“Teoria dei sistemi” - Capitolo 9
Osservabilità (1° parte)

INTRODUZIONE AL PROBLEMA DELLA OSSERVABILITÀ: OSSERVAZIONE E RICOSTRUZIONE

Come abbiamo visto in precedenza, la “*controllabilità*” di un sistema è una proprietà che riguarda l’influenza che l’ingresso esercita sullo stato (e quindi sull’uscita) del sistema stesso. Un’altra proprietà (duale della controllabilità) è invece quella della “*osservabilità*”, la quale indaga sull’influenza che l’evoluzione dello stato esercita sull’uscita.

Abbiamo già parlato, introducendo i sistemi, del problema della osservabilità. Richiamiamo perciò le nozioni fondamentali. Supponiamo perciò di avere un generico sistema; supponiamo che, nell’intervallo [τ,t[, venga applicato al sistema un certo ingresso noto $u(\bullet)$ e supponiamo che il sistema risponda, sempre nell’intervallo [τ,t[, con una certa uscita $y(\bullet)$ nota anch’essa. Ci chiediamo se, a partire SOLO da queste informazioni, è possibile ricavare quale fosse lo stato iniziale $x(\tau)$ da cui è partito il sistema e quale sia lo stato finale $x(t)$ in cui è arrivato. Come vedremo, non è detto che questi stati siano determinabili.

Il problema della “osservazione” di un sistema (o, meglio, dello stato di un sistema) si può suddividere in due parti fondamentali:

- quando si è interessati a determinare lo stato iniziale $x(\tau)$, allora si parla di “**problema di osservazione**” propriamente detta;
- quando, invece, si è interessati a determinare lo stato finale $x(t)$, allora si parla di “**problema di ricostruzione**”.

Naturalmente, se si riesce a determinare $x(\tau)$, è sempre possibile determinare lo stato finale $x(t)$, dato che

$$x(t) = \varphi\left(t, \tau, x(\tau), u(\bullet)\right)$$

Il contrario, invece, sappiamo che è possibile solo se il sistema è reversibile.

Ad ogni modo, noi siamo interessati solo al problema della osservazione, ossia della determinazione dello stato iniziale del sistema. Esistono diversi modi di affrontare questo problema:

a) un primo approccio consiste nel chiedersi se $x(\tau)$ sia determinabile in corrispondenza di un qualsiasi ingresso (ovviamente tra quelli ammissibili) applicato al sistema;

b) un altro approccio consiste invece nel chiedersi se $x(\tau)$ è determinabile solo in corrispondenza di uno specifico ingresso (sempre tra quelli ammissibili);

c) si può anche provare ad individuare un particolare ingresso che consenta di determinare $x(\tau)$;

d) ci si può inoltre chiedere se $x(\tau)$ sia determinabile in corrispondenza di uno specifico ingresso e di una specifica uscita, ossia se sia sufficiente la conoscenza di un solo ingresso e della corrispondente risposta;

e) viceversa, ci si può chiedere se $x(\tau)$ sia determinabile in corrispondenza di più ingressi e delle corrispondenti uscite, ossia se siano necessari più esperimento sul sistema.

La nostra analisi sarà limitata ai sistemi lineari. Per questi sistemi, possiamo subito osservare due cose a proposito dei punti appena elencati:

- in primo luogo, i casi (a) e (b) sono la stessa cosa: infatti, si verifica che, se è possibile stimare $x(\tau)$ in corrispondenza di 1 solo ingresso, allora è possibile farlo per qualsiasi ingresso;

- stesso discorso per i casi (d) ed (e): infatti, se la stima di $x(\tau)$ non è possibile mediante 1 sola coppia ingresso-uscita, allora non lo sarà per nessun'altra coppia, ossia non avrà senso fare altri esperimenti ed altre misure sul sistema.

Queste due caratteristiche dei sistemi lineari possono essere giustificate in modo molto semplice: l'andamento temporale dello stato e quello dell'uscita di un sistema lineare sono esprimibili nella forma

$$x(\bullet) = \underbrace{\varphi_L(\bullet,\tau,x)}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\varphi_F(\bullet,\tau,u(\bullet))}_{\text{risposta forzata}}$$

$$y(\bullet) = \eta(\bullet, x(\bullet)) = \eta(\bullet, \varphi_L(\bullet,\tau,x) + \varphi_F(\bullet,\tau,u(\bullet))) = \underbrace{\eta(\bullet,\varphi_L(\bullet,\tau,x))}_{\text{uscita libera}} + \underbrace{\eta(\bullet,\varphi_F(\bullet,\tau,u(\bullet)))}_{\text{uscita forzata}}$$

In base a queste espressioni, se conosciamo l'ingresso $u(\bullet)$ possiamo subito calcolare l'uscita forzata, la quale dipende da tale ingresso mentre non dipende in alcun modo dallo stato iniziale; se poi conosciamo anche l'uscita $y(\bullet)$ complessiva, basta sottrarre, da questa, l'uscita forzata per ottenere l'uscita libera. Di conseguenza, il problema da porsi è quello di determinare lo stato iniziale a partire dall'uscita libera e tale uscita libera non dipende dall'ingresso, ossia è sempre la stessa a prescindere dall'ingresso.

Possiamo dunque svincolarci dall'ingresso e porci il seguente problema: *nota l'uscita libera* $y_L(\bullet) = \eta(\bullet, \varphi_L(\bullet,\tau,x))$ *nell'intervallo di osservazione* $[\tau, t]$, *dobbiamo determinare in modo univoco lo stato iniziale x=x(t).*

STATI INDISTINGUIBILI E STATI NON OSSERVABILI

Premesso questo, richiamiamo una definizione anch'essa già data in precedenza. Supponiamo che esistano due diversi stati x' e x'' del sistema che godono della seguente proprietà:

$$\eta(\varphi(\sigma,\tau,x',u(\bullet)),\sigma)=\eta(\varphi(\sigma,\tau,x'',u(\bullet)),\sigma) \qquad \forall\sigma\in[\tau,t]$$

Questa proprietà dice in pratica che i due stati x' e x'', sotto l'applicazione dello stesso ingresso $u(\bullet)$, producono lo stesso movimento di uscita nell'intervallo [τ,t]. E' chiaro che, quando accade una cosa del genere, la conoscenza dell'ingresso e dell'uscita non è in alcun modo sufficiente a farci individuare lo stato di partenza: tale stato potrebbe infatti essere x' ma anche x''. Quando quella proprietà vale per qualsiasi ingresso $u(\bullet)\in\Omega$, si dice che i due stati in esame sono "**indistinguibili nell'intervallo [τ,t]**".

Nel caso in cui il sistema sia lineare, in base a quanto detto prima, l'indistinguibilità va evidentemente riferita all'uscita libera, per cui la definizione è la seguente:

Def. *Dato un sistema lineare, due stati x' ed x'' si dicono "**indistinguibili nell'intervallo [t,t]**" se, in corrispondenza di un qualsiasi ingresso $u(\bullet)\in\Omega$, producono la stessa uscita libera nell'intervallo [t,t], ossia*

$$\eta(\varphi_L(\sigma,\tau,x'),\sigma)=\eta(\varphi_L(\sigma,\tau,x''),\sigma) \qquad \forall\sigma\in[\tau,t]$$

Un caso particolare si ha quando lo stato iniziale x(τ) è lo stato nullo: in questo caso, infatti, l'uscita libera è nulla a sua volta; d'altra parte, ci sono altri stati, diversi da quello nullo, che producono una uscita libera nulla: si tratta perciò di tutti gli stati indistinguibili dallo stato nullo e a tali stati si dà l'attributo di "**stati non osservabili**".

