“Teoria dei sistemi” - Appendice 1

Trasformata di Laplace e Trasformata Z

Trasformata di Laplace

INTRODUZIONE AI SEGNALI (CAUSALI, REGOLARI, DI ORDINE ESPONENZIALE)

Consideriamo d'ora in poi, salvo diverso avviso, solo funzioni del tipo

$$f : \Re \longrightarrow C$$
$$t \longrightarrow f(t)$$

ossia funzioni di variabile reale a valori complessi. A queste funzioni si dà il nome di "**segnali**".

In particolare, si dice che un segnale f è "**causale**" se è nullo per qualsiasi t<0, ossia quindi se

$$\forall t < 0 \ : \ f(t) = 0$$

E' molto facile verificare che *somme e prodotti di segnali causali sono ancora dei segnali causali.*

Tra i segnali causali, si distinguono 2 categorie molto importanti (che sono quelle delle quali ci occuperemo per la maggior parte delle volte):

- *una segnale causale si dice "**regolare**" se, preso un qualsiasi intervallo limitato della retta reale, in esso il segnale presenta un numero finito di discontinuità di 1° specie,* ossia un numero finito di punti in ciascuno dei quali esistono finiti il limite sinistro e il limite destro di f ma sono diversi;
- *un segnale causale si dice invece "**di ordine esponenziale**" se esistono un valore M>0 e un valore reale α tali che, per t sufficientemente grande, sia verificata la relazione* $|f(t)| \le Me^{\alpha t}$

N.B. Quest'ultima condizione equivale a dire che esiste γ reale tale che

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{e^{gt}} = 0$$

Questo implica che tutte le funzioni LIMITATE soddisfano la condizione di prima per α=0.

Per i segnali causali di ordine esponenziale, si può definire un "**ordine**" specifico: si tratta dell'estremo inferiore dei valori reali α che soddisfano la condizione prima scritta per questo tipo di segnali. Si è soliti indicare tale ordine con il simbolo α_f.

N.B. Quando consideriamo una qualsiasi funzione reale f(x) e diciamo che si tratta di un segnale f(t), in definitiva intendiamo dire che consideriamo quella funzione che è nulla prima di 0 e che coincide con f(x) per x>0. Questo comporta una conseguenza importante: consideriamo ad esempio la funzione $\cos(t)$, che in t=0 vale 1; questa funzione, considerata nel campo reale, ossia per t che va da -∞ a +∞, è continua in t=0; al contrario, il corrispondente segnale, in $t=0^-$ vale 0 mentre in $t=0^+$ vale 1, per cui presenta in t=0 una discontinuità. Diverso è il caso, per esempio, del segnale $\sin(t)$, il quale, invece, vale comunque 0 in t=0 per cui è continuo in tale punto.

IL SEGNALE DI HEAVYSIDE

Un segnale di particolare utilità nella pratica è il cosiddetto "**segnale di Heavyside**", che si indica generalmente con H(t) ed è definito nel modo seguente:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

In primo luogo, si tratta di un segnale a parte immaginaria nulla; in secondo luogo, è evidentemente un segnale causale, in quanto assume valore nullo prima di 0; è anche un segnale regolare, in quanto presenta un numero finito (=0) di discontinuità di prima specie; infine è di ordine esponenziale in quanto è possibile trovare M>0 ed α reale tali che $|H(t)| \leq Me^{\alpha t}$: per esempio, basta prendere M=1 e α=0, il che ci dice, tra l'altro, che 0 è l'ordine del segnale.

DEFINIZIONE DI TRASFORMATA DI LAPLACE

Supponiamo di avere un segnale f(t) e supponiamo in particolare che sia regolare di ordine esponenziale. Per questo tipo di segnale ha senso parlare dell'operatore "**trasformata di Laplace**", che è definito nel modo seguente:

$$\boxed{L[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

<u>Si tratta dunque di un operatore che fa corrispondere al segnale f (ossia una funzione complessa di variabile REALE), una funzione complessa nella variabile complessa s</u>.

Non è detto che quell'integrale converga sempre, ossia non è detto che, dato il segnale f(t), se ne possa in ogni caso trovare la trasformata di Laplace. Sussiste infatti il seguente criterio di esistenza:

<u>Teorema</u> - *Indicato con a_f l'ordine del segnale f, la trasformata di Laplace di f esiste solo se Re(s) > a_f.*

Questo teorema dice in pratica che è possibile calcolare quell'integrale, che prende appunto il nome di "**integrale di Laplace**" del segnale considerato, solo assumendo per ipotesi che il numero complesso s abbia parte reale maggiore dell'ordine del segnale f in questione.

Proprietà generali della trasformata di Laplace

PROPRIETÀ DI LINEARITÀ

L'operatore trasformata di Laplace di un segnale (regolare di ordine esponenziale) è un operatore lineare, ossia verifica sempre le seguenti relazioni:

$$L[f(t)+g(t)](s) = L[f(t)](s) + L[g(t)](s)$$
$$L[af(t)](s) = aL[f(t)](s)$$

dove f e g sono segnali regolari di ordine esponenziale e a una qualsiasi costante reale o complessa.

