questa posizione, otteniamo il sistema rappresentato nella forma

$$\boxed{\dot{z} = Jz + \hat{G}u}$$

dove

$$J = M^{-1}FM$$

$$\hat{G} = M^{-1}G$$

Più che analizzare le caratteristiche di questa rappresentazione, ci interessa illustrare un importante criterio per la completa raggiungibilità del sistema. Tale criterio, valido per un sistema avente 1 solo ingresso, ha il seguente enunciato:

Teorema - *Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema $\dot{z} = Jz + \hat{G}u$ sia completamente raggiungibile è che siano contemporaneamente verificate due condizioni:*

- *per ogni autovalore della matrice F ci deve essere 1 solo miniblocco nella matrice J;*
- *il vettore $g = M\hat{G}$ deve avere elementi diversi da 0 in corrispondenza delle ultime variabili di ogni blocco di Jordan*

Vediamo di comprendere a cosa corrispondono queste due condizioni.

La prima condizione è abbastanza chiara: essa corrisponde a richiedere che il polinomio caratteristico della matrice F coincida con il polinomio minimo associato alla stessa matrice (condizione che si esprime dicendo che la matrice F, o anche la sua forma di Jordan J, è una “**matrice ciclica**”).

Concentriamoci, invece, sulla seconda condizione. Partiamo dalla matrice di Jordan, che sappiamo essere una matrice diagonale a blocchi. Al fine di comprendere la seconda condizione, affianchiamo questa matrice al vettore colonna $\hat{G}$, le cui componenti sono in numero pari alla dimensione di J:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & 0 & \dots & 0 \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_k \end{bmatrix} \qquad \hat{G} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

Allora, la seconda condizione dice questo: si considera l’ultima riga di ciascun miniblocco di Jordan J_K; in corrispondenza di queste righe, si individuano i corrispondenti elementi nel vettore colonna $\hat{G}$; tutti questi elementi devono essere pari a 0.

Autore: Sandro Petrizzelli

FORMA CANONICA DI CONTROLLO

La terza ed ultima forma canonica alla quale ci interessiamo è quella che va sotto il nome di "**forma canonica di controllo**". Il punto di partenza è sempre il sistema nella forma

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

La prima cosa da fare è individuare il polinomio caratteristico associato alla matrice di stato F: se tale matrice ha dimensione n (per cui n è anche l'ordine del sistema), tale polinomio è nella forma

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

Il passo successivo è quello di individuare una matrice che abbia proprio $p(\lambda)$ come polinomio caratteristico: esistono infinite matrici aventi questa caratteristica e una di esse è senz'altro la matrice

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Questa matrice è così costruita: intanto, si tratta di una matrice quadrata di ordine n; la sopradiagonale è costituita da elementi tutti unitari; l'ultima riga presenta, come elementi, i coefficienti del polinomio $p(\lambda)$, a partire da a_n, tutti cambiati di segno; tutti gli altri elementi sono nulli. Questa matrice, per come viene costruita, prende il nome di "**matrice compagna del polinomio p(λ)**".

Esiste allora il seguente risultato:

Teorema - *Dato un sistema nella forma $\dot{x} = Fx + Gu$, se il sistema ha 1 solo ingresso (m=1) ed è completamente raggiungibile, allora è possibile trovare una trasformazione $x = Tz$ che ponga il sistema nella forma $\dot{z} = \hat{F}z + \hat{G}u$, con $\hat{F}$ matrice compagna del polinomio caratteristico di F*

Allora, un sistema $\dot{z} = \hat{F}z + \hat{G}u$ (con u scalare) la cui matrice di stato $\hat{F}$ sia del tipo illustrato prima e il cui vettore di ingresso sia nella forma $G = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, si dice che è espresso nella "**forma canonica di controllo**". In base al teorema appena enunciato, se il sistema, oltre ad avere 1 solo ingresso, è anche completamente raggiungibile, allora è possibile porlo nella forma canonica di controllo:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \ldots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

La matrice di trasformazione T che porta il sistema dalla rappresentazione iniziale $\dot{x} = Fx + Gu$ alla forma canonica di controllo si ottiene a partire dal polinomio caratteristico della matrice F.