In pratica, quindi, diciamo che

Def. *Uno stato $x\in X$ di un sistema lineare è "**non osservabile**" se esso è indistinguibile dallo stato nullo (nell'intervallo considerato), ossia se*

$$\eta(\varphi_L(\sigma,\tau,x),\sigma)=0 \qquad \forall\sigma\in[\tau,t]$$

SOTTOSPAZI DI OSSERVABILITÀ E NON OSSERVABILITÀ IN [τ,T]

Consideriamo adesso un sistema tempo-continuo (regolare a dimensioni finite) e lineare, descritto perciò dalle equazioni

$$\begin{cases}\dot{x}=F(\sigma)x+G(\sigma)u\\ y=H(\sigma)x\end{cases}$$

Fissato un generico stato iniziale x=x(τ), il movimento libero (di stato) del sistema è

$$x_L(\sigma)=\Phi(\sigma,\tau)x$$

e quindi il corrispondente movimento libero di uscita è

$$y_L(\sigma) = H(\sigma)x_L(\sigma) = H(\sigma)\Phi(\sigma,\tau)x$$

Sulla base di questo, possiamo per prima cosa far vedere che l'*insieme degli stati non osservabili rappresenta uno spazio vettoriale.*

In base alla definizione data nel paragrafo precedente, dire che uno stato $x \in X$ è non osservabile (o indistinguibile dallo stato nullo) significa dire che, prendendo tale stato come stato iniziale, esso produce una uscita libera identicamente nulla (nell'intervallo di tempo considerato): avendo allora trovato che l'uscita libera ha equazione $y_L(\sigma) = H(\sigma)\Phi(\sigma,\tau)x$, possiamo affermare che $x \in X$ è non osservabile se e solo se

$$H(\sigma)\Phi(\sigma,\tau)x = 0$$

Allora, se x_1 ed x_2 sono due stati non osservabili (cioè indistinguibili dallo stato nullo), risulterà sicuramente

$$H(\sigma)\Phi(\sigma,\tau)x_1 = 0$$
$$H(\sigma)\Phi(\sigma,\tau)x_2 = 0$$

Se facciamo una combinazione lineare di x_1 ed x_2, in base alla linearità del sistema abbiamo che

$$H(\sigma)\Phi(\sigma,\tau)(c_1x_1 + c_2x_2) = 0$$

il che significa che anche lo stato $c_1x_1 + c_2x_2$ è non osservabile. Questo ci dice proprio che l'insieme degli stati non osservabili in $[\tau,t]$ è uno spazio vettoriale: lo indichiamo con $X_{nO}(\tau,t)$ e lo chiamiamo "**sottospazio di non osservabilità in [τ,t]**".

In modo analogo a quanto abbiamo visto per la raggiungibilità e la controllabilità, il complemento di $X_{nO}(\tau,t)$, rispetto allo spazio di stato X, racchiude tutti gli stati osservabili in $[\tau,t]$ e prende il bome di "**insieme di osservabilità in [τ,t]**": si tratta, quindi dell'insieme degli stati di X che non appartengono a $X_{nO}(\tau,t)$. E' importante sottolineare che non si tratta però di uno spazio vettoriale ed è per questo che si definisce un "**sottospazio di osservabilità in [τ,t]**": questo spazio vettoriale, che indichiamo con $X_O(\tau,t)$, è ancora un insieme complementare a $X_{nO}(\tau,t)$ rispetto ad X, ma gode anche della proprietà di essere ortogonale ad $X_{nO}(\tau,t)$: ciò significa, quindi, che sussistono le relazioni

complementarietà: $X_{nO}(\tau,t) \oplus X_O(\tau,t) = X$

ortogonalità: $X_{nO}(\tau,t) = X_n(\tau,t)^{\perp}$

(la prima condizione dice che <u>la somma diretta dei sottospazi di osservabilità e non osservabilità fornisce tutto lo spazio di stato del sistema</u>)

Ci poniamo allora il problema di come è possibile determinare questi sottospazi. Ancora una volta, il discorso non è molto diverso da quello seguito a proposito di raggiungibilità e osservabilità.

Dobbiamo prima introdurre una nuova matrice che si costruire a partire dalla matrice di transizione di stato del sistema, indicata con $\Phi(\sigma,\tau)$, e dalla matrice di ingresso H(σ):

$$\boxed{Q(\tau,t) = \int_\tau^t \Phi^T(\sigma,\tau)H^T(\sigma)H(\sigma)\Phi(\sigma,\tau)d\sigma}$$

Questa matrice prende il nome di "**gramiano di osservabilità**" e serve a introdurre il seguente risultato:

Teorema - *Dato un sistema lineare descritto da una equazione di stato nella forma* $\dot{x} = F(\sigma)x + G(\sigma)u$, *fissati l'istante iniziale t e l'istante finale t, il sottospazio* $X_{nO}(\tau,t)$ *di non osservabilità nell'intervallo [t,t] corrisponde al nucleo del gramiano di osservabilità, mentre il sottospazio* $X_O(\tau,t)$ *coincide con il range del gramiano di osservabilità:*

$$\boxed{\begin{aligned} X_{nO}(\tau,t) &= \text{Nucleo}[Q(\tau,t)] \\ X_O(\tau,t) &= \text{Range}[Q(\tau,t)] \end{aligned}}$$

Dimostrazione

Dato che $X_O(\tau,t) = X_{nO}(\tau,t)^{\perp}$, ci basta dimostrare una sola delle due relazioni, ad esempio la prima.

Per far vedere che $X_{nO}(\tau,t)$ coincide con $\text{Nucleo}[Q(\tau,t)]$ è sufficiente far vedere che $X_{nO}(\tau,t) \subset \text{Nucleo}[Q(\tau,t)]$ e che $X_{nO}(\tau,t) \supset \text{Nucleo}[Q(\tau,t)]$.

Cominciamo a dimostrare che $X_{nO}(\tau,t) \subset \text{Nucleo}[Q(\tau,t)]$: dobbiamo far vedere che, se $x \in X_{nO}(\tau,t)$, allora $x \in \text{Nucleo}[Q(\tau,t)]$.

Dire che $x \in X_{nO}(\tau,t)$ (ossia che x è uno stato non osservabile in [τ,t]) significa dire, in base a quanto visto prima, che

$$H(\sigma)\Phi(\sigma,\tau)x = 0$$

Consideriamo allora l'espressione del gramiano di osservabilità:

$$Q(\tau,t) = \int_{\tau}^{t} \Phi^T(\sigma,\tau)H^T(\sigma)H(\sigma)\Phi(\sigma,\tau)d\sigma$$

Post-moltiplicando ambo i membri per x, otteniamo

$$Q(\tau,t)x = \left(\int_{\tau}^{t} \Phi^T(\sigma,\tau)H^T(\sigma)H(\sigma)\Phi(\sigma,\tau)d\sigma\right)x = \int_{\tau}^{t} \Phi^T(\sigma,\tau)H^T(\sigma)\underbrace{H(\sigma)\Phi(\sigma,\tau)x}_{=0}d\sigma = 0$$

Il fatto che risulti $Q(\tau,t)x = 0$ dice proprio che $x \in \text{Nucleo}[Q(\tau,t)]$.