PROPRIETÀ DI DERIVAZIONE NEL DOMINIO TRASFORMATO

Detta F(s) la trasformata di Laplace di un segnale f(t), possiamo applicare ad essa il *teorema di Cauchy-Riemann*: in base a questo teorema, posto $s=\mu+i\sigma$, si ha che

$$\frac{d}{ds}L[f(t)](s) = \frac{d}{dm}F(s) = \frac{d}{dm}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(m+is)t}dt = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-st}dt = -L[tf(t)](s) \quad \Rightarrow \quad L[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds}L[f(t)](s)$$

Questa proprietà dice dunque questo: se noi abbiamo il segnale f(t) e vogliamo la trasformata di Laplace del segnale tf(t), è sufficiente che calcoliamo la derivata di L[f(t)](s) e che la cambiamo di segno.

PROPRIETÀ DI SMORZAMENTO NEL TEMPO

Sia dato il segnale f(t); si definisce "**segnale smorzato di f nel punto a**" il segnale $g(t)=f(t)e^{at}$. Nell'ipotesi che f sia di ordine esponenziale, anche g(t) lo è, per cui è possibile calcolare anche per quest'ultimo la trasformata di Laplace: si ottiene allora che

$$L[f(t)e^{at}](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{(a-s)t}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(s-a)t}dt = L[f(t)](s-a)$$

Quindi, la trasformata di Laplace del segnale smorzato di f è pari alla trasformata di f calcolata però nel punto s-a anziché nel punto s. E' evidente che tale trasformata esiste solo per $Re(s-a)>\alpha_f$.

N.B. Il termine "smorzamento" è appropriato per a numero reale negativo, mentre, nella proprietà enunciata, a può essere una qualsiasi costante complessa.

PROPRIETÀ DI SPOSTAMENTO (SHIFT) NEL TEMPO

Dato sempre il segnale f(t), si definisce "**segnale shiftato di f nel punto a**" il segnale g(t)=H(t-a)f(t-a). Si tratta in pratica del segnale f(t) traslato verso destra di un tratto pari ad a. Nel caso che f(t) sia di ordine esponenziale, lo è anche g(t) e possiamo quindi calcolarne la trasformata di Laplace:

$$L[H(t-a)f(t-a)](s) = \int_0^{+\infty} H(t-a)f(t-a)e^{-st}dt = \int_a^{+\infty} f(t-a)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} f(T)e^{-(T+a)s}dT = e^{-as}L[f(t)](s)$$

dove abbiamo evidentemente posto T=t-a.

Questa proprietà mostra dunque come la trasformata di Laplace del segnale shiftato di f sia il prodotto del termine e^{-as} (che dipende proprio dallo shift considerato) per la trasformata della f.

PROPRIETÀ DI DERIVAZIONE (DEL 1° ORDINE) NEL TEMPO

Sia dato il segnale f(t). Diremo che esso è DERIVABILE con continuità a tratti se la sua derivata f'(t) esiste per t>0 tranne un numero finito o numerabile di punti e se è una funzione continua a tratti. Supponiamo che il segnale f goda di queste due proprietà e sia inoltre regolare di ordine esponenziale: sotto quest'ultima ipotesi si dimostra che f'(t) è a sua volta un segnale di ordine esponenziale e prende il nome di "**segnale derivato della f**". Vediamo allora quanto vale la sua trasformata di Laplace: si ha che

$$L[f'(t)](s) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)(-s)e^{-st}dt = -f(t=0) + sL[f(t)](s)$$

Quindi, la trasformata di Laplace del segnale derivato è pari alla somma di 2 termini: il primo è il prodotto di s per la trasformata di f; il secondo è il valore assunto da f nel punto t=0, cambiato però di segno.

Facciamo osservare una cosa molto importante: nel caso la funzione f non sia continua in tutto [0,+∞[, noi potremmo comunque calcolare la sua derivata ed affermare che essa vale nei punti in cui è ammessa la derivazione; tuttavia, in questo caso non potremo parlare di segnale derivato e non potremo applicare il risultato appena trovato.

Caso particolare: presenza di una discontinuità

Nelle stesse ipotesi della proprietà precedente, supponiamo che il punto t=α sia un punto di discontinuità per la funzione f(t). Detta allora f'(t) la derivata di f(t) (derivata che è valida solo nelle regioni in cui è possibile calcolarla), si dimostra che

$$L[f'(t)](s) = sL[f(t)](s) - \left(f(\alpha^+) - f(\alpha^-)\right)$$

E' evidente che i 2 termini tra parentesi tonda al secondo membro sono quelli che tengono conto della discontinuità della f nel punto z=α

PROPRIETÀ DI INTEGRAZIONE NEL TEMPO

Consideriamo un generico segnale f(t). Consideriamo inoltre la funzione

$$\int_0^t f(x)dx$$

che cioè associa al nostro segnale il suo integrale tra 0 e t. Questa funzione costituisce a sua volta un segnale, che per di più è di ordine esponenziale. Possiamo allora calcolarne la trasformata di Laplace. Per farlo consideriamo una funzione g(t) che goda di due proprietà: essa deve essere continua e tale che

$$g'(t) = f(t)$$

Calcolando la sua trasformata di Laplace, abbiamo che

$$L[g'(t)](s) = sL[g(t)](s) - g(t = 0^+) = sL[g(t)](s)$$

e quindi ricaviamo che

$$L[g(t)](s) = \frac{1}{s}L[g'(t)](s) = \frac{1}{s}L\left[\int_0^t f(x)dx\right](s) = \frac{1}{s}L[f(t)](s)$$

In altre parole, abbiamo concluso che la trasformata di Laplace dell'integrale di un segnale è pari al prodotto di 1/s per la trasformata del segnale stesso. Quindi, all'operazione di integrazione la trasformata di Laplace fa corrispondere la moltiplicazione per 1/s.