DETERMINAZIONE DELLA MATRICE DI TRASFORMAZIONE T

Supponiamo di avere a che fare con un sistema rappresentato, in forma di stato, dall'equazione

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

Supponiamo inoltre di voler trovare quella matrice di trasformazione T tale che la trasformazione x=Tz porti il sistema in una forma prefissata $\dot{z} = \hat{F}z + \hat{G}u$ (per esempio, la forma canonica di Kalman o quella di controllo, visto che, per la forma di Jordan, sappiamo che T=M). Per individuare questa matrice, possiamo utilizzare le matrici di raggiungibilità $\mathbf{K}$ e $\hat{\mathbf{K}}$, che sappiamo essere definite come

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{F}\hat{G} & \hat{F}^2\hat{G} & \dots & \hat{F}^{n-1}\hat{G} \end{bmatrix}$$

Facciamo l'ipotesi che il sistema sia completamente raggiungibile: questo significa che $X = X_r$ e quindi che il rango delle due matrici di raggiungibilità è pari all'ordine del sistema, ossia ad n. Cerchiamo di individuare il legame tra $\mathbf{K}$ e $\hat{\mathbf{K}}$: partendo da quest'ultima e ricordando che $\hat{G} = T^{-1}G$, abbiamo intanto che

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{F}\hat{G} & \hat{F}^2\hat{G} & \dots & \hat{F}^{n-1}\hat{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{-1}G & \hat{F}T^{-1}G & \hat{F}^2T^{-1}G & \dots & \hat{F}^{n-1}T^{-1}G \end{bmatrix}$$

D'altra parte, è anche $\hat{F} = T^{-1}FT$, per cui

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}} &= \begin{bmatrix} T^{-1}G & T^{-1}FTT^{-1}G & \left(T^{-1}FT\right)^2T^{-1}G & \dots & \left(T^{-1}FT\right)^{n-1}T^{-1}G \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} T^{-1}G & T^{-1}FTT^{-1}G & \left(T^{-1}F^2T\right)T^{-1}G & \dots & \left(T^{-1}F^{n-1}T\right)T^{-1}G \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} T^{-1}G & T^{-1}FG & T^{-1}F^2G & \dots & T^{-1}F^{n-1}G \end{bmatrix} = T^{-1}\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix} = T^{-1}\mathbf{K} \end{aligned}$$

Abbiamo dunque trovato che le due matrici di raggiungibilità sono legate semplicemente dalla relazione

$$\boxed{\hat{\mathbf{K}} = T^{-1}\mathbf{K}}$$

La matrice T è per definizione non singolare, per cui possiamo anche scrivere che $\mathbf{K} = T\hat{\mathbf{K}}$. Inoltre, essendo il sistema completamente raggiungibile, le due matrici di raggiungibilità hanno entrambe rango n e questo ci consente di scrivere che

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{K}}^T = T\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{K}}^T$$

da cui concludiamo che

$$T = \mathbf{K}\hat{\mathbf{K}}^{T}\left(\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{K}}^{T}\right)^{-1}$$

Questo risultato vale nel caso di un sistema con m ingressi; l'enunciato completo del teorema è il seguente:

<u>Teorema</u> *- Se un sistema completamente raggiungibile è descritto, rispetto a due diverse basi di X (spazio di stato), da due coppie di matrici* (F,G) *e* $(\hat{F},\hat{G})$*, la matrice non singolare T che fornisce il cambiamento di coordinate è unica ed è data da*

$$\boxed{T = \mathbf{K}\hat{\mathbf{K}}^{T}\left(\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{K}}^{T}\right)^{-1}}$$

dove $\mathbf{K}$ *e* $\hat{\mathbf{K}}$ *sono le matrici di raggiungibilità rispettivamente di* (F,G) *e* $(\hat{F},\hat{G})$

Nel caso particolare in cui il sistema ha m=1 ingresso, le due matrici $\mathbf{K}$ e $\hat{\mathbf{K}}$ sono quadrate di ordine n e invertibili: di conseguenza, quella relazione diventa semplicemente

$$\boxed{T = \mathbf{K}\hat{\mathbf{K}}^{-1}}$$

Esempio

Supponiamo che il sistema in esame sia rappresentato da una equazione di stato nella forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

Vogliamo determinare la matrice di trasformazione T che consenta di esprimere questo sistema nella forma canonica di controllo. Perché questa rappresentazione del sistema possa esistere, il sistema stesso deve essere completamente raggiungibile; per verificare se ciò accade, possiamo seguire due strade:

- quella più generale consiste nel determinare la matrice di raggiungibilità $\mathbf{K}$ e nel verificate che essa abbia rango massimo, ossia rango pari all'ordine del sistema, cioè a 2;

- d'altra parte, dato che la matrice F è in forma di Jordan e dato che il sistema è ad un solo ingresso, possiamo anche usare il criterio illustrato in precedenza che si basa proprio sugli autovalori della F e sugli elementi del vettore colonna G.