Adesso, per dimostrare l'implicazione inversa, ossia $X_{nO}(\tau,t) \supset \text{Nucleo}[Q(\tau,t)]$, possiamo far vedere che, se $x \in \text{Nucleo}[Q(\tau,t)]$, allora $x \in X_{nO}(\tau,t)$.

Dire che $x \in \text{Nucleo}[Q(\tau,t)]$ significa dire che $Q(\tau,t)x = 0$ e quindi anche che

$$x^T Q(\tau,t)x = 0$$

Sostituendo l'espressione del gramiano di osservabilità, questa equivale a

$$x^T\left(\int_\tau^t \Phi^T(\sigma,\tau)H^T(\sigma)H(\sigma)\Phi(\sigma,\tau)d\sigma\right)x = 0$$

Portando tutto all'interno dell'integrale, otteniamo

$$\int_\tau^t x^T\Phi^T(\sigma,\tau)H^T(\sigma)\underbrace{H(\sigma)\Phi(\sigma,\tau)x}_{y}d\sigma = 0$$

Si osserva che l'argomento dell'integrale è il prodotto del vettore $y = H(\sigma)\Phi(\sigma,\tau)x$ per il suo trasposto: considerando che il prodotto di un vettore per il suo trasposto è il quadrato della norma euclidea del vettore stesso, abbiamo dunque che

$$\int_\tau^t \left\|H(\sigma)\Phi(\sigma,\tau)x\right\|_2^2 d\sigma = 0$$

Da qui consegue che $H(\sigma)\Phi(\sigma,\tau)x = 0$ per $\forall\sigma\in[\tau,t]$ e cioè che lo stato x sia uno stato non osservabile: quindi $x\in X_{nO}(\tau,t)$.

CRITERIO DI OSSERVABILITÀ

Abbiamo dunque trovato il modo di determinare i sottospazi di raggiungibilità e di non raggiungibilità. A questo punto, ci chiediamo QUANDO sia possibile la stima di x(τ), noti l'ingresso e l'uscita del sistema nell'intervallo [τ,t]. Sussiste il seguente risultato:

Teorema - *Dato un sistema lineare descritto da una equazione di stato nella forma* $\dot{x} = F(\sigma)x + G(\sigma)u$, *fissati l'istante iniziale t e l'istante finale t, noti l'ingresso* $u(\bullet)$ *e l'uscita* $y(\bullet)$, *condizione necessaria e sufficiente per poter stimare, in modo univoco, lo stato iniziale x(t) è che*

$$\boxed{\rho[Q(\tau,t)] = n}$$

Se, invece, risulta $\rho[Q(\tau,t)] < n$, *la stima di x(t) non può essere fatta in modo univoco, ma solo a meno di una componente non osservabile costituita da un qualsiasi vettore di* $\text{Nucleo}[Q(\tau,t)]$

Dimostrazione

Sia $y(\sigma)$ l'uscita libera del sistema. Consideriamo la quantità $\Phi^T(\sigma,\tau)H^T(\sigma)y(\sigma)$. Se integriamo questa quantità tra l'istante iniziale τ e l'istante finale t, abbiamo che

$$\int_t^\tau \Phi^T(\sigma,\tau)H^T(\sigma)y(\sigma)d\sigma = \int_t^\tau \Phi^T(\sigma,\tau)H^T(\sigma)H(\sigma)\Phi(\sigma,\tau)x d\sigma =$$
$$= \left(\int_t^\tau \Phi^T(\sigma,\tau)H^T(\sigma)H(\sigma)\Phi(\sigma,\tau)d\sigma\right)x = Q(\tau,t)x$$

dove x è lo stato iniziale del sistema.

Dire che il rango della matrice Q(τ,t) deve essere pari ad n significa dire che questa matrice (che è quadrata di ordine n) è non singolare e quindi invertibile: possiamo perciò riscrivere quella relazione nella forma

$$x = Q^{-1}(\tau,t)\int_t^\tau \Phi^T(\sigma,\tau)H^T(\sigma)y(\sigma)d\sigma$$

L'argomento di quell'integrale è perfettamente noto, per cui lo stato iniziale x è univocamente determinabile.

Nel caso in cui , invece, $\rho[Q(\tau,t)] < n$, la matrice Q(τ,t) è singolare e quindi non invertibile. Di conseguenza, la relazione

$$\int_t^\tau \Phi^T(\sigma,\tau)H^T(\sigma)y(\sigma)d\sigma = Q(\tau,t)x$$

rappresenta un sistema di n equazioni in n incognite (che sono le componenti di x) che ammette ∞ soluzioni (proprio perché la matrice dei coefficienti Q(τ,t) è singolare). Queste infinite soluzioni sono nella forma

$$x = \bar{x} + \mathrm{Nucleo}[Q(\tau,t)]$$

dove $\bar{x}$ è una soluzione particolare del sistema, mentre $\mathrm{Nucleo}[Q(\tau,t)]$ rappresenta la componente non osservabile di cui parla la tesi del teorema.

Facciamo infine osservare che il sistema è senz'altro compatibile, dato che lo stato iniziale x(τ), a prescindere dal fatto che sia determinabile o meno, è certamente una soluzione del sistema stesso.

Quindi, se $\rho[Q(\tau,t)] = n$, siamo in grado di determinare x(τ) partendo solo dall'andamento dell'ingresso e dell'uscita; viceversa, se risulta $\rho[Q(\tau,t)] < n$, allora possiamo solo individuare una classe di stati, indistinguibili tra loro, che potrebbero fare tutti da stato iniziale.

Nel caso in cui riusciamo a determinare lo stato iniziale, il sistema si dice "**osservabile nell'intervallo [τ,t]**" ed è una caratteristica riferita all'intero sistema, nel senso che la possibilità di determinazione di x(τ) non è specifica per un x(τ) particolare, ma per un x(τ) del tutto generico.

CLASSI DI INDISTINGUIBILITÀ

Facciamo osservare inoltre quanto segue: la condizione $\rho[Q(\tau,t)] = n$, essendo $X_O(\tau,t) = \mathrm{Range}[Q(\tau,t)]$, equivale anche a $\boxed{\dim X_O(\tau,t) = n}$; possiamo allora riformulare il criterio di osservabilità dicendo che *il sistema* $\dot{x} = F(\sigma)x + G(\sigma)u$ *è osservabile in [t,t] se e solo il sottospazio di osservabilità ha dimensione pari ad n.*

Naturalmente, se $\dim X_O(\tau,t) = n$, si ha anche che $\dim X_O(\tau,t) = 0$, ossia che il sottospazio di non osservabilità contiene, come unico elemento, lo stato nullo, il che significa che solo lo stato nullo produce una uscita libera nulla.