LEGAME TRA LE TRASFORMATE DI FOURIER E LAPLACE

Esiste un interessante legame tra la trasformata di Laplace di un certo segnale f(t) e l'integrale di Fourier di una funzione in qualche modo legata a quello stesso segnale. Infatti, si ha quanto segue:

$$L[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} H(t)f(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)e^{-st}dt$$

Posto adesso $s=\mu+i\omega$ (nell'ipotesi che $\mu>\alpha_f$), abbiamo che

$$L[f(t)](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)e^{-(\mu+i\omega)t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)e^{-\mu t}e^{-i\omega t}dt$$

Quindi, *la trasformata di Laplace del segnale f(t) è pari all'integrale di Fourier della funzione H(t)f(t)$e^{-\mu t}$.*

Proprietà di derivazione (di ordine n°) nel tempo

Abbiamo in precedenza visto a che cosa equivale l'operazione di derivata prima rispetto all'operatore trasformata di Laplace. Adesso vogliamo qui estendere il discorso alla derivata n°. Cominciamo dalla derivata seconda per poi arrivare al caso generale: si ha che

$$L[f''(t)](s) = sL[f'(t)](s) - f'(0^+) = s\{sL[f(t)] - f(0^+)\} - f'(0^+) = s^2L[f(t)](s) - \{f'(0^+) + sf(0^+)\}$$

Si deduce allora la seguente regola generale:

$$L\left[f^{(n)}(t)\right](s) = s^n L[f(t)](s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \ldots - sf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$$

N.B. Questa proprietà è di notevole utilità pratica quanto di studiano le equazioni differenziali: infatti, è evidente che applicando l'operatore trasformata di Laplace ad una equazione differenziale, di qualsiasi grado, nella incognita f(t), l'equazione viene trasformata in una equazione algebrica nella incognita F(s); una volta ricavata F(s), mediante una operazione di "antitrasformazione di Laplace" (che vedremo più avanti) sarà possibile trovare f(t).

Trasformate di Laplace di alcuni segnali notevoli

$$L[H(t)](s) = \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$L\left[H(t)t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$L\left[H(t)e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a} \qquad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$$

$$L\left[H(t)t^n e^{at}\right](s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$L[H(t)\sin t](s) = \frac{1}{s^2+1} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$L[H(t)\sin at](s) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$L[H(t)\cos t](s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$L[H(t)\cos at](s) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$L\left[H(t)t^n \sin t\right](s) = \frac{n!\left[(s+i)^{n+1} - (s-i)^{n+1}\right]}{2i(s-i)^{n+1}(s+i)^{n+1}}$$

TEOREMA DEL VALORE INIZIALE

Supponiamo di avere un segnale f regolare di ordine esponenziale. Supponiamo che si tratti anche di un segnale continuo, per cui ha senso parlare del segnale derivato f'(t). Supponiamo che tale segnale sia anch'esso di ordine esponenziale, per cui ne possiamo valutare la trasformata di Laplace. Il teorema del valore iniziale dice allora quanto segue:

$$\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} sL\left[f(t)\right](s) = f(0^+)$$

TEOREMA DEL VALORE FINALE

Sia dato sempre il segnale f regolare di ordine esponenziale. Supponiamo che f(t) sia un segnale continuo con derivata prima continua a tratti (o generalmente continua). Supponiamo infine che esistano e siano finiti i seguenti 2 limiti:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) \qquad \text{e} \qquad \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Il "teorema del valore finale" afferma che tali limiti coincidono:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

N.B. Il termine "valore finale" indica il valore di f all'∞. Questo teorema fornisce un criterio per il calcolo di questo valore finale, ma solo sotto quelle opportune ipotesi, le quali garantiscono l'esistenza di questo valore.