A scopo esercitativo, seguiamo entrambe le strade.

Cominciamo a calcolare la matrice di raggiungibilità del sistema: essendo n=2 l'ordine del sistema, abbiamo che

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Il determinante di questa matrice è diverso da 0, il che significa che $\rho(\mathbf{K}) = 2$, ossia che il sistema è completamente raggiungibile (ossia anche che è nullo il sottospazio di non raggiungibilità, mentre quello di raggiungibilità coincide con lo spazio di stato X).

Vediamo se si arriva allo stesso risultato usando il criterio di Jordan. La prima condizione da verificare è che la matrice di stato F sia ciclica, il che significa che la corrispondente matrice di Jordan J abbia 1 solo miniblocco per ciascun autovalore: considerando che la matrice di stato è già in forma di Jordan e che c'è 1 solo autovalore (λ=-2), deduciamo che la matrice ha 1 solo miniblocco (coincidente con la matrice stessa) e quindi che la ciclicità è verificata. La seconda condizione è che, in corrispondenza dell'ultima riga di questo miniblocco, il corrispondente elemento di G sia diverso da zero:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{F \equiv J} \xrightarrow[\text{ultima riga del miniblocco}]{} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}}_{G}$$

L'elemento da considerare corrisponde alla seconda componente del vettore G e si tratta evidentemente di un elemento non nullo. Deduciamo, perciò, ancora una volta che il sistema è completamente raggiungibile e che quindi esiste almeno una trasformazione $x = Tz$ che consenta di rappresentarlo nella forma canonica di controllo.

Per individuare questa forma canonica di controllo, sappiamo già come è fatto il nuovo vettore di ingresso $\hat{G}$, mentre, per costruire la nuova matrice di stato $\hat{F}$ abbiamo bisogno di conoscere i coefficienti del polinomio caratteristico di F:

$$p(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \lambda I + 2 & -1 \\ 0 & \lambda I + 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

Noti questi coefficienti, possiamo costruire la nuova matrice di stato: $\hat{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$

La rappresentazione in forma canonica di controllo del nostro sistema è dunque la seguente:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

L'ultima cosa da fare è individuare la matrice T che consenta il passaggio dalla rappresentazione iniziale a quella di controllo. A questo scopo, possiamo utilizzare quanto trovato nel paragrafo precedente: in particolare, essendo il sistema ad 1 solo ingresso, la relazione da utilizzare è

$$T = \mathbf{K}\hat{\mathbf{K}}^{-1}$$

Conosciamo già la matrice $\mathbf{K}$, per cui dobbiamo adesso determinare $\hat{\mathbf{K}}$ e poi la sua inversa:

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{F}\hat{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{invertendo}} \hat{\mathbf{K}}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo dunque concludere che la matrice di trasformazione ricercata è

$$T = \mathbf{K}\hat{\mathbf{K}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ovviamente, la conoscenza della matrice di trasformazione ci è indispensabile se, partendo dalla matrice di uscita H della rappresentazione iniziale del sistema, vogliamo conoscere la nuova matrice di uscita $\hat{H}$ che si ha nella rappresentazione di controllo: risulterà infatti

$$\hat{H} = HT = \begin{bmatrix} * & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \ldots$$

Sistemi interconnessi

INTRODUZIONE

Quando abbiamo studiato la stabilità dei sistemi, ci siamo anche occupati di studiare la stabilità di quei sistemi realizzati interconnettendo, in modo arbitrario, vari sottosistemi più piccolo. Vogliamo fare adesso lo stesso a proposito della raggiungibilità. Tuttavia, vedremo come il problema della raggiungibilità degli aggregati di sistemi non sia semplice come il problema della stabilità dei sistemi in cascata ed in parallelo. Ad esempio, abbiamo a suo tempo fatto vedere che un sistema costituito da tanti sottosistemi lineari collegati in cascata e/o in parallelo è asintoticamente stabile se e solo se tutti i sottosistemi sono a loro volta asintoticamente stabili. Una conclusione così semplice non vale nei riguardi del problema della raggiungibilità.

