“Teoria dei sistemi” - Capitolo 9
Osservabilità (parte 2°)

Rappresentazioni canoniche per l’osservabilità 1
Introduzione 1
Scomposizione canonica di Kalman per la osservabilità 1
Legame ingresso-uscita e matrice di trasferimento *6*
Autovalori raggiungibili e autovalori non raggiungibili *8*
Esempio *8*
Scomposizione canonica di Jordan per la osservabilità 11
Forma canonica di osservazione 12
Determinazione della matrice di trasformazione T.................................. 13
Scomposizione canonica completa di Kalman 15
Introduzione 15
Scomposizione canonica.. 16
Autovalori della matrice di stato.. *22*
Legame ingresso-uscita.. *22*
Esempio: sistema del 4° ordine *23*

Rappresentazioni canoniche per l’osservabilità

INTRODUZIONE

Così come abbiamo visto per la raggiungibilità, esistono alcune forme canoniche particolarmente adatte per mettere in evidenza le proprietà di osservabilità di un dato sistema. Nel caso della raggiungibilità, abbiamo visto che le forme canoniche sono caratterizzate da una particolare struttura della matrice di stato F e della matrice di ingresso G; al contrario, nel caso della osservabilità continua ad essere coinvolta la matrice F, mentre l’altra matrice dalla struttura particolare è la matrice di uscita H.

SCOMPOSIZIONE CANONICA DI KALMAN PER LA OSSERVABILITÀ

Sia dato un sistema tempo-continuo (regolare a dimensioni finite) lineare e tempo-invariante, descritto (in forma di stato) dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases}$$

Il nostro scopo è dunque quello di trovare una rappresentazione del sistema, *equivalente* a quella data, tale però da mettere in evidenza le proprietà di osservabilità del sistema stesso. La prima rappresentazione (o “*forma canonica*”) cui ci interessiamo è basata sulla decomposizione dello spazio di stato X in sottospazio di osservabilità X_O e in sottospazio di non osservabilità X_{nO} (ricordiamo, a tale proposito, che sussistono le relazioni $X_{nO} \oplus X_O = X$ e $X_O = X_{nO}^{\perp}$).

In primo luogo, la conoscenza della coppia di matrici (F,H) ci consente di individuare la "*matrice di osservabilità*" del sistema, definita dalla relazione

$$\mathbf{K_O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \dots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

Questa matrice è importante in quanto sappiamo che $X_O = \mathrm{Range}(\mathbf{K_O^T})$ e $X_{nO} = \mathrm{Nucleo}(\mathbf{K_O})$: poniamo

$$r = \dim(X_{nO})$$
$$n - r = \dim(X_O)$$

dove ricordiamo che X_{nO} è il "*<u>sottospazio di non osservabilità</u>*" del sistema, ossia l'insieme dei vettori di X che godono delle proprietà di non essere osservabili (ossia di essere indistinguibili dallo stato nullo).

A questo punto, consideriamo una qualsiasi base del sottospazio di osservabilità X_{nO}: indichiamo con $(p_1, p_2, \dots, p_r)$ i vettori (linearmente indipendenti e in numero pari, ovviamente, alla dimensione di X_{nO}) che costituiscono tale base. Usiamo questi vettori per costruire le prima r colonne della matrice di trasformazione T:

$$T = [p_1 \mid p_2 \mid \dots \mid p_r \mid \dots\dots]$$

La matrice T è una matrice quadrata di ordine n, per cui restano da riempire altre n-r colonne; queste colonne devono essere indipendenti tra di loro e indipendenti anche dalle altre: fanno allora al caso nostro gli n-r vettori che costituiscono una qualsiasi base di X_O: indicati con $(p_{r+1}, p_{r+2}, \dots, p_n)$, abbiamo dunque che

$$T = \left[\underbrace{p_1 \mid p_2 \mid \dots \mid p_r}_{\substack{\text{base di } X_{nO} \\ \text{(r vettori)}}} \quad \underbrace{p_{r+1} \mid p_{r+2} \mid \dots \mid p_n}_{\substack{\text{base di } X_O \\ \text{(n-r vettori)}}} \right]$$

Questa matrice, per come è stata costruita, è senz'altro non singolare, per cui può essere usata come matrice per la trasformazione $z = T^{-1}x$ che porta il sistema nella forma

$$\begin{cases} \dot{z} = \hat{F}z + \hat{G}u \\ y = \hat{H}z \end{cases}$$

dove

$$\boxed{\begin{array}{l}\hat{F} = T^{-1}FT \\ \hat{G} = T^{-1}G \\ \hat{H} = HT\end{array}}$$

Vediamo allora di capire quali sono le proprietà di questa nuova rappresentazione, che prende il nome di "**scomposizione canonica di Kalman rispetto alla osservabilità**".

Intanto, per come abbiamo costruito la matrice T, possiamo scrivere che

$$x = Tz = z_1 p_1 + z_2 p_2 + \ldots + z_n p_n$$

Questa relazione dice, in pratica, che il generico stato x viene espresso come combinazione lineare di z componenti, secondo opportuni coefficienti, delle quali le prime r sono rispetto ad una base di X_{nO}, mentre le restanti n-r sono rispetto ad una base X_O. Possiamo allora partizionare il vettore z nel modo seguente:

$$z = \begin{bmatrix} z_A \\ z_B \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{r componenti} \\ \longleftarrow \text{n - r componenti} \end{array}$$

Il blocco z_A racchiude le componenti di z corrispondenti alla base di X_{nO}, ossia rappresenta le coordinate del vettore di stato rispetto a X_{nO}, mentre il blocco z_B racchiude le componenti di z corrispondenti alla base di X_O, ossia rappresenta le coordinate del vettore di stato rispetto a X_O.

Cerchiamo adesso di partizionare tutta l'equazione di stato $\dot{z} = \hat{F}z + \hat{G}u$ e l'equazione di uscita $y = \hat{H}z$ in accordo alla partizione scelta per z: abbiamo che

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_A \\ \dot{z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{AA} & \hat{F}_{AB} \\ \hat{F}_{BA} & \hat{F}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_A \\ z_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{G}_A \\ \hat{G}_B \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \hat{H}_A & \hat{H}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_A \\ z_B \end{bmatrix}$$

A questo punto, è possibile dimostrare (non lo facciamo) che, *in questa rappresentazione, i blocchi $\hat{F}_{BA}$ e $\hat{H}_A$ contengono solo elementi nulli.*

Possiamo perciò riscrivere le due equazioni matriciali a blocchi nella forma

$$\boxed{\begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{z}_A \\ \dot{z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{AA} & \hat{F}_{AB} \\ 0 & \hat{F}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_A \\ z_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{G}_A \\ \hat{G}_B \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & \hat{H}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_A \\ z_B \end{bmatrix} \end{array}}$$

Se le scriviamo in forma esplicita, queste relazioni corrispondono a

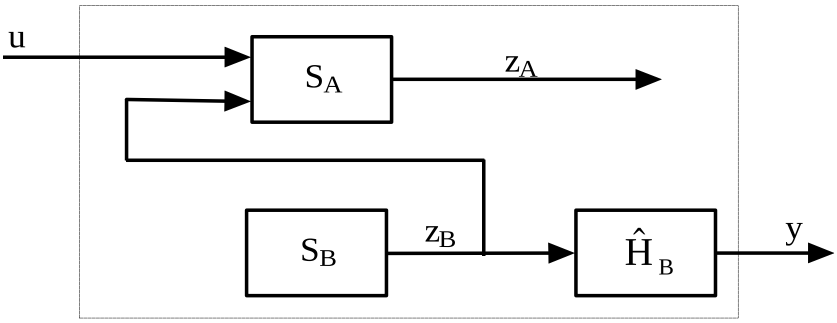
$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{z}_A = \hat{F}_{AA} z_A + \hat{F}_{AB} z_B + \hat{G}_A u \\ \dot{z}_B = \hat{F}_{BB} z_B \end{cases} \\ y = \hat{H}_B z_B \end{cases}$$