TRONCAMENTO DI UN SEGNALE

Sappiamo che il segnale di Heavyside H(t) è definito nel modo seguente:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Prendiamo allora un qualsiasi punto α reale positivo e diverso da 0 e consideriamo quindi il segnale definito nel modo seguente:

$$g(t) = H(t) - H(t-a)$$

Questo non è altro che il segnale di Heavyside **troncato** nel punto α, cioè il segnale che coincide con quello di Heavyside fino al punto α e poi risulta nullo:

$$g(t) = \begin{cases} H(t) & t \leq a \\ 0 & t > a \end{cases}$$

E’ molto facile trovare la trasformata di Laplace di questo segnale: si ha infatti, in base alle note proprietà, che

$$L[H(t) - H(t-a)](s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{as}}{s} = \frac{1-e^{-as}}{s}$$

Questo concetto di **segnale troncato** ci permette di fare il seguente discorso: supponiamo di avere un generico segnale f(t) e supponiamo di essere interessati solo al tratto di segnale compreso nell’intervallo [α,β], con α e β numeri reali positivi non nulli. Per rappresentare analiticamente questo “tratto” di segnale noi lo scriviamo come

$$f(t)[H(t-\alpha) - H(t-\beta)]$$

Anche qui risulta facile il calcolo della trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned}
&L[f(t)\{H(t-\alpha)-H(t-\beta)\}](s) = L[H(t-\alpha)f(t)](s) - L[H(t-\beta)f(t)](s) = \\
&= L[H(t-\alpha)f(t-\alpha)](s) - L[H(t-\beta)f(t-\beta)](s) = e^{-\alpha s}L[f(t)](s) - e^{-\beta s}L[f(t)](s) = \\
&= \left(e^{\alpha s} - e^{\beta s}\right)L[f(t)](s)
\end{aligned}$$

TRASFORMATA DI LAPLACE DI SEGNALI PERIODICI

Un segnale f(t) si dice che è “**periodico di periodo T**” se e soltanto se gode della proprietà per cui

$$f(t+T) = f(t) \quad \forall t \geq 0$$

che poi equivale anche a $f(t-T) = f(t) \quad \forall t \geq T$.

Quando si vuole calcolare la trasformata di Laplace di un segnale periodico è ovvio che sorgono dei problemi con gli strumenti fino ad ora esposti, per il semplice fatto che non è possibile trovare una comoda rappresentazione analitica del segnale. E’ perciò utile introdurre il concetto di “**segnale troncato**” di un segnale periodico. Se T è il periodo del nostro segnale f(t), noi diremo che il segnale troncato di f in T è quel segnale $f_T(t)$ che è identico a f(t) nell’intervallo [0,T] e che è nullo altrove: possiamo scrivere perciò che

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & t \in [0,T] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Proviamo a calcolare la trasformata di Laplace di tale segnale: è ovvio che questa rappresentazione non ci è affatto di aiuto; tuttavia, sfruttando quanto detto nel paragrafo precedente, possiamo scrivere che

$$f_T(t) = f(t)[H(t) - H(t-T)]$$

e quindi abbiamo che

$$\begin{aligned}
&L[f(t)\{H(t)-H(t-T)\}](s) = L[H(t)f(t)](s) - L[H(t-T)f(t)](s) = L[f(t)](s) - e^{-Ts}L[f(t)](s) = \\
&= \left(1-e^{-Ts}\right)L[f(t)](s)
\end{aligned}$$

da cui concludiamo che

$$L[f(t)](s) = \frac{L[f_T(t)](s)}{1-e^{-Ts}}$$

In tal modo, la ricerca della trasformata di Laplace di un segnale periodico si riconduce alla ricerca di quella del suo segnale troncato.

Osservazione

Soffermiamoci sull'ultima relazione ottenuta: indicate con F(s) e $F_T(s)$ le trasformate di Laplace rispettivamente della f e della f_T, possiamo scriverla nella forma

$$F(s) = \frac{F_T(s)}{1-e^{-Ts}}$$

La funzione F(s), in quanto trasformata di Laplace, è una funzione olomorfa nella regione in cui esiste l'integrale di Laplace della f(t). Le eventuali singolarità di questa funzione sono le stesse della funzione a secondo membro e andiamo perciò a ricercarle.

Le singolarità della funzione $\frac{F_T(s)}{1-e^{-Ts}}$ sono da ricercarsi tra 2 categorie di punti:

- le singolarità della funzione al numeratore, ossia $F_T(s)$;
- gli zeri del denominatore.

Per quanto riguarda la $F_T(s)$, essa è definita e olomorfa nella regione in cui esiste l'integrale di Laplace della funzione $f_T(t)$: tale integrale esiste per ogni s complesso tale che $Re(s)>\alpha_{fT}$. Ci serve dunque l'ordine della f_T: è evidente che l'ordine è pari a $-\infty$, per cui $F_T(s)$ è olomorfa in tutto C.

Quindi, le eventuali singolarità della F(s) corrispondono alle radici della equazione

$$1-e^{-Ts}=0$$

Questi zeri sono i punti $s\in C$ tali che

$$-sT = \text{Log}(1) = \log|1| + i(\arg(1)+2k\pi)$$

Ricordando che log|1|=0 e che anche arg(1)=0, quest'ultima relazione diventa

$$-sT = i2k\pi$$

per cui le singolarità della F(s) sono semplicemente i punti

$$s = i\frac{2k\pi}{T} \qquad k\in Z$$

Trattandosi di zeri del primo ordine per il denominatore e di punti regolari per il numeratore, queste singolarità sono poli del 1° ordine per la funzione F(s). Si nota anche che si trovano tutti sull'asse immaginario, ossia mancano della parte reale. La conclusione è dunque che *la trasformata di Laplace di un segnale periodico è una funzione olomorfa in tutto C privato di un numero infinito di punti che sono poli del 1° ordine e si trovano tutti sull'asse immaginario.*

Il risultato inverso non è sempre vero, ma lo è spesso: in altre parole, se noi troviamo una funzione olomorfa le cui singolarità si trovano tutte sull'asse immaginario, è molto probabile che si tratti della trasformata di Laplace di un segnale periodico.