Se, invece, il sistema non è osservabile, ossia se $\rho[Q(\tau,t)] < n$, i due sottospazi $X_O(\tau,t)$ e $X_{nO}(\tau,t)$ avranno ciascuna una dimensione finita: possiamo allora porre

$$r = \rho[Q(\tau,t)] = \dim X_O(\tau,t)$$
$$n - r = \dim X_{nO}(\tau,t)$$

In questa situazione, se $\overline{x}$ è un possibile stato iniziale, l'insieme degli stati $\{x \in X | x = \overline{x} + \mathrm{Nucleo}[Q(\tau,t)]\}$ racchiude tutti e soli i possibili stati iniziali del sistema che producono una uscita libera nulla (cioè appunto sono indistinguibili tra loro e con lo stato nullo): si pone allora

$$C.I.(\overline{x}) = \{x \in X | x = \overline{x} + \mathrm{Nucleo}[Q(\tau,t)]\} = \{x \in X | x = \overline{x} + X_{nO}(\tau,t)\}$$

e si dice che $C.I.(\overline{x})$ è la "**classe di stati indistinguibili da** $\overline{x}$".

Ovviamente, se il sistema è osservabile, ossia se $\dim X_O(\tau,t) = n$, risulta $C.I.(\overline{x}) = \{\overline{x}\}$, ossia appunto $X_{nO}(\tau,t) = \mathrm{Nucleo}[Q(\tau,t)] = \{0\}$.

PROPRIETÀ DI INCLUSIONE

Abbiamo dunque detto che l'insieme $X_{nO}(\tau,t)$ è uno spazio vettoriale che racchiude tutti gli stati $x \in X$ non osservabili, ossia tutti gli stati che producono una uscita libera nulla nell'intervallo $[\tau,t]$. Vogliamo allora vedere che cosa accade a questo insieme se aumentiamo con continuità il valore di t, ossia quindi l'ampiezza dell'intervallo di osservazione.

Consideriamo perciò due istanti successivi $t_1<t_2$ ed i corrispondenti sottospazi $X_{nO}(\tau,t_1)$ e $X_{nO}(\tau,t_2)$. Consideriamo un generico $x_2 \in X_{nO}(\tau,t_2)$: questo significa che il sistema, partendo da x_2 all'istante τ, produce una uscita libera nulla fino all'istante t_2; allora, l'uscita libera sarà anche nulla tra τ e t_1, il che significa che $x_2 \in X_{nO}(\tau,t_1)$. In generale, possiamo cioè affermare che *se uno stato non è osservabile in [t,t₂], non è osservabile anche in [t,t₁] con t₁<t₂: in formule, questa proprietà è espressa dalla relazione*

$$\boxed{X_{nO}(\tau,t_1) \supseteq X_{nO}(\tau,t_2)}$$

In termini concreti, questa proprietà dice che, spostando via via il tempo finale, otteniamo sempre più informazioni dalla conoscenza dell'uscita ed <u>è quindi possibile che uno stato non osservabile fino all'istante t_1 diventi invece osservabile in un istante successivo t_2</u>.

Quindi, se consideriamo un ulteriore istante $t_3 > t_2$, risulterà

$$X_{nO}(\tau, t_1) \supseteq X_{nO}(\tau, t_2) \supseteq X_{nO}(\tau, t_3)$$

e così per istanti via via successivi. In generale, cioè, il sottospazio $X_{nO}(\tau, t)$, all'aumentare di t, non può aumentare, ma può solo ridursi o, tutt'al più, rimanere invariato. Naturalmente, <u>quando parliamo di "riduzione" di uno spazio vettoriale ci riferiamo al fatto che diminuisce la sua dimensione</u>. Allora, ci sarà sicuramente un istante $t = \hat{t}$ oltre il quale $X_{nO}(\tau, t)$ non si riduce più, ossia oltre il quale la dimensione non può più scendere: allora, il sottospazio $X_{nO}(\tau, \hat{t})$ conterrà necessariamente tutti gli stati $x \in X$ che, a prescindere dall'istante finale di osservazione, determinano una uscita libera nulla. Per brevità, possiamo dunque porre

$$X_{nO}(\tau, \hat{t}) = X_{nO}(\tau)$$

Naturalmente, se il sistema fosse anche tempo-invariante, non sarebbe nemmeno necessario conoscere l'istante τ e quindi il sottospazio contenente gli stati che producono una uscita identicamente nulla a prescindere dall'istante finale si indica brevemente con X_{nO} .

SISTEMI TEMPO-DISCRETI LINEARI TEMPO-INVARIANTI

Passiamo allora allo studio del problema della osservabilità con riferimento ai sistemi (regolari a dimensioni finite) lineari e tempo-invarianti. In particolare, ci riferiamo, per il momento, ai sistemi tempo-discreti, la cui rappresentazione in forma di stato è

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

Data la tempo-invarianza, consideriamo come istante iniziale l'istante τ=0; siano $x = x(0)$ lo stato iniziale e $y(0) = Hx(0)$ il corrispondente valore iniziale dell'uscita (ovviamente ci riferiamo all'uscita libera, per cui, nel seguito, l'aggettivo "libera" sarà sottointeso). All'istante t=1, l'uscita è $y(1) = Hx(1)$ e lo stato $x(1)$ può essere ricavato attraverso l'equazione del movimento, che per un sistema di questo tipo è

$$x(t) = F^t x$$

Abbiamo perciò che

$$y(1) = Hx(1) = HFx$$

In modo del tutto analogo, per gli istanti successivi abbiamo che

$$\begin{aligned} & y(2) = Hx(2) = HF^2 x \\ & y(3) = Hx(3) = HF^3 x \\ & \ldots. \\ & y(n-1) = Hx(n-1) = HF^{n-1} x \\ & \ldots. \end{aligned}$$

Facciamo osservare che ci siamo fermati al valore dell'uscita all'istante t=n-1: vedremo più avanti per quale motivo è inutile considerare ulteriori valori dell'uscita.

Ci mettiamo dunque nelle ipotesi di conoscere tutti questi valori dell'uscita e di voler determinare il valore dello stato iniziale.

Intanto, posiamo riscrivere le relazioni di prima in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \dots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} x$$

Questa relazione matriciale rappresenta un sistema lineare in n incognite, che sono le n componenti dello stato iniziale x. Possiamo anche affermare che si tratta di un sistema certamente compatibile, visto che almeno il reale stato di partenza (che noi "speriamo" di calcolare) è una sua soluzione. Il problema che dobbiamo porci è allora se e quando il sistema ammette 1 sola soluzione: solo in questo caso, infatti, noi potremo determinare univocamente lo stato iniziale x.

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$\mathbf{K_O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \dots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

Essa prende il nome di "**matrice di osservabilità**". Affinché il sistema ammetta 1 sola soluzione, la matrice dei coefficienti deve avere rango pari ad n, per cui possiamo affermare che *il sistema ammette una sola soluzione (il che significa che lo stato iniziale è determinabile in modo univoco) se e solo se* $\boxed{\rho(\mathbf{K_O}) = n}$.

Questa matrice di osservabilità ha dimensione $np*n$: questo significa che n è il valore massimo del rango che essa può avere, visto che possiamo trovare al più n righe linearmente indipendenti, per cui il sistema ammette una sola soluzione se $\mathbf{K_O}$ è a rango massimo.