Possiamo allora pensare a queste equazioni come alle equazioni di stato e di uscita di due sottosistemi distinti e interconnessi tra di loro per formare il sistema complessivo:

$$\dot{z}_A = \hat{F}_{AA} z_A + \hat{F}_{AB} z_B + \hat{G}_A u : \quad \text{sottosistema } S_A \begin{cases} \text{vettore di stato } z_A \\ \text{ingressi } z_B \text{ e } u \\ \text{uscita } z_A \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_B = \hat{F}_{BB} z_B + \hat{G}_B u \\ y = \hat{H}_B z_B \end{cases} : \quad \text{sottosistema } S_B \begin{cases} \text{vettore di stato } z_B \\ \text{ingresso } u \\ \text{uscita } y \end{cases}$$

Il seguente diagramma a blocchi aiuta a capire l’interconnessione tra questi due sottosistemi:



Si osserva subito, dalle equazioni di stato dei due sottosistemi come anche dal diagramma appena riportato, che lo stato z_A del sottosistema S_A (di ordine r) non influisce in alcun modo (cioè né in modo diretto né in modo indiretto) sul valore dell’uscita; di conseguenza, lo stato z_B del sottosistema S_B (di ordine $n-r$) è l’unica componente di stato che influenza l’uscita. Allora, nel caso in cui $u=0$, l’uscita y (che è in questo caso una uscita libera) dipende solo dal movimento libero del sottosistema S_B, mentre non dipende dal movimento libero del sottosistema S_A. Dal punto di vista della osservabilità, questo significa che *z_A è uno stato sul quale l’uscita non può darci alcuna informazione.*

In questo senso, noi diamo che S_A è un “**sottosistema completamente non osservabile**”: tutti gli stati z_A di S_A sono indistinguibili dallo stato nullo, il che significa che $\boxed{X_A = X_{A,nO}}$, ossia che lo spazio di stato di S_A coincide con il sottospazio di non osservabilità di S_A stesso.

Diversa è invece la situazione per il sottosistema S_B (di ordine $n-r$): facciamo infatti vedere che *S_B è un sottosistema completamente osservabile, ossia che $X_B = X_{B,O}$.*

Intanto, la matrice di osservabilità dell’intero sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = \hat{F}z + \hat{G}u \\ y = \hat{H}z \end{cases}$$

è $\hat{\mathbf{K}}_O = \begin{bmatrix} \hat{H} \\ \hat{H}\hat{F} \\ \dots \\ \hat{H}\hat{F}^{n-1} \end{bmatrix}$

Usando la partizione prima ottenuta per $\hat{F}$ e $\hat{H}$, possiamo scrivere questa matrice nella forma

$$\hat{\mathbf{K}}_O = \begin{bmatrix} \hat{H} \\ \hat{H}\hat{F} \\ \dots \\ \hat{H}\hat{F}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \hat{H}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_{AA} & \hat{F}_{AB} \\ 0 & \hat{F}_{BB} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \hat{H}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_{AA} & \hat{F}_{AB} \\ 0 & \hat{F}_{BB} \end{bmatrix} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} 0 & \hat{H}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_{AA} & \hat{F}_{AB} \\ 0 & \hat{F}_{BB} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{H}_B \\ 0 & \hat{H}_B\hat{F}_{BB} \\ 0 & \hat{H}_B\hat{F}_{BB}^2 \\ \dots & \dots \\ 0 & \hat{H}_B\hat{F}_{BB}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Sappiamo che il rango di questa matrice deve essere pari alla dimensione del sottospazio di osservabilità X_O del sistema: questo sottospazio non dipende dalla rappresentazione utilizzata per lo spazio di stato, per cui la sua dimensione è sempre $n-r$; di conseguenza, anche la matrice $\hat{\mathbf{K}}_O$, così come la matrice $\mathbf{K}_O$, ha rango $n-r$.

D'altra parte, i blocchi nulli che compaiono nella espressione di $\hat{\mathbf{K}}_O$ non incidono ovviamente sul suo rango; inoltre, in base al teorema di Cayley-Hamilton, possiamo affermare che anche i blocchi $\hat{H}_B\hat{F}_{BB}^{n-r+1}, \hat{H}_B\hat{F}_{BB}^{n-r+2}, \dots, \hat{H}_B\hat{F}_{BB}^{n-1}$ non incidono su tale rango. Di conseguenza, la matrice che ha rango $n-r$ è la matrice

$$\hat{\mathbf{K}}_{O,B} = \begin{bmatrix} \hat{H}_B \\ \hat{H}_B\hat{F}_{BB} \\ \hat{H}_B\hat{F}_{BB}^2 \\ \dots \\ \hat{H}_B\hat{F}_{BB}^{n-r} \end{bmatrix}$$

A ben vedere, questa matrice $\hat{\mathbf{K}}_{O,B}$ è la matrice di osservabilità del sottosistema S_B: il fatto che la matrice abbia rango $n-r$ e che anche l'ordine di S_B sia pari ad $n-r$ ci dice che S_B è un sottosistema completamente osservabile, come volevamo dimostrare.

Quindi, preso un qualsiasi stato iniziale z e partizionandolo nella forma $z = \begin{bmatrix} z_A \\ z_B \end{bmatrix}$, se conosciamo l'uscita libera, possiamo univocamente determinare la componente z_B, mentre non possiamo fare altrettanto per z_A, che è determinabile solo a meno di una parte non osservabile.

In conclusione, *l'utilità della scomposizione canonica di Kalman per l'osservabilità è quella di scomporre il sistema complessivo S in una parte (S_B) completamente osservabile e in una parte (S_A) completamente non osservabile.*

Naturalmente, non è detto che esistano entrambi S_A ed S_B:

- se il sistema è completamente non osservabile, è chiaro che n=r, il che significa che $S=S_A$;
- se il sistema è completamente osservabile, allora r=0, il che significa che $S=S_B$.

Ricordiamo, inoltre, che *la scomposizione canonica di Kalman del sistema* (F,G,H) *non è unica, visto che c'è la più totale libertà per la scelta delle basi di* X_0 *e* X_{no} *con cui costruire la matrice di trasformazione T.*

N.B. Facciamo ancora una volta notare che tutti i risultati ottenuti per la scomposizione canonica di Kalman riguardo alla osservabilità sono del tutto analoghi a quelli ottenuti per la scomposizione canonica di Kalman rispetto alla raggiungibilità

Legame ingresso-uscita e matrice di trasferimento

Un'altra osservazione importante sulla scomposizione canonica di Kalman riguarda il legame ingresso-uscita: così come abbiamo fatto a suo tempo per la raggiungibilità, vogliamo vedere se e in che modo S_A e S_B influiscono sul legame ingresso-uscita.

Le equazioni rappresentative del sistema, prima della trasformazione, sono

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases}$$

Indicate con Y(s) e U(s) le trasformate di Laplace, rispettivamente, dell'uscita e dell'ingresso, sappiamo che la matrice di trasferimento W(s) del sistema (nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle) è data da

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = H(sI - F)^{-1} G$$

Mediante la trasformazione $x = Tz$, le equazioni rappresentative del sistema diventano

$$\begin{cases} \dot{z} = \hat{F}z + \hat{G}u \\ y = \hat{H}z \end{cases}$$

e ad esse corrisponde una matrice di trasferimento

$$\hat{W}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \hat{H}(sI - \hat{F})^{-1} \hat{G}$$

La prima cosa che facciamo vedere è che

$$\boxed{W(s) = H(sI - F)^{-1} G = \hat{H}(sI - \hat{F})^{-1} \hat{G}}$$

> N.B. Questa dimostrazione, già fatta nel capitolo sulla raggiungibilità, prescinde dal tipo di scomposizione canonica utilizzata, in quanto si basa solo sull'uso della matrice di trasformazione T.