IL SEGNALE "RAMPA"

Si definisce "**rampa**" il seguente segnale:

$$r(t) = tH(t)$$

Messo sotto questa forma, questo segnale ha rappresentazione grafica coincidente con quella della bisettrice del 1° e 3° quadrante, ossia la retta passante per l'origine e di coefficiente angolare 1.

L'utilità di questo segnale sta nel fatto che consente di rappresentare analiticamente, in modo efficace ai fini del calcolo della trasformata di Laplace, segnali comunque complessi. Ad esempio, supponiamo di voler calcolare la trasformata di Laplace del seguente segnale:

$$f(t) = \begin{cases} t & t \in [0,1[\\ 2-t & t \in [1,2[\\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

Dobbiamo trovare una comoda rappresentazione analitica per questo segnale: il tratto compreso nell'intervallo $[0,1[$ coincide proprio con la funzione rampa; si tratta cioè del segmento di coefficiente angolare 1 che congiunge i punti (0,0) e (1,1); il secondo tratto è invece il segmento che congiunge (1,1) con (2,0), per cui è un segmento che, rispetto al precedente, parte da (1,1) ed ha coefficiente angolare -1; l'ultimo tratto è una semiretta che coincide con l'asse delle ascisse. La rappresentazione analitica del segnale sarà allora

$$f(t) = r(t) - 2r(t-1) + r(t-2)$$

Di questo segnale è immediato trovare la trasformata di Laplace:

$$L[f(t)](s) = \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

Facciamo comunque notare che allo stesso risultato è possibile arrivare sfruttando il segnale derivato, che esiste in questo caso in quanto la funzione f è continua a tratti. Tale segnale è precisamente

$$f'(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1[\\ -1 & t \in [1,2[\\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

e la sua rappresentazione analitica è

$$f'(t) = H(t) - 2H(t-1) + H(t-2)$$

La sua trasformata di Laplace è

$$L[f'(t)](s) = \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}$$

e quindi quella di f(t) sarà

$$L[f(t)](s) = \frac{1}{s}L[f(t)](s) + (\text{discontinuità}) = \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} + (\text{discontinuità})$$

ANTITRASFORMAZIONE DI LAPLACE

Una delle proprietà fondamentali della trasformata di Laplace è quella per cui *condizione necessaria affinché una funzione F(s) possa essere la trasformata di Laplace di un segnale f(t) è che essa sia infinitesima all'infinito, ossia che* $\lim_{Re(s)\to\infty} F(s) = 0$.

Supponiamo allora che la nostra F(s) sia una funzione razionale del tipo

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

dove P e Q sono due polinomi a coefficienti complessi di grado rispettivamente p e q e dove $s \in C$. In questo caso, il limite per $Re(s)\to\infty$ della F(s) esiste e si ha quanto segue:

$$\lim_{Re(s)\to+\infty} \frac{P(s)}{Q(s)} = \begin{cases} \infty & \text{se } p > q \\ a_p / b_q & \text{se } p = q \\ 0 & \text{se } p < q \end{cases}$$

dove è ovvio che a_p è il coefficiente di massimo grado di P(s) e b_q quello di massimo grado di Q(s).

E' possibile dimostrare, sotto certe ipotesi che adesso elenchiamo, che la condizione necessaria citata prima sia anche sufficiente: se la F(s) è del tipo prima visto, ossia data dal rapporto P(s)/Q(s), se p<q e se i due polinomi hanno zeri diversi, allora F(s) sarà certamente la trasformata di Laplace di un qualche segnale.

E' ovvio che la funzione F(s), in quanto rapporto di polinomi di grado diverso e con zeri distinti, è olomorfa in tutto C privato degli zeri di Q(s), che sono dei poli per la funzione stessa: siano $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ tali poli con molteplicità rispettivamente $r_1,r_2,\ldots,r_k$. Possiamo allora sviluppare la funzione P(s)/Q(s) mediante la formule dei fratti semplici : otteniamo che

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1^{(1)}}{(s-\alpha_1)} + \frac{A_2^{(1)}}{(s-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_{r_1}^{(1)}}{(s-\alpha_1)^{r_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(s-\alpha_2)} + \ldots + \frac{A_{r_2}^{(2)}}{(s-\alpha_2)^{r_2}} + \ldots + \frac{A_1^{(k)}}{(s-\alpha_k)} + \ldots + \frac{A_{r_k}^{(k)}}{(s-\alpha_k)^{r_k}}$$