Se, invece, risulta $\rho(\mathbf{K_O}) < n$, allora il sistema ammette ∞ soluzioni e quindi, ancora una volta, non riusciamo a determinare in modo univoco lo stato iniziale, ma solo delle classi di indistinguibilità: ciò significa che, se $\bar{x}$ è una qualsiasi soluzione particolare del sistema, potremo tutt'al più dire individuare l'insieme

$$C.I.(\bar{x}) = \left\{ x \in X \middle| x = \bar{x} + \text{Nucleo}[\mathbf{K_O}] \right\}$$

A questo punto siamo in grado di capire per quale motivo, ai fini della determinazione dello stato iniziale, è sufficiente conoscere i valori dell'uscita solo dall'istante t=0 all'istante t=n-1. Supponiamo, ad esempio, di conoscere anche il valore $y(n) = HF^n x$ dell'uscita all'istante t=n: il sistema da risolvere diventa

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \cdots \\ y(n-1) \\ y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \ldots \\ HF^{n-1} \\ HF^n \end{bmatrix} x$$

E' immediato accorgersi che la matrice dei coefficienti di questo sistema ha lo stesso rango della matrice $\mathbf{K_O}$: il motivo è che, in base al teorema di Cayley - Hamilton, il blocco HF^n può essere espresso come combinazione lineare dei blocchi precedenti. In altre parole, quindi, il valore $y(n) = HF^n x$ non è una ulteriore informazione sull'uscita, visto che può essere ricavata come combinazione lineare dei valori precedenti.

Detto anche in altre parole, possiamo dire che *lo stato iniziale o può essere determinato conoscendo l'uscita dopo n passi oppure non può essere determinato affatto, anche valutando l'uscita dopo più di n passi.*

A questo punto, ci chiediamo a cosa corrisponde, per sistemi di questo tipo, l'insieme X_{nO}, ossia lo spazio vettoriale contenente tutti gli stati non osservabili del sistema, ossia ancora lo spazio vettoriale contenente tutti gli stati che producono una uscita (libera) nulla: dire che $x \in X_{nO}$ significa dunque dire che

$$\begin{aligned} &y(0) = 0 = Hx \\ &y(1) = 0 = Hx(1) = HFx \\ &y(2) = 0 = Hx(2) = HF^2 x \\ &y(3) = 0 = Hx(3) = HF^3 x \\ &\cdots \\ &y(n-1) = 0 = Hx(n-1) = HF^{n-1} x \end{aligned}$$

In forma matriciale, abbiamo la relazione

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \ldots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} x$$

Abbiamo cioè un sistema omogeneo, nelle n incognite rappresentate dalle componenti dello stato iniziale, la cui matrice dei coefficienti è ancora una volta la matrice di osservabilità $\mathbf{K_O}$: la soluzione o le soluzioni di questo sistema costituiscono tutti e soli gli stati contenuti in X_{nO}, per cui possiamo scrivere che

$$\boxed{X_{nO} = \text{Nucleo}(\mathbf{K_O})}$$

Ovviamente, sapendo che il sottospazio di osservabilità X_O è il complemento ortogonale di X_{nO}, da qui scaturisce immediatamente che

$$\boxed{X_O = \mathrm{Range}\left(\mathbf{K}_O^T\right)}$$

N.B. Facciamo osservare che la matrice di osservabilità $\mathbf{K}_O$ non è, in generale simmetrica, ed è per questo motivo che è stato necessario lasciare l’operatore “trasposto”.

SISTEMI TEMPO-CONTINUI LINEARI TEMPO-INVARIANTI

Passiamo adesso allo studio dettagliato della osservabilità per sistemi tempo-continui (regolari a dimensioni finite), lineari e tempo-invarianti, descritti in forma di stato da equazioni nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases}$$

Il problema che ci poniamo è sempre lo stesso: *noto l’andamento temporale dell’uscita libera* $y(t) = He^{Ft}x(0)$*, è possibile determinare univocamente lo stato di partenza x(0)?*

Facciamo l’ipotesi di conoscere l’andamento $y(\bullet)$ dell’uscita libera in un certo intervallo $[0, t_f]$; facciamo anche l’ipotesi, per comodità, che sia $\boxed{p = 1}$, ossia che il sistema abbia 1 sola uscita (per cui $y(\bullet)$ è una funzione scalare).

In base al teorema di Cayley-Hamilton, possiamo scrivere che

$$e^{Ft} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)F + \alpha_2(t)F^2 + \ldots + \alpha_{n-1}(t)F^{n-1}$$

per cui l’espressione dell’uscita libera diventa

$$y(t) = He^{Ft}x(0) = \left[\alpha_0(t)H + \alpha_1(t)HF + \alpha_2(t)HF^2 + \ldots + \alpha_{n-1}(t)HF^{n-1}\right]x(0)$$

Adesso, definiamo il cosiddetto “**prodotto scalare tra due funzioni f e g**”:

$$< f, g >= \int_0^{t_f} f(\xi)g(\xi)d\xi$$

Usando questa definizione, possiamo calcolare i prodotti scalari tra le funzioni $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \ldots, \alpha_{n-1}(t)$ e l’uscita libera: abbiamo che

$$\begin{aligned}
&< \alpha_0, y >= \left[< \alpha_0, \alpha_0 > H + < \alpha_0, \alpha_1 > HF + < \alpha_0, \alpha_2 > HF^2 + \ldots + < \alpha_0, \alpha_{n-1} > HF^{n-1}\right]x(0) \\
&< \alpha_1, y >= \left[< \alpha_1, \alpha_0 > H + < \alpha_1, \alpha_1 > HF + < \alpha_1, \alpha_2 > HF^2 + \ldots + < \alpha_1, \alpha_{n-1} > HF^{n-1}\right]x(0) \\
&< \alpha_2, y >= \left[< \alpha_2, \alpha_0 > H + < \alpha_2, \alpha_1 > HF + < \alpha_2, \alpha_2 > HF^2 + \ldots + < \alpha_2, \alpha_{n-1} > HF^{n-1}\right]x(0) \\
&\ldots \\
&< \alpha_{n-1}, y >= \left[< \alpha_{n-1}, \alpha_0 > H + < \alpha_{n-1}, \alpha_1 > HF + < \alpha_{n-1}, \alpha_2 > HF^2 + \ldots + < \alpha_{n-1}, \alpha_{n-1} > HF^{n-1}\right]x(0)
\end{aligned}$$

Scrivendo queste relazioni in forma matriciale, abbiamo quanto segue:

$$\begin{bmatrix} <\alpha_0, y> \\ <\alpha_1, y> \\ <\alpha_2, y> \\ .... \\ <\alpha_{n-1}, y> \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} <\alpha_0,\alpha_0> & <\alpha_0,\alpha_1> & <\alpha_0,\alpha_2> & \dots & <\alpha_0,\alpha_{n-1}> \\ <\alpha_1,\alpha_0> & <\alpha_1,\alpha_1> & <\alpha_1,\alpha_2> & \dots & <\alpha_1,\alpha_{n-1}> \\ <\alpha_2,\alpha_0> & <\alpha_2,\alpha_1> & <\alpha_2,\alpha_2> & \dots & <\alpha_2,\alpha_{n-1}> \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ <\alpha_{n-1},\alpha_0> & <\alpha_{n-1},\alpha_1> & <\alpha_{n-1},\alpha_2> & \dots & <\alpha_{n-1},\alpha_{n-1}> \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \dots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K_O}} x(0)$$

Essendo nota l'uscita ed essendo note le funzioni $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$, i prodotti scalari sono tutti dei numeri noti, per cui il primo membro di questa relazione è un vettore di termini noti di dimensione n: lo indichiamo brevemente con $\langle\alpha, y\rangle$. La matrice che contiene i prodotti scalari tra le funzioni $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ è a sua volta una matrice (quadrata di ordine n) composta da termini noti: essa prende il nome di "**matrice di Gram**" associata alle funzioni $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ e la indichiamo brevemente con G_α. Infine, la matrice

$$\mathbf{K_O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \dots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

è anch'essa completamente nota e prende ancora una volta il nome di "**matrice di osservabilità**".