Ricordando che

$$\hat{F} = T^{-1}FT$$
$$\hat{G} = T^{-1}G$$
$$\hat{H} = HT$$

si ha infatti che

$$\hat{H}\left(sI - \hat{F}\right)^{-1}\hat{G} = HT\left(sI - T^{-1}FT\right)^{-1}T^{-1}G = HT\left(s\underbrace{T^{-1}T}_{I} - T^{-1}FT\right)^{-1}T^{-1}G =$$
$$= HT\left(T^{-1}(sI - F)T\right)^{-1}T^{-1}G = \ldots = H\left((sI - F)\right)^{-1}G = W(s)$$

Premesso questo, troviamo una espressione di W(s) che tenga conto della particolare struttura delle matrici $\hat{F}$ e $\hat{H}$.

Facendo la solita partizione del vettore di stato z (e quindi anche della sua trasformata) abbiamo che

$$W(s) = \hat{H}\left(sI - \hat{F}\right)^{-1}\hat{G} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{H}_B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sI - \hat{F}_{AA} & -\hat{F}_{AB} \\ 0 & sI - \hat{F}_{BB} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \hat{G}_A \\ \hat{G}_B \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & \hat{H}_B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \left(sI - \hat{F}_{AA}\right)^{-1} & -\left(\hat{F}_{AB}\right)^{-1} \\ 0 & \left(sI - \hat{F}_{BB}\right)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{G}_A \\ \hat{G}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{H}_B\left(sI - \hat{F}_{BB}\right)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{G}_A \\ \hat{G}_B \end{bmatrix} =$$
$$= \hat{H}_B\left(sI - \hat{F}_{BB}\right)^{-1}\hat{G}_B$$

Abbiamo dunque trovato che

$$\boxed{W(s) = \hat{H}_B\left(sI - \hat{F}_{BB}\right)^{-1}\hat{G}_B}$$

Questa relazione, come era anche prevedibile, dice che ***la matrice di trasferimento W(s) dell'intero sistema non contiene alcun elemento legato al sottosistema non osservabile S_A.***

Non solo, ma possiamo verificare anche un'altra cosa: abbiamo visto prima che la rappresentazione di stato del sottosistema S_B è

$$\begin{cases} \dot{z}_B = \hat{F}_{BB}z_B + \hat{G}_B u \\ y = \hat{H}_B z_B \end{cases}$$

Da qui si deduce che la matrice di trasferimento di S_B è

$$W_B(s) = \hat{H}_B\left(sI - \hat{F}_{BB}\right)^{-1}\hat{G}_B$$

e si osserva che è uguale alla matrice di trasferimento dell'intero sistema.

Quindi, in generale, diciamo che *la scomposizione canonica di Kalman rispetto alla osservabilità comporta chela matrice di trasferimento W(s) dell'intero sistema, oltre a non contenere alcun elemento legato al sottosistema S_A, coincida con la matrice di trasferimento $W_B(s)$ del sottosistema S_B.*

Autovalori raggiungibili e autovalori non raggiungibili

C'è ancora dell'altro: sappiamo che la relazione $W(s)=H(sI-F)^{-1}G$ può anche essere scritta nella forma

$$W(s)=H\frac{\mathrm{adj}(sI-F)}{\det(sI-F)}G$$

il che evidenzia che, in generale, la matrice di trasferimento di un sistema possa presentare come poli (cioè come zeri del denominatore) tutti e soli gli autovalori della matrice di stato F. Vediamo allora cosa succede nel caso in cui il sistema venga posto nella forma canonica di Kalman.

Intanto, per come viene costruita, la matrice $\hat{F}$ possiede gli stessi autovalori della matrice F, pure con la stessa molteplicità; d'altra parte, $\hat{F}$ è una matrice diagonale a blocchi, per cui i suoi autovalori sono quelli dei blocchi $\hat{F}_{AA}$ e $\hat{F}_{BB}$; di conseguenza, avendo trovato che $W(s)=\hat{H}(sI-\hat{F})^{-1}\hat{G}$, possiamo affermare, sempre in linea generale, che la matrice W(s) può avere come poli tutti e soli gli autovalori dei blocchi $\hat{F}_{AA}$ e $\hat{F}_{BB}$. Per comodità, chiamiamo gli autovalori di $\hat{F}_{AA}$ come "**autovalori non osservabili**", per indicare che sono relativi ad S_A, mentre gli autovalori di $\hat{F}_{BB}$ saranno gli "**autovalori osservabili**", per indicare che sono relativi a S_B. Adesso, dall'altra relazione $W(s)=\hat{H}_B(sI-\hat{F}_{BB})^{-1}\hat{G}_B$, se calcoliamo esplicitamente quella inversa, otteniamo che

$$W(s)=\hat{H}_B\frac{\mathrm{adj}(sI-\hat{F}_{BB})}{\det(sI-\hat{F}_{BB})}\hat{G}_B$$

Da qui si deduce che *la matrice di trasferimento W(s) del sistema complessivo può avere come poli solo gli autovalori osservabili.*

Al contrario, gli autovalori non osservabili non sono poli per W(s).

Esempio

Supponiamo di avere un sistema descritto dalla seguente rappresentazione di stato:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Questo sistema è stato già analizzato in precedenza e, in particolare, si è trovato che esso non risulta completamente osservabile. La matrice di osservabilità di questo sistema è

$$\mathbf{K_O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

ed essa ha evidentemente rango $\rho(\mathbf{K_O}) = 1 \neq n = 2$ (a conferma del fatto che il sistema non è completamente osservabile). Il sottospazio di non osservabilità ha dimensione $\rho(\mathbf{K_O}) = 1$ e corrisponde al nucleo della matrice $\mathbf{K_O}$: tale nucleo è costituito da tutti i vettori $x \in X$ tali che $\mathbf{K_O}x = 0$ ed è immediato accorgersi che si tratta di tutti i vettori del tipo $\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$: preso, ad esempio, a=1, possiamo dunque scrivere che

$$X_{nO} = sp\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il sottospazio di osservabilità è l'insieme dei vettori di X che sono ortogonali ai vettori di X_{nO}: sarà evidentemente

$$X_O = sp\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Premesso questo, <u>avendo appurato che il sistema non è completamente osservabile, ha senso trovarne la scomposizione canonica di Kalman</u>, in modo da evidenziare la parte osservabile e quella non osservabile.

Possiamo subito dire che il sottosistema S_A completamente non osservabile ha dimensione pari a $r = \rho(\mathbf{K_O}) = 1$ e che il sottosistema S_B completamente osservabile ha dimensione $n - r = 1$. Per trovare tali sottosistemi, dobbiamo intanto costruire la matrice di trasformazione T: questa è una matrice quadrata di ordine 2 le cui colonne sono costituite da una base di X_{nO} ed una di X_O. In base a quanto trovato poco fa, possiamo allora prendere

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La trasformazione da utilizzare è dunque

$$z = T^{-1}x = \frac{1}{\det T} \operatorname{adj}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x$$

Il nuovo vettore di stato è dunque

$$\begin{bmatrix} z_A \\ z_B \end{bmatrix} = T^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} z_A = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ z_B = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

Eseguendo la trasformazione, otteniamo

$$\hat{F} = T^{-1}FT = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{G} = T^{-1}G = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{H} = HT = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix}$$

N.B. Facciamo osservare che, in accordo a quanto ci aspettavamo, risultano nulli sia l’elemento di posto 21 nella matrice $\hat{F}$ sia la prima componente del vettore riga $\hat{H}$; oltre a questi, compaiono anche altri elementi nulli nelle matrici, ma si tratta di un evento puramente casuale, non legato alla trasformazione utilizzata.