Supponiamo dunque che il sistema complessivo S sia formato da N sottosistemi distinti $S_1, S_2, \ldots, S_N$, interconnessi in modo del tutto arbitrario. Sappiamo intanto che, a prescindere dai vincoli di interconnessione, se $X_1, X_2, \ldots, X_N$ sono i rispettivi spazi di stato, lo spazio di stato del sistema complessivo è $X = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_N$: ciò significa che, fissato un generico stato $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_N \end{bmatrix}^T$, richiedere che il sistema sia completamente raggiungibile significa richiedere che ciascun sottosistema sia completamente raggiungibile. Possiamo perciò enunciare una condizione necessaria per la completa raggiungibilità del sistema:

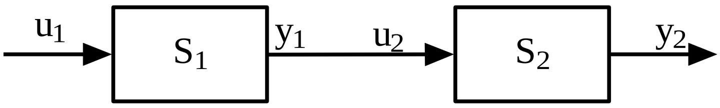
Teorema - *Condizione necessaria affinché un sistema lineare S, costituito da N sottosistemi lineari $S_1, S_2, \ldots, S_N$, sia completamente raggiungibile è che ciascun sottosistema sia completamente raggiungibile*

Questo risultato differenzia il problema della raggiungibilità da quello della stabilità in modo molto netto: infatti, mentre abbiamo visto che si possono ottenere sistemi asintoticamente stabili per mezzo di opportune connessioni di sottosistemi instabili, non è invece possibile connettere in alcun modo sistemi non completamente raggiungibili per ottenere sistemi completamente raggiungibili. In altre parole, possiamo affermare che, *mentre la stabilità è una proprietà che si può acquistare (esiste infatti il cosiddetto "problema della stabilizzabilità"), la raggiungibilità è una proprietà che si può solo perdere.*

Naturalmente, è lecito chiedersi se valga o meno il viceversa del teorema prima enunciato. Come anticipato prima, il viceversa non vale e ce ne accorgeremo considerando ancora una volta le connessioni in cascata ed in parallelo.

INTERCONNESSIONE DI DUE SISTEMI LINEARI IN CASCATA

Consideriamo due sistemi lineari S_1 ed S_2 connessi in cascata:



Facciamo l'ipotesi che entrambi questi sistemi siano completamente raggiungibile. Ci chiediamo se il sistema complessivo S sia anch'esso completamente raggiungibile. Supponiamo, allora, che i due sottosistemi siano descritti dalle seguenti equazioni di stato e di uscita:

$$S_1 \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = F_1 x_1 + G_1 u_1 = F_1 x_1 + G_1 u \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

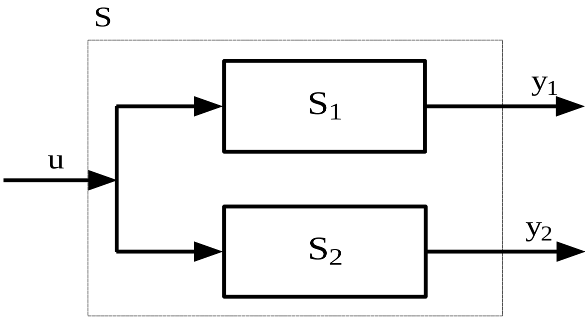
$$S_2 \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = F_2 x_2 + G_2 u_2 = F_2 x_2 + G_2 y_1 = F_2 x_2 \\ y_2 = y = H_2 x_2 \end{cases}$$

La particolarità è nel fatto che l'uscita di S_1, che poi è l'ingresso di S_2, sia identicamente nulla: questo comporta che S_2, partendo dallo stato nullo, non possa che rimanere in tale stato, visto che S_2 stesso riceve un ingresso costante e uguale a 0. Di conseguenza, mentre è possibile raggiungere qualsiasi valore di x_1 partendo da x=0, lo stesso non vale per x_2, che, partendo da 0, può solo rimanere in 0. Di conseguenza, il sistema complessivo non è completamente raggiungibile.

Non si tratta, ovviamente, di una conclusione generale, nel senso che è possibile che un sistema formato da N sistemi lineari completamente raggiungibili sia a sua volta completamente raggiungibile. Tutto dipende dai vincoli di interconnessione tra i vari sistemi.