In conclusione, quindi, abbiamo ottenuto il sistema

$$\boxed{G_\alpha \mathbf{K_O} x(0) = \langle\alpha, y\rangle}$$

Questo è un sistema di n equazioni nelle n incognite costituite dalle n componenti dello stato iniziale x(0). Si tratta, inoltre, di un sistema certamente compatibile, visto che almeno il reale stato iniziale rappresenta una sua soluzione. Tale stato rappresenta l'unica soluzione del sistema se e solo se il rango della matrice dei coefficienti $G_\alpha \mathbf{K_O}$ è pari ad n. Vediamo allora di indagare maggiormente sul rango di questa matrice $G_\alpha \mathbf{K_O}$.

Intanto, applicando la *disuguaglianza di Sylvester*, abbiamo che

$$\rho(G_\alpha) + \rho(\mathbf{K_O}) - c \le \rho(G_\alpha \mathbf{K_O}) \le \min(\rho(G_\alpha), \rho(\mathbf{K_O}))$$

La dimensione comune alle matrici G_α e $\mathbf{K_O}$ è chiaramente n; inoltre, il fatto che le funzioni $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ siano, per definizione, linearmente indipendenti nell'intervallo $[0,t_f]$ ci garantisce che la matrice G_α sia non singolare: trattandosi di una matrice quadrata di ordine n, deduciamo che $\rho(G_\alpha) = n$. La disuguaglianza diventa dunque

$$\rho(\mathbf{K_O}) \le \rho(G_\alpha \mathbf{K_O}) \le \min(n, \rho(\mathbf{K_O}))$$

Per quanto riguarda la matrice di osservabilità, sappiamo solo che $\rho(\mathbf{K_O}) \le n$ e questo implica che $\min(n, \rho(\mathbf{K_O})) = \rho(\mathbf{K_O})$: di conseguenza, otteniamo

$$\rho(\mathbf{K_O}) \le \rho(G_\alpha \mathbf{K_O}) \le \rho(\mathbf{K_O})$$

da cui scaturisce che

$$\rho(G_\alpha \mathbf{K_O}) = \rho(\mathbf{K_O})$$

Allora, richiedere che la matrice dei coefficienti del sistema $G_\alpha \mathbf{K_O} x(0) = \langle \alpha, y \rangle$ abbia rango pari ad n significa richiedere che la matrice di osservabilità abbia rango n. Possiamo perciò concludere enunciando il seguente teorema:

Teorema - *Lo stato iniziale x(0) di un sistema tempo-continuo lineare tempo-invariante (oltre che regolare a dimensioni finite) è univocamente determinabile, risolvendo il sistema $G_\alpha \mathbf{K_O} x(0) = \langle \alpha, y \rangle$, se e solo se risulta $\rho(\mathbf{K_O}) = n$, ossia se la matrice di osservabilità è a rango pieno*

In modo analogo a quanto fatto per i sistemi tempo-discreti, vogliamo adesso vedere come si ricavano i sottospazi di osservabilità X_O e di non osservabilità X_{nO}. Il discorso da fare è identico a quello fatto nel caso tempo-discreto.

Partiamo dalla determinazione di X_{nO}, ossia dello spazio vettoriale contenente tutti gli stati che producono una uscita (libera) nulla: dire che $x \in X_{nO}$ significa dunque dire che $y(t) = He^{Ft}x = 0$ e quindi anche che

$$\begin{bmatrix} <\alpha_0, y> \\ <\alpha_1, y> \\ <\alpha_2, y> \\ .... \\ <\alpha_{n-1}, y> \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi, il sistema da risolvere per trovare x diventa

$$G_\alpha \mathbf{K_O} x = 0$$

D'altra parte, abbiamo detto che la matrice G_α è una matrice senz'altro non singolare, per cui quella relazione si riduce a

$$\boxed{\mathbf{K_O} x = 0}$$

Si tratta di un sistema omogeneo, nelle n incognite rappresentate dalle componenti dello stato iniziale, la cui matrice dei coefficienti è ancora una volta la matrice di osservabilità $\mathbf{K_O}$; la soluzione o le soluzioni di questo sistema costituiscono tutti e soli gli stati contenuti in X_{nO}, per cui possiamo scrivere anche qui, come nel caso tempo-discreto, che

$$\boxed{\begin{aligned} X_{nO} &= \text{Nucleo}(\mathbf{K_O}) \\ X_O &= \text{Range}(\mathbf{K_O^T}) \end{aligned}}$$

Tutto questo vale nell'ipotesi che p=1, ossia che il sistema abbia 1 sola uscita. Possiamo però verificare facilmente che i risultati sono identici nel caso in cui il numero p di uscite è del tutto generico.

Intanto, possiamo sempre scrivere l'uscita libera nella forma

$$y(t) = He^{Ft}x(0) = \left[\alpha_0(t)H + \alpha_1(t)HF + \alpha_2(t)HF^2 + \ldots + \alpha_{n-1}(t)HF^{n-1}\right]x(0)$$

con la differenza, rispetto a prima, che la quantità y(t) rappresenta adesso un vettore di p funzioni. Possiamo anche definire il prodotto scalare tra due funzioni vettoriali f e g:

$$< f, g >= \int_0^{t_f} f(\xi)g(\xi)d\xi$$

Al contrario di prima, la quantità <f,g> rappresenta dunque non uno scalare, ma un vettore di p scalari.

Con questa posizione, possiamo ancora calcolare i prodotti scalari tra le funzioni $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \ldots, \alpha_{n-1}(t)$ e l'uscita libera: abbiamo che

$$\begin{aligned}
&< \alpha_0, y >= \left[< \alpha_0, \alpha_0 > H + < \alpha_0, \alpha_1 > HF + < \alpha_0, \alpha_2 > HF^2 + \ldots + < \alpha_0, \alpha_{n-1} > HF^{n-1}\right]x(0) \\
&< \alpha_1, y >= \left[< \alpha_1, \alpha_0 > H + < \alpha_1, \alpha_1 > HF + < \alpha_1, \alpha_2 > HF^2 + \ldots + < \alpha_1, \alpha_{n-1} > HF^{n-1}\right]x(0) \\
&< \alpha_2, y >= \left[< \alpha_2, \alpha_0 > H + < \alpha_2, \alpha_1 > HF + < \alpha_2, \alpha_2 > HF^2 + \ldots + < \alpha_2, \alpha_{n-1} > HF^{n-1}\right]x(0) \\
&\ldots \\
&< \alpha_{n-1}, y >= \left[< \alpha_{n-1}, \alpha_0 > H + < \alpha_{n-1}, \alpha_1 > HF + < \alpha_{n-1}, \alpha_2 > HF^2 + \ldots + < \alpha_{n-1}, \alpha_{n-1} > HF^{n-1}\right]x(0)
\end{aligned}$$