La nuova rappresentazione del sistema è dunque

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_A \\ \dot{z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_A \\ z_B \end{bmatrix}$$

Andiamo a calcolare la matrice di trasferimento del sistema, che poi si riduce ad una sola funzione: abbiamo prima trovato che

$$W(s) = \hat{H}_B\left(sI - \hat{F}_{BB}\right)^{-1}\hat{G}_B$$

per cui si tratta della funzione

$$W(s) = [-2](s - [-3])^{-1}\left[-\frac{1}{2}\right] = (s+3)^{-1} = \frac{1}{s+3}$$

L’unico polo di W(s) è s=-3 ed è l’autovalore osservabile del sistema; non compare, invece, come polo l’autovalore non osservabile s=-1.

SCOMPOSIZIONE CANONICA DI JORDAN PER LA OSSERVABILITÀ

Passiamo adesso a vedere un'altra possibile forma canonica nella quale è possibile porre il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases}$$

al fine di evidenziarne le proprietà di osservabilità. Così come abbiamo fatto anche per la raggiungibilità, vogliamo porre la matrice di stato F in forma di Jordan: sappiamo già che, per fare questo, basta prendere $T = M$, dove M è la "*matrice modale generalizzata*" associata ad F, è chiaro che ci basta prendere $T = M$.

Con questa posizione, otteniamo il sistema rappresentato nella forma

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{z} = Jz + \hat{G}u \\ y = \hat{H}z \end{array}}$$

dove

$$J = M^{-1}FM$$

$$\hat{G} = M^{-1}G$$

$$\hat{H} = HM$$

Anche questa volta, come per la raggiungibilità, ci interessa essenzialmente illustrare un importante criterio per la completa osservabilità del sistema. Tale criterio, valido per un sistema avente 1 sola uscita, ha il seguente enunciato:

Teorema - *Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema $(J, \hat{G}, \hat{H})$ sia completamente osservabile è che siano contemporaneamente verificate due condizioni:*

- *la matrice F deve essere ciclica, ossia per ogni autovalore della matrice F ci deve essere 1 solo miniblocco nella matrice J;*
- *in corrispondenza della 1° colonna di ciascun miniblocco di Jordan, la matrice di uscita $\hat{H}$ deve presentare un elemento $\neq 0$*

Analizziamo velocemente il significato di queste due condizioni.

Sulla prima condizione è inutile aggiungere altro, visto che si tratta della stessa condizione prevista dal *criterio di Jordan per la completa raggiungibilità*. Per quanto riguarda, invece, la seconda condizione, è opportuno dire qualcosa in più. Partiamo dalla matrice di Jordan, che sappiamo essere una matrice diagonale a blocchi. Al fine di comprendere la seconda condizione, affianchiamo questa matrice alla matrice $\hat{H}$ (che è un vettore riga ad n componenti in virtù dell'ipotesi per cui il sistema abbia 1 sola uscita):

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & 0 & \dots & 0 \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_k \end{bmatrix}$$
$$H = \begin{bmatrix} * & * & * & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

Allora, la seconda condizione dice questo: si considera l'ultima colonna di ciascun miniblocco di Jordan J_K; in corrispondenza di queste colonne, si individuano i corrispondenti elementi nel vettore riga $\hat{H}$; tutti questi elementi devono essere pari a 0.

FORMA CANONICA DI OSSERVAZIONE

La terza ed ultima forma canonica alla quale ci interessiamo è quella che va sotto il nome di "**forma canonica di osservazione**" ed è evidentemente la "duale" della *forma canonica di controllo* vista a proposito della raggiungibilità. Il punto di partenza è sempre il sistema nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases}$$

La prima cosa da fare è individuare il polinomio caratteristico associato alla matrice di stato F: se tale matrice ha dimensione n (per cui n è anche l'ordine del sistema), tale polinomio è nella forma

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

Il passo successivo è quello di individuare una matrice che abbia proprio $p(\lambda)$ come polinomio caratteristico: esistono infinite matrici aventi questa caratteristica e una di esse è senz'altro la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Si tratta della matrice che abbiamo definito in "**forma compagna del polinomio p(λ)**". Allora, per la osservabilità, si considera la TRASPOSTA di questa matrice:

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & \dots & -a_{n-2} \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & .... & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

Questa matrice è dunque così fatta: intanto, si tratta di una matrice quadrata di ordine n; la sotto-diagonale è costituita da elementi tutti unitari; l'ultima colonna presenta, come elementi, i coefficienti del polinomio $p(\lambda)$, a partire da a_n, tutti cambiati di segno; tutti gli altri elementi sono nulli.

Esiste allora il seguente risultato:

Teorema - *Dato un sistema nella forma* $\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases}$*, se il sistema ha 1 sola uscita (p=1) ed è completamente osservabile, allora è possibile trovare una trasformazione* $x = Tz$ *che ponga il sistema nella forma* $\begin{cases} \dot{z} = \hat{F}z + \hat{G}u \\ y = \hat{H}z \end{cases}$*, con* $\hat{F}$ *matrice compagna del polinomio caratteristico di F e con la matrice di uscita nella forma* $\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Allora, un sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases}$$

(con y funzione scalare) le cui matrici $\hat{F}$ ed $\hat{H}$ siano del tipo indicato nel teorema si dice che è espresso nella "**forma canonica di osservazione**". In base al teorema appena enunciato, se il sistema, oltre ad avere 1 sola uscita, è anche completamente osservabile, allora è possibile porlo nella forma canonica di osservazione:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & \dots & -a_{n-2} \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots. & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix} + \hat{G}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} z$$

La matrice di trasformazione T che porta il sistema dalla rappresentazione iniziale alla forma canonica di osservazione si ottiene a partire dal polinomio caratteristico della matrice F.

DETERMINAZIONE DELLA MATRICE DI TRASFORMAZIONE T

Supponiamo di avere a che fare con un sistema rappresentato, in forma di stato, dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases}$$

Abbiamo visto in precedenza come individuare immediatamente le 3 possibile forme canoniche con cui è possibile rappresentare questo sistema. Non abbiamo, invece, visto come si fa a determinare la matrice di trasformazione T che consenta di "portare" il sistema nella forma canonica desiderata: tuttavia, la conoscenza di questa matrice è indispensabile se, oltre a conoscere la matrice di stato $\hat{F}$ e la matrice di uscita $\hat{H}$, si vuole conoscere anche la matrice di ingresso $\hat{G}$. Vediamo allora come si determina la matrice di trasformazione T per portare il sistema, dalla rappresentazione data, ad una prefissata forma canonica

$$\begin{cases} \dot{z} = \hat{F}z + \hat{G}u \\ y = \hat{H}z \end{cases}$$

Per fare questo, possiamo partire dalle matrici di osservabilità $\mathbf{K_O}$ e $\hat{\mathbf{K}}_\mathbf{O}$ associate alle due rappresentazioni:

$$\mathbf{K_O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \dots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{K}}_\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \hat{H} \\ \hat{H}\hat{F} \\ \dots \\ \hat{H}\hat{F}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Cerchiamo allora di individuare il legame tra $\mathbf{K_O}$ e $\hat{\mathbf{K}}_\mathbf{O}$: partendo da quest'ultima e ricordando che $\hat{H} = HT$, abbiamo intanto che

$$\hat{\mathbf{K}}_\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \hat{H} \\ \hat{H}\hat{F} \\ \dots \\ \hat{H}\hat{F}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HT \\ HT\hat{F} \\ \dots \\ HT\hat{F}^{n-1} \end{bmatrix}$$