INTERCONNESSIONE DI DUE SISTEMI IN PARALLELO

Consideriamo adesso due sistemi S_1 ed S_2 connessi in parallelo:



Facciamo ancora una volta l'ipotesi che tali sistemi (ovviamente lineari tempo-invarianti) siano completamente raggiungibili: se le rispettive equazioni di stato sono

$$S_1 \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = F_1 x_1 + G_1 u_1 = F_1 x_1 + G_1 u \\ y_1 = H_1 x_1 \end{cases}$$

$$S_2 \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = F_2 x_2 + G_2 u_2 = F_2 x_2 + G_2 u \\ y_2 = y = H_2 x_2 \end{cases}$$

l'equazione di stato del sistema complessivo è

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}}_{\text{F : matrice di stato del sistema complessivo}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}}_{\text{G: matrice di ingresso del sistema complessivo}} u$$

Si osservano due cose fondamentali in questa equazione:

- la prima è che la matrice di stato è una matrice diagonale a blocchi, i cui blocchi sono le matrici di stato dei due sottosistemi; ciò significa che gli autovalori della matrice F coincidono con quelli dei due sottosistemi messi insieme;

- la seconda è che la matrice di ingresso G è una matrice a blocchi i cui blocchi corrispondono alle matrici di ingresso dei due sottosistemi.

Allora, ricordando il *criterio di completa raggiungibilità di Jordan*, è facile dedurre il seguente criterio di completa raggiungibilità:

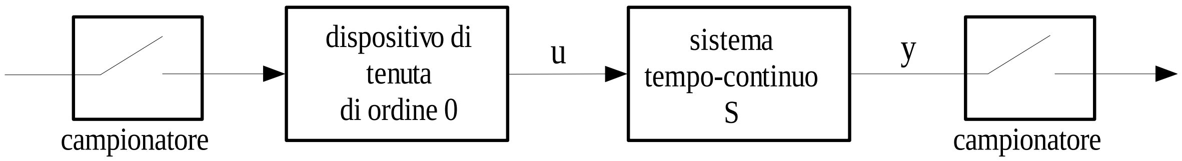
Teorema - *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare S, costituito da N sottosistemi lineari $S_1, S_2, \ldots, S_N$ connessi in parallelo, sia completamente raggiungibile è che ciascun sottosistema, oltre ad essere completamente raggiungibile, abbia autovalori tutti diversi*

SISTEMI A DATI CAMPIONATI

Supponiamo di avere un sistema (tempo-continuo, regolare, a dimensioni finite, lineare e tempo-invariante) descritto dall'equazione di stato

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

Facciamo l'ipotesi che il sistema abbia 1 solo ingresso. Mediante questo sistema, sappiamo di poter costruire il seguente "**sistema a dati campionati**":



Sappiamo anche che l'equazione alle differenze che "regola" l'andamento dello stato di questo sistema (tempo-discreto) è nella forma seguente:

$$\begin{cases} x(t+1) = F_C x(t) + G_C u(t) \\ y(t) = H_C x(t) \end{cases}$$

dove

$$\begin{cases} F_C = e^{FT} \\ G_C = \int_0^T e^{Fs} G ds \\ H_C = H \\ T = \text{periodo di campionamento} \end{cases}$$

Facciamo l'ipotesi che il sistema tempo-continuo S sia completamente raggiungibile. Ci chiediamo se lo sia anche il sistema complessivo o meno.

La prima cosa che osserviamo riguarda l'ingresso cui è sottoposto il sottosistema S: infatti, questo ingresso proviene da un dispositivo di tenuta di ordine 0, il che significa che si tratta di un ingresso costante a tratti. Abbiamo cioè "ristretto" il tipo di ingresso cui è soggetto S. Il sottosistema S è per ipotesi completamente raggiungibile: tuttavia, il fatto di aver ristretto gli ingressi alla categoria delle funzioni costanti a tratti non ci garantisce più che qualsiasi stato di S sia raggiungibile a partire dallo stato nullo. E', ad esempio, possibile che, tra gli ingressi che "rendevano" il sistema S completamente raggiungibile, non ve ne fosse alcuno di tipo costante a tratti.

Sussiste allora il seguente risultato generale:

Teorema - *Dato un sistema S_C a dati campionati costruito sulla base di un sistema tempo-continuo S lineare, tempo-invariante e completamente raggiungibile, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema S_C sia completamente raggiungibile è la seguente: se S ha 2 o più autovalori generici l_i e l_k con parte reale coincidente, le rispettive parti immaginarie devono soddisfare la condizione*

$$\boxed{\mathrm{Im}(\lambda_i) - \mathrm{Im}(\lambda_k) \neq \frac{2\pi}{T} k}$$

con k numero intero positivo

Dimostrazione (cenni)

Diamo solo un cenno della dimostrazione di questo teorema.