Queste n relazioni sono, in questo caso, relazioni matriciali, ognuna equivalente a p relazioni scalari. Scrivendo tutto in forma matriciale, abbiamo quanto segue:

$$\begin{bmatrix} < \alpha_0, y > \\ < \alpha_1, y > \\ < \alpha_2, y > \\ \ldots. \\ < \alpha_{n-1}, y > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < \alpha_0, \alpha_0 > & < \alpha_0, \alpha_1 > & < \alpha_0, \alpha_2 > & \ldots & < \alpha_0, \alpha_{n-1} > \\ < \alpha_1, \alpha_0 > & < \alpha_1, \alpha_1 > & < \alpha_1, \alpha_2 > & \ldots & < \alpha_1, \alpha_{n-1} > \\ < \alpha_2, \alpha_0 > & < \alpha_2, \alpha_1 > & < \alpha_2, \alpha_2 > & \ldots & < \alpha_2, \alpha_{n-1} > \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ < \alpha_{n-1}, \alpha_0 > & < \alpha_{n-1}, \alpha_1 > & < \alpha_{n-1}, \alpha_2 > & \ldots & < \alpha_{n-1}, \alpha_{n-1} > \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \ldots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K_O}} x(0)$$

Il vettore a primo membro è un vettore colonna formato da np componenti (tutte note) e lo indichiamo ancora una volta con $\langle \alpha, y \rangle$. La matrice che contiene i prodotti scalari tra le funzioni $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \ldots, \alpha_{n-1}(t)$ è invece una matrice (quadrata di ordine np) composta anch'essa da termini noti: la indichiamo questa volta con $\tilde{G}_\alpha$. Infine, la matrice

$$\mathbf{K_O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \dots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

(di dimensioni $np * n$) è anch'essa completamente nota.

In conclusione, quindi, abbiamo ottenuto ancora una volta un sistema nella forma

$$\boxed{\tilde{G}_\alpha \mathbf{K_O} x(0) = \langle \alpha, y \rangle}$$

con la differenza, rispetto al caso precedente, che le equazioni sono np e non più n. Si tratta, inoltre, di un sistema certamente compatibile, visto che almeno il reale stato iniziale rappresenta una sua soluzione. Tale stato rappresenta l'unica soluzione del sistema se e solo se il rango della matrice dei coefficienti $\tilde{G}_\alpha \mathbf{K_O}$ è pari ad n. Vediamo allora di indagare maggiormente sul rango di questa matrice $\tilde{G}_\alpha \mathbf{K_O}$.

Cominciamo dalla matrice $\tilde{G}_\alpha$. E' possibile dimostrare che esiste una permutazione di righe e colonne di questa matrice tale da porre la matrice stessa in una forma diagonale a blocchi, dove i blocchi sono in numero pari proprio a p e sono tutti pari alla matrice G_α trovata nel caso di 1 sola uscita:

$$\tilde{G}_\alpha = \begin{bmatrix} G_\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_\alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & G_\alpha \end{bmatrix}$$

Allora, avendo detto che la matrice G_α è una matrice di rango n, deduciamo che il rango della matrice $\tilde{G}_\alpha$ è pari a pn. Sfruttando questa informazione, consideriamo ancora una volta la disuguaglianza di Sylvester:

$$\rho\left(\tilde{G}_\alpha\right) + \rho\left(\mathbf{K_O}\right) - c \le \rho\left(\tilde{G}_\alpha \mathbf{K_O}\right) \le \min\left(\rho\left(\tilde{G}_\alpha\right), \rho\left(\mathbf{K_O}\right)\right)$$

La dimensione comune alle matrici $\tilde{G}_\alpha$ e $\mathbf{K_O}$ è chiaramente np; inoltre, abbiamo appena detto che $\rho\left(\tilde{G}_\alpha\right) = np$, per cui la disuguaglianza diventa

$$\rho\left(\mathbf{K_O}\right) \le \rho\left(\tilde{G}_\alpha \mathbf{K_O}\right) \le \min\left(np, \rho\left(\mathbf{K_O}\right)\right)$$

Per quanto riguarda la matrice di osservabilità, sappiamo solo che $\rho\left(\mathbf{K_O}\right) \le n$ e questo implica che $\min\left(np, \rho\left(\mathbf{K_O}\right)\right) = \rho\left(\mathbf{K_O}\right)$: di conseguenza, otteniamo ancora una volta che

$$\rho\left(\mathbf{K_O}\right) \le \rho\left(G_\alpha \mathbf{K_O}\right) \le \rho\left(\mathbf{K_O}\right)$$

da cui scaturisce che

$$\rho\left(\tilde{G}_\alpha \mathbf{K_O}\right) = \rho\left(\mathbf{K_O}\right)$$

Quindi, possiamo concludere che *a prescindere dal numero di uscite del sistema, lo stato iniziale x(0) è univocamente determinabile, risolvendo il sistema* $\tilde{G}_\alpha \mathbf{K_O} x(0) = \langle \alpha, y \rangle$, *se e solo se risulta* $\rho\left(\mathbf{K_O}\right) = n$, *ossia se la matrice di osservabilità è a rango pieno.*

Valgono, ovviamente, le stesse considerazioni anche per quanto riguarda la determinazione dei sottospazi di osservabilità e non osservabilità: si trova cioè che

$$\boxed{\begin{aligned} X_{nO} &= \text{Nucleo}\left(\mathbf{K_O}\right) \\ X_O &= \text{Range}\left(\mathbf{K_O^T}\right) \end{aligned}}$$

Esempio: sistema del 2° ordine non osservabile

Consideriamo un sistema rappresentato, in forma di stato, dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

La prima domanda che ci poniamo è se la stima dello stato iniziale può essere fatta in modo univoco nell'ipotesi di conoscere l'andamento dell'uscita libera del sistema. Per rispondere a questa domanda, in base a quanto visto prima, dobbiamo semplicemente verificare se il rango della matrice di osservabilità $\mathbf{K_O}$ è pari all'ordine del sistema oppure no.

Essendo n=2, la matrice di osservabilità è

$$\mathbf{K_O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Questa matrice ha determinante nullo, per cui il rango è minore di 2, ed ha almeno un elemento non nullo, per cui $\rho\left(\mathbf{K_O}\right) = 1 < n = 2$. Deduciamo che la stima dello stato iniziale non può essere fatta in modo univoco: possiamo solo individuare una classe di stati indistinguibili, ossia un insieme di stati indistinguibili ciascuno dei quali può essere lo stato iniziale ricercato.

Andiamo allora a determinare i sottospazi di osservabilità e di non osservabilità. Le relazioni da usare sono

$$\begin{aligned} X_{nO} &= \text{Nucleo}\left(\mathbf{K_O}\right) \\ X_O &= X_{nO}^{\perp} = \text{Range}\left(\mathbf{K_O^T}\right) \end{aligned}$$

(da queste relazioni e dal fatto che $\rho\left(\mathbf{K_O}\right) = 1$ si deduce che sia X_O sia X_{nO} hanno dimensione 1).