D'altra parte, è anche $\hat{F} = T^{-1}FT$, per cui

$$\hat{\mathbf{K}}_\mathbf{O} = \begin{bmatrix} HT \\ HTT^{-1}FT \\ \dots \\ HTT^{-1}F^{n-1}T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HT \\ HFT \\ \dots \\ HF^{n-1}T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \dots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} T = \mathbf{K_O}T$$

Abbiamo dunque trovato che le due matrici di osservabilità sono legate semplicemente dalla relazione

$$\boxed{\hat{\mathbf{K}}_\mathbf{O} = \mathbf{K_O}T}$$

Premoltiplicando ambo i membri per $\mathbf{K_O^T}$, questa diventa

$$\mathbf{K_O^T}\hat{\mathbf{K}}_\mathbf{O} = \mathbf{K_O^T}\mathbf{K_O}T$$

D'altra parte, se supponiamo che il sistema completamente osservabile, le due matrici di osservabilità hanno entrambe rango n e questo comporta che la matrice $\mathbf{K_O^T}\mathbf{K_O}$ (quadrata di ordine n) sia non singolare e quindi invertibile: invertendola, possiamo dunque concludere che

$$\left(\mathbf{K}_o^T\mathbf{K}_o\right)^{-1}\mathbf{K}_o^T\hat{\mathbf{K}}_o = T$$

Questo risultato vale nel caso di un sistema con p uscite; l'enunciato completo (pag. ...) del teorema è il seguente:

Teorema - *Se un sistema completamente osservabile è descritto, rispetto a due diverse basi di X (spazio di stato), da due coppie di matrici* (F,H) *e* $(\hat{F},\hat{H})$*, la matrice non singolare T che fornisce il cambiamento di coordinate è unica ed è data da*

$$\boxed{T = \left(\mathbf{K}_o^T\mathbf{K}_o\right)^{-1}\mathbf{K}_o^T\hat{\mathbf{K}}_o}$$

dove $\mathbf{K}_o$ *e* $\hat{\mathbf{K}}_o$ *sono le matrici di osservabilità rispettivamente di* (F,H) *e* $(\hat{F},\hat{H})$

Nel caso particolare in cui il sistema abbia p=1 uscita, le due matrici di osservabilità sono quadrate di ordine n e invertibili: di conseguenza, quella relazione diventa semplicemente

$$\boxed{T = \mathbf{K}_o^{-1}\hat{\mathbf{K}}_o}$$

Scomposizione canonica completa di Kalman

INTRODUZIONE

Nei capitoli e paragrafi precedenti, abbiamo illustrato le cosiddette "forme canoniche", ossia rappresentazioni dei sistemi che consentano di mettere in evidenza in modo relativamente immediato le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità. Abbiamo però trovato queste forme canoniche separatamente per la raggiungibilità e per l'osservabilità: nel primo caso, abbiamo scomposto il sistema in una parte completamente raggiungibile e in una completamente non raggiungibile, mentre, nel secondo caso, abbiamo scomposto il sistema in una parte completamente osservabile e in una completamente non osservabile. Allora, vogliamo adesso usare congiuntamente le nozioni di raggiungibilità e di osservabilità, allo scopo di decomporre il sistema in 4 sottosistemi che chiameremo nel modo seguente:

a) parte raggiungibile e non osservabile;

b) parte raggiungibile e osservabile;

c) parte non raggiungibile e non osservabile;

d) parte non raggiungibile e osservabile.

Questa decomposizione non è che una generalizzazione delle forme canoniche di Kalman precedentemente illustrate ed è molto importante nello studio dei sistemi: infatti, essa consente di mettere a fuoco, in modo semplice ed elegante, quali siano le parti del sistema da prendere in considerazione qualora si vogliano trattare alcuni dei problemi fondamentali della Teoria dei sistemi, come il calcolo delle relazioni ingresso-uscita, l’analisi della stabilità esterna del sistema, la definizione, il significato ed il calcolo delle funzioni di trasferimento ed altri problemi.

SCOMPOSIZIONE CANONICA

Consideriamo dunque un sistema tempo-continuo (regolare a dimensioni finite) lineare e tempo-invariante, descritto (in forma di stato) dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx \end{cases}$$

La conoscenza delle matrici F,G ed H ci consente immediatamente il calcolo delle matrici di raggiungibilità $\mathbf{K}$ e di osservabilità $\mathbf{K_O}$:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K_O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \dots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

A sua volta, la conoscenza di tali matrici ci consente l’individuazione del sottospazio di raggiungibilità X_r e del sottospazio di non osservabilità X_{nO}:

$$X_r = \mathrm{Range}(\mathbf{K})$$
$$X_{nO} = \mathrm{Nucleo}(\mathbf{K_O})$$

Consideriamo allora uno spazio vettoriale X_1 che contenga tutti gli stati che sono, contemporaneamente, raggiungibili (cioè appartenenti ad X_r) e non osservabili (cioè appartenenti ad X_{nO}):

sottospazio di raggiungibilità
e di non osservabilità : $X_1 = X_r \cap X_{nO}$

Consideriamo inoltre un secondo spazio vettoriale X_2 tale da soddisfare la condizione $X_1 \oplus X_2 = X_r$. Come possiamo individuare questo sottospazio? In base a come abbiamo costruito X_1, possiamo senz’altro scrivere che

sottospazio di raggiungibilità
e di osservabilità : $X_2 = X_1^{\perp} \cap X_r$

Il motivo per cui X_2 è stato chiamato "sottospazio di raggiungibilità e di osservabilità" sarà chiaro più avanti. Per il momento, osserviamo solo che, in base alla relazione $X_1 \oplus X_2 = X_r$, X_2 ci serve per costruire tutto X_r usando X_1.

In modo del tutto analogo, vogliamo anche costruire tutto X_{nO} mediante X_1: ci serve cioè un 3° sottospazio X_3 che goda della proprietà per cui $X_1 \oplus X_3 = X_{nO}$. Possiamo allora prendere

$$\begin{array}{c}\text{sottospazio di non raggiungibilità} \\ \text{e di non osservabilità}\end{array} \quad : \quad X_3 = X_1^{\perp} \cap X_{nO}$$

A questo punto, è possibile dimostrare due cose:

- la prima è che i tre sottospazi appena determinati sono tra loro disgiunti, ossia non hanno elementi in comune: questo fa' si che abbia senso considerare il sottospazio $X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$;
- in secondo luogo, si può anche dimostrare che $X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \neq X$.

Allora, se per esempio vogliamo costruire, mediante questi sottospazi, l'intero spazio di stato X del sistema, abbiamo bisogno di un 4° sottospazio X_4 tale che

$$X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4 = X$$

Ci basta allora prendere

$$\begin{array}{c}\text{sottospazio di non raggiungibilità} \\ \text{e di osservabilità}\end{array} \quad : \quad X_4 = \left(X_1 \oplus X_2 \oplus X_3\right)^{\perp}$$

Vediamo subito di giustificare il nome attribuito a questo sottospazio. In primo luogo, applicando la proprietà di omogeneità dell'operatore "somma diretta", possiamo scrivere che

$$X_4 = \left(X_1 \oplus X_2 \oplus X_3\right)^{\perp} = \left[\left(X_1 \oplus X_2\right) + \left(X_1 \oplus X_3\right)\right]^{\perp}$$

D'altra parte, sappiamo che $X_1 \oplus X_2 = X_r$ e che $X_1 \oplus X_3 = X_{nO}$, per cui

$$X_4 = \left[X_r + X_{nO}\right]^{\perp}$$

A questo punto, è facile dimostrare, partendo da quella relazione, che

$$X_4 = X_r^{\perp} \cap X_{nO}^{\perp}$$

Ma noi sappiamo anche che $X_{nr} = X_r^{\perp}$ e che $X_O = X_{nO}^{\perp}$, per cui

$$X_4 = X_{nr} \cap X_O$$

e da qui si capisce che X_4 racchiude gli stati osservabili e non raggiungibili.