A questo punto, una volta calcolati i vari coefficienti A, per antitrasformare la F(s), ci basta antitrasformare le frazioni che compaiono a secondo membro: ricordandoci allora che

$$\begin{cases} L\left[t^n\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \\ L\left[t^n e^{\alpha t}\right](s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}} \end{cases}$$

deduciamo facilmente che

$$f(t) = L^{-1}\left[F(s)\right](t) = A_1^{(1)} e^{\alpha_1 t} + A_2^{(1)} \frac{t}{1!} e^{\alpha_1 t} + A_3^{(1)} \frac{t^2}{2!} e^{\alpha_1 t} + \ldots + A_{r_1}^{(1)} \frac{t^{r_1 - 1}}{(r_1 - 1)!} e^{\alpha_1 t} + \ldots.$$

Applicazione alle equazioni differenziali

L'applicazione più importante di questo concetto è quella sulle **equazioni differenziali**: sappiamo infatti che una equazione differenziale, con relativi valori iniziali (quindi un problema di Cauchy), può essere vista come rappresentazione analitica di un sistema che subisce un ingresso x(t) (cioè il termine noto) e reagisce con una uscita (la funzione incognita y(t)). Applicando l'operatore trasformata di Laplace all'equazione differenziale si passa ad una nuova equazione dove l'unica incognita è la funzione Y(s) (trasformata di y(t)). Questa equazione, nel caso più generale possibile, è espressa nella seguente forma:

$$Y(s) = H(s)\Gamma(s) + H(s)X(s)$$

La funzione $\Gamma(s)$ è una funzione che dipende esclusivamente dalle condizioni iniziali, cioè dai valori che la funzione incognita y(t), ed eventualmente le sue derivate (a seconda del grado della equazione), assume nel punto 0. Nel caso che le condizioni iniziali siano nulle, questa funzione vale zero, per cui la Y(s) è data solo dal prodotto tra H(s), detta "**funzione di trasferimento**" del sistema, e X(s), ossia la trasformata del segnale x(t) in ingresso.

Per ottenere l'espressione di y(t), basta dunque antitrasformare la funzione Y(s), ossia antitrasformare il secondo membro di quella relazione. Dato che lo scopo di questa antitrasformazione è ricavare la risposta del sistema alla sollecitazione x(t), spesso non serve conoscere l'espressione "esatta" di y(t), bensì solo quella per $t \rightarrow +\infty$, ossia ciò che accade "a regime". In quest'ottica, non influiscono più di tanto sulla risposta y(t) le condizioni iniziali del sistema, per cui noi possiamo limitarci ad antitrasformare la funzione $H(s)X(s)$. Questa funzione è sempre una funzione razionale, data cioè dal rapporto tra due polinomi. Possiamo allora provare ad applicare quanto visto prima circa l'antitrasformazione delle funzioni razionali. Tutto viene a dipendere dalla funzione di trasferimento e dai suoi poli: *si dice che il sistema è "**asintoticamente stabile**" se i poli di H(s) hanno parte reale negativa (per cui danno contributo infinitesimo per t®+¥); si dice che è "**stabile**" se essi hanno parte reale nulla e si dice che è "**instabile**" se hanno parte reale positiva.*

Supponiamo allora che H(s) presenti 2 poli, α e β, il primo di ordine 1 ed il secondo di ordine 2: in questa ipotesi possiamo scrivere che

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{A}{s-\alpha} + \frac{B}{s-\beta} + \frac{C}{(s-\beta)^2} + G(s)$$

Supponiamo anche che questi 2 poli abbiamo entrambi parte reale negativa, per cui il sistema è asintoticamente stabile. In queste ipotesi, la funzione G(s), che non è nota e non dipende in alcun modo dai poli, prende il nome di "**risposta forzata**" del sistema è costituisce in definitiva la risposta del sistema a regime; gli altri tre termini, legati invece ai poli, danno contributo infinitesimo alla risposta e costituiscono perciò la cosiddetta "**risposta naturale**" del sistema , ossia una reazione immediata del sistema alla sollecitazione, che però a regime è ampiamente trascurabile.

In definitiva, nell'ipotesi di sistema asintoticamente stabile, ai fini della valutazione della risposta del sistema, noi possiamo in primo luogo trascurare il contributo delle eventuali condizioni iniziali non nulle; in secondo luogo, possiamo limitarci a valutare la risposta forzata del sistema, che otteniamo antitrasformando la funzione

$$G(s) = H(s)X(s) - \frac{A}{s-\alpha} - \frac{B}{s-\beta} - \frac{C}{(s-\beta)^2}$$

Trasformata Z

DEFINIZIONE DI SEQUENZA

Nei paragrafi precedenti abbiamo considerato funzioni del tipo

$$\begin{aligned} f : \Re &\longrightarrow C \\ t &\longrightarrow f(t) \end{aligned}$$

ossia <u>funzioni di variabile reale a valori complessi</u>. A queste funzioni abbiamo dato il nome di "**segnali**": la caratteristica principale è il fatto di essere funzioni continue della grandezza t (che per noi è sempre il "tempo"). Da questo punto in poi, invece, consideriamo funzioni del tipo

$$\begin{aligned} f : N &\longrightarrow C \\ t &\longrightarrow f(t) \end{aligned}$$

ossia <u>funzioni, ancora valori complessi, ma tempo-discrete</u>. A questo nuovo tipo di funzioni si dà il nome di "**sequenze**": si tratta di successioni ordinate di valori.