L'ipotesi di partenza è che il sottosistema tempo-continuo S sia completamente raggiungibile. In base al criterio di Jordan, questo significa che la sua matrice di stato F è una matrice ciclica, ossia che, per ogni autovalore λ di F, la matrice di Jordan equivalente ad F abbia 1 solo miniblocco. Siano allora λ_1 e λ_2 due generici autovalori di F di molteplicità pari ad 1. Supponiamo che $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2)$ e supponiamo anche che il periodo di campionamento del sistema sia

$$T = \frac{2\pi}{\mathrm{Im}(\lambda_1) - \mathrm{Im}(\lambda_2)}$$

Facciamo allora vedere che, sotto queste ipotesi, la matrice F_C non è ciclica, ma presenta, in corrispondenza di 1 autovalore, 2 diversi miniblocchi di Jordan (il che indica che il sistema S_C non è completamente raggiungibile).

Ricordando che $F_C = e^{FT}$, se λ_1 e λ_2 sono due autovalori di F, $e^{\lambda_1 T}$ e $e^{\lambda_2 T}$ saranno due autovalori di F_C. Per comodità, poniamo

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = a \\
&\mathrm{Im}(\lambda_1) = b_1 \\
&\mathrm{Im}(\lambda_2) = b_2
\end{aligned}$$

Possiamo allora scrivere che

$$\begin{aligned}
e^{\lambda_1 T} &= e^{aT} e^{jb_1 T} \\
e^{\lambda_2 T} &= e^{aT} e^{jb_2 T}
\end{aligned}$$

Questi due autovalori hanno lo stesso modulo, mentre gli argomenti sono tali che

$$\frac{e^{jb_1 T}}{e^{jb_2 T}} = e^{j(b_1 - b_2)T} = e^{j2\pi} = 1$$

Ciò significa che i due autovalori $e^{\lambda_1 T}$ e $e^{\lambda_2 T}$ sono uguali, per cui, nella matrice F_C, avremo due miniblocchi corrispondenti allo stesso autovalore.

Chiariamo subito questo criterio mediante un semplice esempio. Supponiamo di aver costruito un sistema S_C a dati campionati sulla base di un sistema S del 2° ordine che sia completamente raggiungibile. Per verificare se S_C è o meno completamente raggiungibile, dobbiamo studiare gli autovalori della matrice di stato del sistema S. Essendo S un sistema del secondo ordine, esso avrà o due autovalori reali e distinti o due autovalori reali e coincidenti o due autovalori complessi coniugati:

- se i due autovalori sono reali e distinti oppure reali e coincidenti, allora il sistema è completamente raggiungibile;
- se i due autovalori sono complessi e coniugati, essi hanno le parti reali coincidenti, per cui bisogna indagare le rispettive parti immaginarie; per esempio, supponiamo che sia $\lambda_1 = -1 + j2$ e

$\lambda_1 = -1 - j2$; allora, affinché il sistema S_C sia completamente raggiungibile, deve accadere che $4 = \mathrm{Im}(\lambda_1) - \mathrm{Im}(\lambda_2) \neq \frac{2\pi}{T}k$, con k che è un qualsiasi numero intero positivo. Facciamo l'ipotesi che il periodo di campionamento sia T=π/2, per cui la condizione è $4 \neq 4k$: si osserva subito che quella condizione non è verificata per ∀k, in quanto basta prendere k=1. Possiamo allora affermare che il sistema è completamente raggiungibile solo se $T \neq \frac{\pi}{2}k$, con k che è sempre un qualsiasi numero intero positivo.

Per concludere, facciamo osservare che, dati λ_1 e λ_2 tali che $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2)$, se risulta anche $\mathrm{Im}(\lambda_1) = \mathrm{Im}(\lambda_2)$, allora la condizione $0 = \mathrm{Im}(\lambda_1) - \mathrm{Im}(\lambda_2) \neq \frac{2\pi}{T}k$ è sempre verificata per ∀k, per cui il sistema S_C è senz'altro completamente raggiungibile.