Si possono anche dimostrare altre due proprietà del sottospazio X_4: risulta infatti che

$$X_3 \oplus X_4 = X_{nO}$$
$$X_2 \oplus X_4 = X_O$$

Fatta questa premessa, considerando che vogliamo arrivare ad una particolare rappresentazione

$$\begin{cases} \dot{z} = \hat{F}z + \hat{G}u \\ y = \hat{H}z \end{cases}$$

del sistema in esame, dobbiamo trovare una opportuna matrice di trasformazione T.

Ponendo

r_1 = dimensione di X_1
r_2 = dimensione di X_2
r_3 = dimensione di X_3
r_4 = dimensione di X_4

consideriamo, per ciascun sottospazio, una sua base:

$$X_1 \longrightarrow p_1, p_2, \dots, p_{r_1}$$
$$X_2 \longrightarrow p_{r_1+1}, p_{r_1+2}, \dots, p_{r_1+r_2}$$
$$X_3 \longrightarrow p_{r_1+r_2+1}, p_{r_1+r_2+2}, \dots, p_{r_1+r_2+r_3}$$
$$X_4 \longrightarrow p_{r_1+r_2+r_3+1}, p_{r_1+r_2+r_3+2}, \dots, p_{r_1+r_2+r_3+r_4}$$

Costruiamo allora la matrice di trasformazione T usando tutti questi vettori come colonne:

$$T = \left[\underbrace{p_1 p_2, \dots p_{r_1}}_{X_1} \underbrace{p_{r_1+1} p_{r_1+2} \dots p_{r_1+r_2}}_{X_2} \underbrace{p_{r_1+r_2+1} p_{r_1+r_2+2} \dots p_{r_1+r_2+r_3}}_{X_3} \underbrace{p_{r_1+r_2+r_3+1} p_{r_1+r_2+r_3+2} \dots p_{r_1+r_2+r_3+r_4}}_{X_4} \right]$$

Qual è la dimensione di questa matrice? Considerando che $X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4 = X$, si tratta di una matrice di dimensione n*n, visto che i vettori sono in numero n e sono tutti ad n componenti. Inoltre, si tratta anche di una matrice sicuramente non singolare, il che significa che può essere usata come matrice di trasformazione per portare il sistema nella forma

$$\begin{cases} \dot{z} = \hat{F}z + \hat{G}u \\ y = \hat{H}z \end{cases}$$

dove, come al solito, abbiamo posto

$$\hat{F} = T^{-1}FT$$
$$\hat{G} = T^{-1}G$$
$$\hat{H} = HT$$

Adesso, si tratta solo di individuare quali caratteristiche presenti questa nuova rappresentazione del sistema.

Per prima cosa, partizioniamo il vettore di stato z in modo congruente con le dimensioni dei 4 sottospazi:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xleftarrow{r_1 \text{ componenti}} \text{coordinate dello stato rispetto ad } X_1 \\ \xleftarrow{r_2 \text{ componenti}} \text{coordinate dello stato rispetto ad } X_2 \\ \xleftarrow{r_3 \text{ componenti}} \text{coordinate dello stato rispetto ad } X_3 \\ \xleftarrow{r_4 \text{ componenti}} \text{coordinate dello stato rispetto ad } X_4 \end{array}$$

Partizionando adesso le matrici $\hat{F}, \hat{G}, \hat{H}$ in modo congruente alla partizione di z, abbiamo una equazione di stato ed una equazione di uscita nella forma seguente:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{12} & \hat{F}_{13} & \hat{F}_{14} \\ \hat{F}_{21} & \hat{F}_{22} & \hat{F}_{23} & \hat{F}_{24} \\ \hline \hat{F}_{31} & \hat{F}_{32} & \hat{F}_{33} & \hat{F}_{34} \\ \hat{F}_{41} & \hat{F}_{42} & \hat{F}_{43} & \hat{F}_{44} \end{array}\right] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{G}_1 \\ \hat{G}_2 \\ \hat{G}_3 \\ \hat{G}_4 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 & \hat{H}_2 & \hat{H}_3 & \hat{H}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

Per individuare le particolarità dei vari blocchi, ci basta considerare quanto visto a proposito delle scomposizioni canoniche di Kalman rispetto alla raggiungibilità ed alla osservabilità. Cominciando dalla raggiungibilità, possiamo subito affermare che

$$\begin{bmatrix} \hat{F}_{31} & \hat{F}_{32} \\ \hat{F}_{41} & \hat{F}_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \hat{G}_3 \\ \hat{G}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

per cui le equazioni diventano

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{12} & \hat{F}_{13} & \hat{F}_{14} \\ \hat{F}_{21} & \hat{F}_{22} & \hat{F}_{23} & \hat{F}_{24} \\ \hline 0 & 0 & \hat{F}_{33} & \hat{F}_{34} \\ 0 & 0 & \hat{F}_{43} & \hat{F}_{44} \end{array}\right] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{G}_1 \\ \hat{G}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 & \hat{H}_2 & \hat{H}_3 & \hat{H}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda, invece, la osservabilità, si dimostra che è necessario effettuare una doppia permutazione nella matrice di stato: in particolare, bisogna scambiare la 2° e la 3° riga e, successivamente, la 2° e la 3° colonna. così Facendo, la matrice di stato diventa

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{13} & \hat{F}_{12} & \hat{F}_{14} \\ 0 & \hat{F}_{33} & 0 & \hat{F}_{34} \\ \hat{F}_{21} & \hat{F}_{23} & \hat{F}_{22} & \hat{F}_{24} \\ 0 & \hat{F}_{43} & 0 & \hat{F}_{44} \end{bmatrix}$$

Questa permutazione si è resa necessaria affinché, nella struttura della matrice di trasformazione T, le basi di X_1 e X_3 siano consecutive. Questo, a sua volta, è necessario in quanto, facendo riferimento alla scomposizione canonica di Kalman rispetto alla osservabilità, possiamo affermare che

$$\begin{bmatrix} \hat{F}_{21} & \hat{F}_{23} \\ 0 & \hat{F}_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di stato assume dunque la seguente espressione:

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{13} & \hat{F}_{12} & \hat{F}_{14} \\ 0 & \hat{F}_{33} & 0 & \hat{F}_{34} \\ 0 & 0 & \hat{F}_{22} & \hat{F}_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{F}_{44} \end{bmatrix}$$

Inoltre, sempre con riferimento alla scomposizione canonica di Kalman rispetto alla osservabilità, sappiamo che la matrice di uscita $\hat{H}$ deve essere nella forma $\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & * \end{bmatrix}$: ovviamente, prima di imporre questa condizione, dobbiamo effettuare anche qui lo scambio tra il 2° ed il 3° blocco, il che significa che la matrice è