Anche per le sequenze è possibile dare la definizione di "**causalità**": *una sequenza si definisce "causale" se è identicamente nulla per t<0.*

DEFINIZIONE DI "TRASFORMATA Z"

Sia data una generica sequenza causale f; si definisce "**trasformata Z**" di tale sequenza la funzione

$$\boxed{F(z)=\sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t}}$$

dove $z\in C$. Si tratta, dunque, di una funzione che associa alla sequenza f(t) una funzione complessa.

La validità di questa definizione vale solo per quei valori di $z\in C$ tali che quella sommatoria risulti convergente: in particolare, si può verificare che *la convergenza di quella sommatoria (e quindi l'esistenza della trasformata) è garantita al di fuori di una circonferenza avente centro nell'origine del piano complesso e raggio R da determinare, di volta in volta, sulla base delle caratteristiche della sequenza f(t).*

Per questo motivo, la suddetta circonferenza prende il nome di "**regione di convergenza**" della trasformata Z, mentre R è il "**raggio di convergenza**".

Sottolineiamo subito che, nei casi in cui faremo uso della trasformata Z, ci disinteresseremo sempre del problema della convergenza, ossia, in definitiva, sul problema della determinazione del valore di R.

TRASFORMATA DELL'IMPULSO DI KRONEKER

Così come, nel campo delle funzioni tempo-continue, sussiste la definizione di "*impulso di Dirac*", nel campo delle sequenze (cioè delle funzioni tempo-discrete) sussiste la definizione di "**impulso di Kroneker**", che è una sequenza così fatta:

$$\delta(t)=\begin{cases}1 & t=0\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Proviamo a calcolare la trasformata Z di questa funzione, applicando semplicemente la definizione:

$$F(z)=\sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t}=\sum_{t=0}^{\infty}\delta(t)z^{-t}=\delta(t)z^{-t}\Big|_{t=0}=\delta(0)=1$$

TRASFORMATA DEL GRADINO UNITARIO

Nel campo delle sequenze, prende il nome di "**gradino unitario**" la seguente funzione:

$$1(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Calcoliamo la trasformata Z di questa funzione applicando ancora una volta la definizione:

$$F(z)=\sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t}=\sum_{t=0}^{\infty}1(t)z^{-t}=\sum_{t=0}^{\infty}z^{-t}=\sum_{t=0}^{\infty}\left(z^{-1}\right)^{t}=\frac{z}{z-1}$$

TRASFORMATA DELLA FUNZIONE POTENZA

Sempre con riferimento alle sequenze, la "**funzione potenza**" è definita nel modo seguente:

$$1(t) = \begin{cases} a^t & t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La sua trasformata Z, calcolata sempre mediante la semplice definizione, vale

$$F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} a^t z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(a z^{-1}\right)^t = \frac{z}{z-a}$$

Facendo un confronto tra questa trasformata e quella del gradino unitario, si osserva immediatamente il seguente legame:

$$Z\left\{a^t\right\} = Z\left\{1(t)\right\}_{z=\frac{z}{a}}$$

ANTITRASFORMATA Z

Supponiamo di avere una funzione F(z) che sia "razionale propria": ciò significa che questa funzione può essere espressa nella forma

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

dove N(z) e D(z) sono due polinomi tali che $\text{grado}\left(N(z)\right) \le \text{grado}\left(D(z)\right)$.

Sappiamo che esiste una corrispondenza biunivoca tra F(z) e la sequenza f(t) di cui è la trasformata Z: vogliamo allora far vedere i principali metodi per trovare f(t) nota che sia F(z).

ESEMPIO 1

Consideriamo la funzione

$$F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{(z-2)^2 (z+3)}$$

Si tratta di una funzione razionale propria, tale cioè che il grado del numeratore sia pari a quello del denominatore. *Il modo più semplice per trovarne l'antitrasformata è quello di esprimere F(z) mediante la sua espansione in fratti semplici e, successivamente, di trovare l'antitrasformata di ciascun termine.*

In questo caso, l'espansione in fratti semplici porta all'espressione

$$F(z) = \frac{Az}{(z-2)} + B\frac{z^2}{(z-2)^2} + \frac{Cz}{(z+3)} + D$$

Tutti e 4 i termini che compongono questa espansione sono trasformate notevoli, per cui possiamo scrivere subito che

$$f(t) = Z^{-1}\{F(z)\} = AZ^{-1}\left\{\frac{z}{(z-2)}\right\} + BZ^{-1}\left\{\frac{z^2}{(z-2)^2}\right\} + CZ^{-1}\left\{\frac{z}{(z+3)}\right\} + DZ^{-1}\{1\} =$$
$$= A2^t + B(t+1)2^t + C(-3)^t + D\delta(t)$$

Anche nel caso tempo-discreto, quindi, come in quello tempo-continuo, il problema fondamentale sta nel calcolo dei coefficienti presenti nell'espansione. I metodi "classici" di calcolo di tali coefficienti sono chiaramente gli stessi visti a proposito dell'antitrasformata di Laplace. Procediamo allora ad illustrare un nuovo metodo di calcolo di tali coefficienti.