Controllabilità dell'uscita

INTRODUZIONE

Fino ad ora ci siamo occupati della raggiungibilità e della controllabilità con riferimento allo stato: si è trattato, cioè, di determinare l'ingresso che trasferisca il sistema, in un intervallo di tempo finito, da uno stato prefissato ad un altro stato prefissato. Adesso, invece, vogliamo occuparci della controllabilità dal punto di vista dell'uscita: significa cioè *determinare quale ingresso al sistema porti l'uscita da un certo valore iniziale al valore nullo.*

Facciamo ancora una volta riferimento ad un sistema tempo-continuo (regolare a dimensioni finite), lineare, tempo-invariante, descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases}$$

Possiamo dare la prima fondamentale definizione:

Def. *Il sistema si dice "**completamente controllabile in uscita**" quando, fissato un istante iniziale* τ *(che può essere qualsiasi, data la tempo-invarianza) e fissato un qualsiasi valore iniziale* $y(\tau) \in Y$ *dell'uscita, esistono almeno una funzione di ingresso* $u(\bullet) \in \Omega$ *ed un valore* $t_f \in T$ *(T=insieme dei tempi) tali che* $y(t_f) = 0$

Si nota subito che questa definizione è del tutto analoga a quella data per la controllabilità dello stato. Vogliamo allora vedere sotto quali condizioni il sistema risulta completamente controllabile in uscita.

Intanto, in base all'equazione di uscita y=Hx, è chiaro che il valore iniziale dell'uscita è $y(\tau) = Hx(\tau)$, ossia è l'immagine, mediante la matrice di uscita H, dello stato iniziale. Per comodità, prendiamo τ=0, per cui è $y(0) = Hx(0)$. Dato allora che siamo interessati ad un qualsiasi valore $y(0) \in Y$, la prima condizione che deve essere verificata è che il prodotto $Hx(0)$ produca tutto l'insieme dei valori di uscita Y (che è uno spazio vettoriale di dimensione p). Ciò significa che la prima condizione è

$$\text{Range}(H) = Y$$

A questo punto, ci mettiamo nella ipotesi (quasi sempre verificata) che il numero p di uscite non sia superiore al numero n di variabili di stato del sistema: quindi

$$p \leq n$$

Allora, chiedere che $\text{Range}(H) = Y$ equivale a richiedere che il rango della matrice H sia pari al numero p di uscite:

$$\rho(H) = p$$

Possiamo perciò affermare quanto segue: *condizione necessaria affinché il sistema sia completamente controllabile in uscita è che* $\boxed{\rho(H) = p}$.

Adesso facciamo quest'altro ragionamento: in base sempre all'equazione di uscita y=Hx, è chiaro che l'uscita si manifesta a seguito di un movimento di stato; questo movimento di stato, per i sistemi che stiamo analizzando, è regolato dalla formula di Lagrange

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\xi)}Gu(\xi)d\xi$$

A noi interessa l'uscita, e quindi lo stato, nell'istante t_f, per cui

$$y(t_f) = Hx(t_f) = He^{Ft_f}x(0) + H\int_0^{t_f} e^{F(t_f-\xi)}Gu(\xi)d\xi$$

In particolare, noi siamo interessati a che $y(t_f) = 0$: imponendo questo, otteniamo che

$$He^{Ft_f}x(0) + H\int_0^{t_f} e^{F(t_f-\xi)}Gu(\xi)d\xi = 0$$

Quindi, l'ingresso $u(\bullet)$ deve essere tale da soddisfare quest'ultima condizione.

Così come abbiamo fatto per la raggiungibilità e l'osservabilità, usiamo il teorema di Cayley-Hamilton per scrivere che

$$e^{F(t_f-\xi)} = \alpha_0(t_f-\xi)I + \alpha_1(t_f-\xi)F + \alpha_2(t_f-\xi)F^2 + \ldots + \alpha_{n-1}(t_f-\xi)F^{n-1}$$

Andando a sostituire nella relazione di prima e applicando la linearità degli integrali definiti, otteniamo

$$-He^{Ft_f}x(0) = H\int_0^{t_f}\alpha_0(t_f-\xi)Gu(\xi)d\xi + \int_0^{t_f}\alpha_1(t_f-\xi)FGu(\xi)d\xi + \ldots + \int_0^{t_f}\alpha_{n-1}(t_f-\xi)F^{n-1}Gu(\xi)d\xi$$