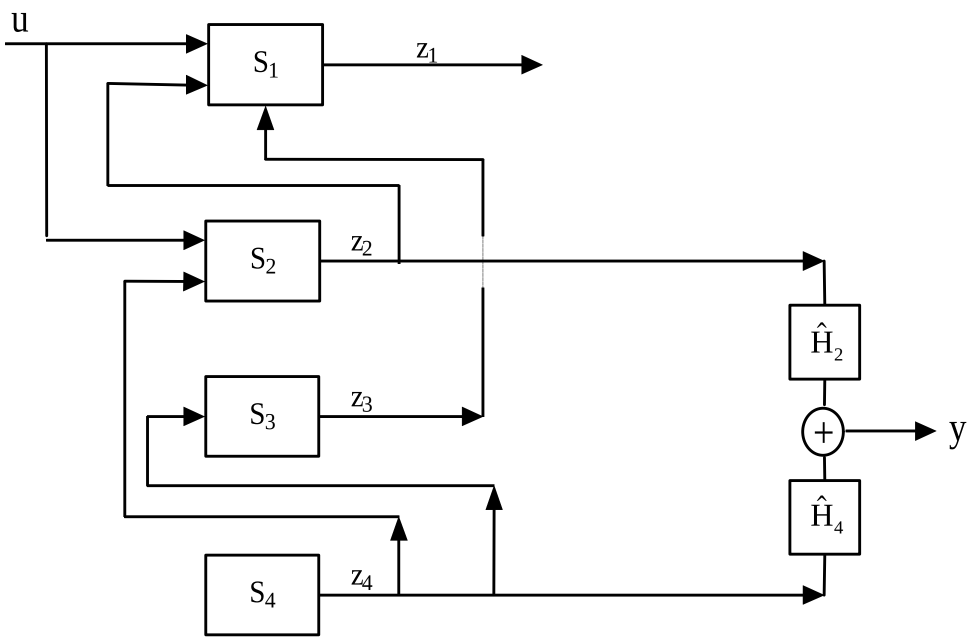
$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{H}_2 & 0 & \hat{H}_4 \end{bmatrix}$$

In conclusione, le equazioni che descrivono il sistema sono nella forma seguente:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{13} & \hat{F}_{12} & \hat{F}_{14} \\ 0 & \hat{F}_{33} & 0 & \hat{F}_{34} \\ 0 & 0 & \hat{F}_{22} & \hat{F}_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{F}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{G}_1 \\ \hat{G}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \hat{H}_2 & 0 & \hat{H}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

Al fine di comprendere il significato di queste equazioni, possiamo rappresentarle mediante il seguente diagramma a blocchi:



In questo diagramma si osservano varie cose:

- la prima è che i sottosistemi S_3 ed S_4 non sono in alcun modo influenzati dall'ingresso u al sistema: infatti, non hanno in ingresso alcuna variabile in qualche modo legata ad u; ciò significa che, fissato uno stato di partenza per tali sottosistemi, essi permangono in tale stato a prescindere dall'ingresso applicato al sistema; alla luce di quanto abbiamo visto a proposito della raggiungibilità, possiamo allora affermare che *il sottosistema costituito da S_3 ed S_4 è un sottosistema completamente non raggiungibile;* per il motivo esattamente opposto, invece, possiamo affermare che *il sottosistema costituito da S_1 ed S_2 è un sottosistema completamente raggiungibile;*

- in secondo luogo, si osserva che i sottosistemi S_1 ed S_3 non hanno alcun effetto sull'uscita y del sistema: infatti, tale uscita non dipende né direttamente da S_1 ed S_3 né indirettamente, nel senso che non è influenzata da variabili in qualche modo legate ad S_1 ed S_3; ciò significa che l'uscita non può dare alcuna informazione a proposito degli stati di S_1 ed S_3: alla luce di quanto abbiamo visto a proposito della osservabilità, possiamo allora affermare che *il sottosistema costituito da S_1 ed S_3 è un sottosistema completamente non osservabile;* per il motivo esattamente opposto, invece, possiamo affermare che *il sottosistema costituito da S_2 ed S_4 è un sottosistema completamente osservabile;*

- inoltre, se prendiamo i 4 sottosistemi separatamente, ci accorgiamo di quanto segue:

  * S_1 è un sottosistema completamente raggiungibile e completamente non osservabile;
  * S_2 è un sottosistema completamente raggiungibile e completamente osservabile;
  * S_3 è un sottosistema completamente non raggiungibile e completamente non osservabile;
  * S_4 è un sottosistema completamente non raggiungibile e completamente osservabile.

Autovalori della matrice di stato

Adesso, se torniamo alla equazione di stato e, in particolare, alla matrice di stato, ci accorgiamo che si tratta di una matrice triangolare alta a blocchi, il che significa che gli autovalori di questa matrice corrispondono agli autovalori dei blocchi diagonali; ma questi blocchi diagonali sono $\hat{F}_{11},\hat{F}_{22},\hat{F}_{33},\hat{F}_{44}$, ossia le matrici di stato dei singoli sottosistemi S_1,S_2,S_3,S_4. Per questo motivo, diamo le seguenti definizioni:

* gli autovalori della matrice $\hat{F}_{11}$ prendono il nome di "**autovalori raggiungibili e non osservabili**" dato che si riferiscono al sottosistema completamente raggiungibile e completamente non osservabile;
* gli autovalori della matrice $\hat{F}_{22}$ prendono il nome di "**autovalori raggiungibili e osservabili**" dato che si riferiscono al sottosistema completamente raggiungibile e completamente osservabile;
* gli autovalori della matrice $\hat{F}_{33}$ prendono il nome di "**autovalori non raggiungibili e non osservabili**" dato che si riferiscono al sottosistema completamente non raggiungibile e completamente non osservabile;
* gli autovalori della matrice $\hat{F}_{44}$ prendono il nome di "**autovalori non raggiungibili e osservabili**" dato che si riferiscono al sottosistema completamente non raggiungibile e completamente osservabile.

Legame ingresso-uscita

Un'altra osservazione importante sulla "*scomposizione canonica completa di Kalman*" riguarda il legame ingresso-uscita: così come abbiamo fatto a suo tempo per raggiungibilità e osservabilità, vogliamo cioè vedere se e in che modo i 4 sottosistemi influiscono sul legame ingresso-uscita.

Guardando semplicemente il diagramma di prima (o, ciò che è lo stesso, l'equazione di uscita), si osservano subito due cose:

- la prima, già anticipata prima, è che S_1 ed S_3 non influenzano in alcun modo l'uscita, per cui non influiscono nemmeno sul legame ingresso-uscita;
- d'altra parte, il sottosistema S_4 non è influenzato in alcun modo dall'ingresso, per cui, a maggior ragione, non potrà influire sul legame ingresso-uscita.

Deduciamo, quindi, che *l'unico sottosistema che influisce sul legame ingresso-uscita è il sottosistema S_2 completamente raggiungibile e completamente osservabile.*

E' possibile arrivare a questo risultato anche per via analitica: infatti, si può dimostrare che la funzione di trasferimento W(s) dell'interno sistema è

$$\boxed{W(s) = \hat{H}_2\left(sI - \hat{F}_{22}\right)^{-1}\hat{G}_2 = W_2(s)}$$

ossia coincide con quella del sottosistema S_2.

Sviluppando inoltre quella matrice inversa, abbiamo che

$$W(s) = \hat{H}_2 \frac{\text{adj}\left(sI - \hat{F}_{22}\right)}{\det\left(sI - \hat{F}_{22}\right)}\hat{G}_2$$

dal che si deduce che *la funzione di trasferimento del sistema può presentare, come poli, solo gli autovalori raggiungibili e osservabili.*

Esempio: sistema del 4° ordine

Supponiamo di avere un sistema descritto dalla seguente rappresentazione di stato:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 & -2 \\ 6 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -6 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Vogliamo porre il sistema nella rappresentazione canonica completa di Kalman.

Per fare questo, la prima cosa da fare è individuare le matrici di raggiungibilità **K** e di osservabilità $\mathbf{K_O}$:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & F^3G \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c|c|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{K_O}=\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ HF^3 \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c|c|c} -3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -7 & -6 & 0 & 1 \\ -9 & -10 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

La conoscenza di tali matrici ci consente l'individuazione del sottospazio di raggiungibilità X_r e del sottospazio di non osservabilità X_{nO}.