Per trovare $X_{nO} = \text{Nucleo}\left(\mathbf{K_O}\right)$ dobbiamo semplicemente trovare tutti i vettori $x \in X$ che soddisfano il sistema $\mathbf{K_O} x = 0$, ossia

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

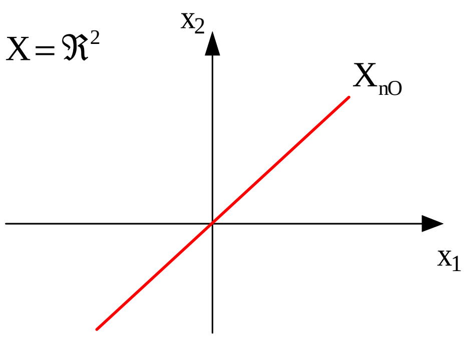
In forma esplicita, questo sistema è

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

ed è soddisfatto da tutti i vettori del tipo $x = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$ con a numero reale qualsiasi. Preso, ad esempio, a=1, possiamo scrivere che

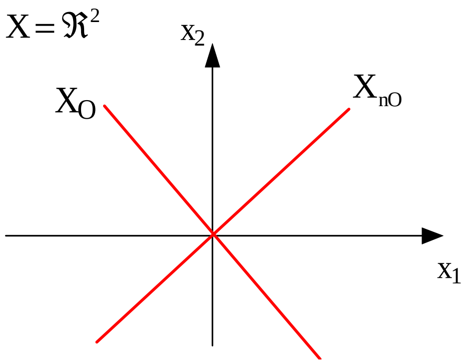
$$X_{nO} = sp\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente, possiamo schematizzare la situazione nel modo seguente:



Per calcolare, invece, il sottospazio di osservabilità, possiamo sia usare la relazione $X_O = \mathrm{Range}\left(\mathbf{K}_O^T\right)$ sia determinare il sottospazio ortogonale a X_{nO}. Seguendo, in particolare, questa seconda strada, è chiaro che i vettori $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ortogonali ai vettori del tipo $\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$ sono tutti i vettori del tipo $\begin{bmatrix} -a \\ a \end{bmatrix}$: preso, ancora una volta, a=1, deduciamo che

$$X_O = sp\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



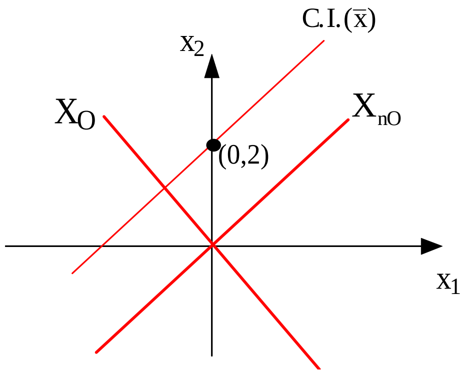
A questo punto, ci poniamo il seguente problema: abbiamo detto che, essendo $\rho(\mathbf{K_O}) = 1 < n = 2$, non è possibile stimare in modo univoco lo stato x(0) di partenza del sistema; allora, consideriamo uno stato arbitrario $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$: si tratta di uno stato non osservabile, visto che non appartiene ad X_O, ma che non appartiene nemmeno a X_{nO}. Vogliamo allora trovare la classe di indistinguibilità cui esso appartiene, ossia l'insieme di tutti gli stati che, presi come stati iniziali, producono la stessa uscita libera prodotta da $\bar{x}$ preso anch'esso come stato iniziale.

Per fare questo, è sufficiente applicare la formula

$$C.I.(\bar{x}) = \{x \in X | x = \bar{x} + \text{Nucleo}[\mathbf{K_O}]\} = \bar{x} + \text{Nucleo}[\mathbf{K_O}] = \bar{x} + X_{nO}$$

Avendo trovato che il generico stato appartenente a X_{nO} è del tipo $x_{nO} = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$, possiamo scrivere dunque che

$$C.I.(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_{nO} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a+2 \end{bmatrix} \quad \forall a \in \Re$$



Quindi, tutti gli stati appartenenti alla retta passante per (0,2) e parallela alla bisettrice del 1° e 3° quadrante sono stati che, presi come stato iniziale, producono la stessa uscita libera prodotta da (0,2) preso come stato iniziale. Possiamo allora dire, con riferimento a questo esempio, che tutte le classi di indistinguibilità sono delle rette parallele ad X_{nO}; anche X_{nO} è una classe di indistinguibilità, ma si tratta di una classe particolare, dato che è relativa all'elemento nullo. Anzi, proprio il fatto che X_{nO} sia la classe di indistinguibilità relativa all'elemento nullo fa' si che si tratti dell'unica classe di indistinguibilità che è uno spazio vettoriale.

ANALOGIA TRA OSSERVABILITÀ E RAGGIUNGIBILITÀ NEI SISTEMI LINEARI TEMPO-INVARIANTI

In questo paragrafo, vogliamo far vedere che esiste una stretta analogia (sarebbe meglio parlare di "*dualità*") tra la controllabilità e la raggiungibilità di un sistema. Per far vedere questo, consideriamo i seguenti due sistemi tempo-continui (regolari a dimensioni finite) lineari tempo-invarianti:

$$\text{sistema } S_1 \quad \begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases}$$

$$\text{sistema } S_2 \quad \begin{cases} \dot{z} = F^T z + H^T v \\ w = G^T z \end{cases}$$

Facciamo l'ipotesi che i due sistemi siano dello stesso ordine (il che significa che i vettori di stato x e z hanno lo stesso numero di componenti) e sia n questo ordine. Sotto questa ipotesi, si dice che il sistema S_2 è il "duale" del sistema S_1. Possiamo allora far vedere facilmente che *le proprietà di raggiungibilità del primo sistema coincidono con quelle di osservabilità del secondo.*

Per studiare la raggiungibilità di S_1, basta considerare la matrice di raggiungibilità

$$\mathbf{K_1} = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$$

e ricordare che il *sottospazio di raggiungibilità* è $X_{r1} = \text{Range}(\mathbf{K_1})$.

In modo analogo, per studiare l'osservabilità di S_2, basta considerare la matrice di osservabilità

$$\mathbf{K_{O2}} = \begin{bmatrix} H_2 \\ H_2F_2 \\ \dots \\ H_2F_2^{n-1} \end{bmatrix}$$

e ricordare che il *sottospazio di osservabilità* è $X_{O2} = \text{Range}(\mathbf{K_{O2}^T})$. D'altra parte, usando proprio quest'ultima relazione e ricordando come sono fatte le matrici di uscita H_2 e di stato F_2 del sistema S_2, abbiamo che

$$X_{O2} = \text{Range}(\mathbf{K_{O2}^T}) = \text{Range}\left(\begin{bmatrix} H_2 \\ H_2F_2 \\ \dots \\ H_2F_2^{n-1} \end{bmatrix}^T\right) = \text{Range}\left(\begin{bmatrix} G^T & G^TF^T & \dots & \dots & G^T\left(F^{n-1}\right)^T \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \text{Range}\left(\begin{bmatrix} G & FG & \dots & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}^T\right) = \text{Range}(\mathbf{K_1^T}) = \text{Range}(\mathbf{K_1}) = X_{r1}$$

Abbiamo dunque trovato che $X_{r1}=X_{O2}$ ed è ovviamente possibile dimostrare anche che $X_{O1}=X_{r2}$. Vale dunque il seguente "**principio di dualità**":

Teorema - *Il sottospazio di raggiungibilità (di osservabilità) di un sistema lineare tempo-invariante* (F,G,H) *coincide con il sottospazio di osservabilità (raggiungibilità) del suo sistema duale* (F^T,H^T,G^T)

Questo risultato giustifica l'analogia dei risultati ottenuti sulla controllabilità e sulla raggiungibilità ed è inoltre molto utile in quanto spesso permette di riportare problemi di osservabilità a problemi duali di raggiungibilità.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1