Definiamo ancora una volta i prodotti scalari:

$$\rho_0 = \int_0^{t_f}\alpha_0(t_f-\xi)u(\xi)d\xi$$

$$\rho_1 = \int_0^{t_f}\alpha_1(t_f-\xi)u(\xi)d\xi$$

....

$$\rho_{n-1} = \int_0^{t_f}\alpha_{n-1}(t_f-\xi)u(\xi)d\xi$$

Con questa posizione, possiamo riscrivere la relazione di prima nella forma

$$-He^{Ft_f}x(0) = HG\rho_0 + HFG\rho_1 + HF^2G\rho_2 + \ldots + HF^{n-1}G\rho_{n-1}$$

o anche, in forma matriciale, come

$$-He^{Ft_f}x(0) = \underbrace{\begin{bmatrix} HG & HFG & HF^2G & \ldots & HF^{n-1}G \end{bmatrix}}_{\mathbf{K_Y}} \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \\ \ldots \\ \rho_{n-1} \end{bmatrix}$$

Questa relazione matriciale, una volta fissati i valori di x(0) e di t_f, , rappresenta un sistema lineare di n equazioni in n incognite, che sono appunto gli n prodotti scalari $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$. Dobbiamo verificare se il sistema ottenuto è compatibile o meno: il sistema è compatibile se il vettore dei termini noti $-He^{Ft_f}x(0)$ appartiene al range della matrice dei coefficienti (che è stata prima indicata con $\mathbf{K_Y}$ e che prende il nome di "**matrice di controllabilità dell'uscita**"). Dato che x(0) è un qualsiasi vettore di $\Re^n$, la compatibilità del sistema c'è se è verificata la condizione

$$\mathrm{Range}\left(He^{Ft_f}\right) \subseteq \mathrm{Range}(\mathbf{K_Y})$$

Questa stessa condizione può anche espressa in termini di ranghi delle matrici coinvolte: la matrice $\mathbf{K_Y}$ è di dimensione p*nm, per cui, avendo supposto p≤n, la dimensione massima di $\mathrm{Range}(\mathbf{K_Y})$ è pari a p; inoltre, si può verificare che la condizione $\rho(H) = p$ equivale alla condizione per cui anche la matrice He^{Ft_f} abbia rango pari a p.

Dimostriamo quest'ultima affermazione, ossia che $\boxed{\rho(H) = p \Leftrightarrow \rho\left(He^{Ft_f}\right) = p}$.

Dobbiamo usare la cosiddetta "disuguaglianza di Sylvester": date due matrici A e B, con dimensioni tali da poter definire il prodotto AB, tale disuguaglianza afferma che

$$\rho(A) + \rho(B) - c \le \rho(AB) \le \min(\rho(A), \rho(B))$$

dove c è il numero di colonne di A o, ciò che è lo stesso, il numero di righe di B.

Applichiamo questa disuguaglianza nel caso in cui A=H e $B = e^{Ft_f}$: abbiamo che

$$\rho(H) + \rho(e^{Ft_f}) - c \le \rho(He^{Ft_f}) \le \min\left(\rho(H), \rho(e^{Ft_f})\right)$$

Abbiamo detto che $\rho(H) = p$; inoltre, essendo F, per definizione, una matrice di rango n, anche la matrice e^{Ft_f} ha rango pari ad n; infine, la dimensione comune alle matrici H e e^{Ft_f} è sempre n, in quanto H è una matrice p*n. Quindi, la disuguaglianza si riduce a

$$p \le \rho(He^{Ft_f}) \le p$$

e da qui consegue che $\rho\left(He^{Ft_f}\right) = p$.

Allora, se $\rho\left(He^{Ft_f}\right) = p$, la condizione di compatibilità del sistema può anche essere espressa nella forma

$$\boxed{\rho(\mathbf{K}_Y) = p}$$

Tra l'altro, si può verificare che la condizione $\rho(H) = p$ è a sua volta inglobata nella condizione $\rho(\mathbf{K}_Y) = p$, per cui possiamo concludere con il seguente "**criterio per la completa controllabilità dell'uscita**":

Teorema *- Dato il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases}$$

esso risulta completamente controllabile in uscita se e solo se è verificata la condizione $\rho(\mathbf{K}_Y) = p$, *dove* $\mathbf{K}_Y = \left[HG \quad HFG \quad .... \quad ... \quad HF^{n-1}G\right]$

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1