Per quanto riguarda il sottospazio di raggiungibilità, è $X_r = \mathrm{Range}(\mathbf{K})$; individuiamo per prima cosa la sua dimensione, che corrisponde al rango della matrice di raggiungibilità: questa matrice (quadrata di ordine 4) presenta una riga formata da tutti elementi nulli, per cui il rango sarà al più uguale a 3; controllando i minori, si osserva che $\rho(\mathbf{K})=2$, il che significa che $\dim X_r = \rho(\mathbf{K})=2$ (e quindi che $\dim X_{nr} = n-\rho(\mathbf{K})=2$): allora, come base di X_r ci servono due colonne linearmente indipendenti della matrice di raggiungibilità: le prime 2 sono linearmente indipendenti, per cui possiamo scrivere

$$X_r = sp\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per una questione di pura comodità, possiamo anche combinare quei due vettori in modo da averne altri due, sempre linearmente indipendenti, ma con espressioni più comode: ad esempio, se sommiamo quei due vettori prima così come sono e poi dopo aver moltiplicato il 2° per 2, otteniamo

$$X_r = sp\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Può anche essere conveniente avere una rappresentazione di X_r in termini di equazioni, ossia in termini di relazioni analitiche cui devono soddisfare le componenti del generico vettore $x \in X_r$. Tali equazioni si ottengono a partire dalla relazione $X_r = \mathrm{Range}(\mathbf{K})$: in base a questa relazione, i vettori $x \in X_r$ sono i vettori ortogonali ai vettori che soddisfano la condizione $\mathbf{K}x = 0$.

Da qui si ottiene che le equazioni ricercate sono

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \\ \forall x_3 \end{cases}$$

Discorso analogo dobbiamo fare per determinare il sottospazio di non osservabilità, che è $X_{nO} = \text{Nucleo}(\mathbf{K_O})$. Si osserva facilmente che anche la matrice di osservabilità ha rango 2, per cui il sottospazio di non osservabilità ha dimensione $\dim X_{nO} = n - \rho(\mathbf{K_O}) = 2$. Questo sottospazio, essendo $X_{nO} = \text{Nucleo}(\mathbf{K_O})$, è dato dall'insieme dei vettori $x \in X$ che soddisfano la condizione $\mathbf{K_O} x = 0$: scrivendo questa relazione in forma esplicita, dobbiamo dunque trovare i vettori $x \in X$ che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 0x_3 - x_4 = 0 \\ -7x_1 - 6x_2 + 0x_3 + x_4 = 0 \\ -9x_1 - 10x_2 + 0x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Essendo $\rho(\mathbf{K_O}) = 2$, solo due di queste equazioni sono indipendenti: ad esempio, possiamo prendere le prime 2, per cui il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 0x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Sommando e poi sottraendo le due equazioni, si trova subito che le infinite soluzioni di questo sistema sono nella forma

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ \forall x_3 \end{cases}$$

Queste equazioni rappresentano dunque X_{nO}: se poi vogliamo esprimere X_{nO} come spazio vettoriale generato da una base di 2 vettori, basta prendere 2 soluzioni indipendenti del sistema; per esempio, possiamo scrivere che

$$X_r = sp \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Adesso, il passo successivo è quello di determinare i 4 sottospazi X_1, X_2, X_3 ed X_4.

Cominciamo dal sottospazio di raggiungibilità e di non osservabilità, che è definito dalla relazione $X_1 = X_r \cap X_{nO}$: questa relazione dice in pratica che i vettori $x \in X_1$ sono tali da soddisfare sia le equazioni caratteristiche di Xr sia quelle di X_r; ciò significa che si tratta dei vettori che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} X_r \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \\ \forall x_3 \end{cases} \\ X_{nO} \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ \forall x_3 \end{cases} \end{cases}$$

Si deduce immediatamente che si tratta dei vettori nella forma $\begin{bmatrix}0 & 0 & a & 0\end{bmatrix}^T$: la struttura di questo vettore indica che la dimensione di X_1 è 1, per cui possiamo scrivere che

$$X_1 = sp\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Passiamo al sottospazio di raggiungibilità e di osservabilità X_2, definito dalla relazione $X_2 = X_1^{\perp} \cap X_r$: in questo caso, dobbiamo imporre, per i vettori $x \in X_2$, la condizione di ortogonalità ad X_1 e la condizione di appartenenza ad X_r. Avendo trovato che X_1 è uno spazio generato da $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$, la condizione di ortogonalità dice evidentemente che

$$\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = 0$$

ossia che x_3=0. La condizione di appartenenza ad X_r è invece

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \\ \forall x_3 \end{cases}$$

Mettendo insieme le due condizioni, deduciamo che i vettori $x \in X_2$ sono tali che

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

ossia sono nella forma $\begin{bmatrix}a & -a & 0 & 0\end{bmatrix}^T$. La struttura di questo vettore indica anche che $\dim X_2 = 1$, per cui possiamo scrivere, prendendo a=1, che

$$X_2 = sp\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda il sottospazio di non raggiungibilità e di non osservabilità, esso è definito dalla relazione $X_3 = X_1^{\perp} \cap X_{nO}$: la condizione di ortogonalità ad X_1 è stata analizzata poco fa e comporta che x_3=0; la condizione di appartenenza ad X_{nO} è invece

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ \forall x_3 \end{cases}$$

per cui deduciamo che le equazioni caratteristiche di X_3 sono

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Quindi, i vettori $x \in X_3$ sono nella forma $\begin{bmatrix} a & -a & 0 & a \end{bmatrix}^T$: risulta anche $\dim X_3 = 1$, per cui possiamo ad esempio scrivere, prendendo sempre a=1, che

$$X_3 = sp\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Per concludere, il sottospazio non raggiungibilità e di osservabilità è definito dalla relazione $X_4 = X_r^\perp \cap X_{nO}^\perp$, per cui dobbiamo imporre l'ortogonalità a X_r e a X_{nO}:

ortogonalità ad X_r: $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

ortogonalità ad X_{nO}: $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

Le equazioni caratteristiche di X_4 sono dunque

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

e sono soddisfatte da tutti i vettori nella forma $\begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$: la dimensione di X_4 è $\dim X - \dim X_1 - \dim X_2 - \dim X_3 = 1$, per cui possiamo concludere, prendendo sempre a=1, che

$$X_4 = sp\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto, note le basi dei 4 sottospazi, siamo subito in grado di scrivere la matrice di trasformazione T che porta il sistema nella scomposizione canonica completa di Kalman:

$$T=\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Basta adesso fare i calcoli per trovare la rappresentazione canonica voluta: si ha che

$$\hat{F}=T^{-1}FT=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{G}=T^{-1}G=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{H}=HT=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Dalla struttura della matrice di stato deduciamo immediatamente quali sono gli autovalori del sistema:

* λ=1 è l'autovalore raggiungibile e non osservabile;
* λ=-1 è l'autovalore raggiungibile e osservabile;
* λ=-3 è l'autovalore non raggiungibile e non osservabile;
* λ=2 è l'autovalore non raggiungibile e osservabile.

Per quanto riguarda, poi, la matrice di trasferimento (che poi si riduce ad una funzione, visto che il sistema ha 1 ingresso ed 1 uscita), si tratta di

$$W(s)=W_2(s)=\hat{H}_2\left(sI-\hat{F}_{22}\right)^{-1}\hat{G}_2=[-1](s-[-1])^{-1}[-1]=\frac{1}{s+1}$$

Come previsto, l'unico polo presentato da W(s) corrisponde all'unico autovalore raggiungibile e osservabile.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1