La prima cosa che osserviamo è che, essendo il grado del numeratore pari al grado del denominatore, possiamo effettuare la divisione tra numeratore e denominatore: così facendo, si ottiene

$$F(z) = 1 + \underbrace{\frac{3z^2 + 9z - 11}{(z-2)^2(z+3)}}_{G(z)}$$

Lo scopo di questa divisione è quello di ricondursi ad una funzione razionale strettamente propria, ossia tale che il grado del numeratore sia inferiore a quello del denominatore. Considerando che l'antitrasformata della funzione identicamente pari ad 1 è nota (si tratta dell'impulso), dobbiamo dunque concentrarci su come antitrasformare la funzione $G(z)$.

Facendo ancora una volta l'espansione in fratti semplici, otteniamo

$$G(z) = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{(z-2)^2} + \frac{C}{z+3}$$

I coefficienti di questo sviluppo sono molto facili da calcolare: per esempio, possiamo subito osserva che

$$B = G(z)(z-2)^2\Big|_{z=2} = \frac{19}{3}$$
$$C = G(z)(z+3)\Big|_{z=-3} = -\frac{11}{25}$$

Inoltre, se calcoliamo G(0) sia mediante la sua espressione iniziale sia mediante l'espansione in fratti semplici, otteniamo

$$G(0) = \frac{3z^2 + 9z - 11}{(z-2)^2(z+3)}\Bigg|_{z=0} = -\frac{11}{12}$$
$$G(0) = \frac{A}{-2} + \frac{B}{4} + \frac{C}{3}$$

e da qui si ricava evidentemente che

$$A = -2 \cdot \left(-\frac{11}{12} - \frac{B}{4} - \frac{C}{3}\right) = \frac{86}{25}$$

Noti i coefficienti, il procedimento è sempre quello di antitrasformare i singoli termini dell'espansione in fratti semplici: abbiamo in tal modo che

$$g(t) = Z^{-1}\{G(z)\} = AZ^{-1}\left\{\frac{1}{z-2}\right\} + BZ^{-1}\left\{\frac{1}{(z-2)^2}\right\} + CZ^{-1}\left\{\frac{1}{z+3}\right\} =$$
$$= A\left\{1(t)2^t\right\}_{t-1} + B\left\{1(t)(t+1)2^t\right\}_{t-2} + C\left\{1(t)3^t\right\}_{t-1} = A1(t-1)2^{t-1} + B1(t-2)(t-1)2^{t-2} + C1(t-1)3^{t-1}$$

Nota g(t), possiamo concludere che

$$f(t) = Z^{-1}\{F(z)\} = Z^{-1}\{1 + G(z)\} = Z^{-1}\{1\} + Z^{-1}\{G(z)\} =$$
$$= \delta(t) + A1(t-1)2^{t-1} + B1(t-2)(t-1)2^{t-2} + C1(t-1)3^{t-1}$$

ESEMPIO 2

Consideriamo la funzione

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)}$$

Si tratta di una funzione razionale strettamente propria, caratterizzata dal fatto di avere un polo doppio nell'origine (nel senso che l'origine è una radice doppia del denominatore). Vogliamo calcolare la sua antitrasformata Z e possiamo procedere così come abbiamo fatto nell'esempio precedente: in primo luogo, l'espansione in fratti semplici di quella funzione è

$$F(z) = A + \frac{Bz}{(z-1)} + \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z}$$

I coefficienti di questa espansione si calcolano con i metodi tradizionali:

$$C = F(z)z^2\Big|_{z=0} = -1$$
$$B = F(z)(z-1)\Big|_{z=1} = 2$$
$$\begin{cases} 0 = F(-1) = A + \dfrac{B}{2} + C - D \\ \dfrac{3}{4} = F(2) = A + 2B + \dfrac{C}{4} + \dfrac{D}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{risolvendo}} \begin{cases} A = .. \\ B = .. \end{cases}$$

Noti questi coefficienti, possiamo antitrasformare i 4 termini dell'espansione:

$$f(t) = Z^{-1}\{F(z)\} = AZ^{-1}\{1\} + BZ^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\} + CZ^{-1}\left\{\frac{1}{z^2}\right\} + CZ^{-1}\left\{\frac{1}{z}\right\} =$$
$$= A\delta(t) + B1^t + C\delta(t-2) + D\delta(t-1) = A\delta(t) + B + C\delta(t-2) + D\delta(t-1)$$

Questo è dunque il modo "tradizionale" di procedere. Potevamo, però, seguire anche altre strade.

Per esempio, un altro modo di procedere è il seguente: la funzione F(z) può anche essere espressa nella forma

$$F(z) = z^{-2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

Dato che il termine z^{-2} non è altro che l'operatore di shift, possiamo procedere antitrasformando il termine $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ e considerando poi lo shift.

Un'altra possibilità è la seguente: sempre partendo dall'espressione iniziale di F(z), possiamo scrivere che

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)} = z^{-2}\frac{z+1}{(z-1)} = z^{-2}\left(\frac{z}{z-1} + \frac{1}{z-1}\right) = z^{-2}\frac{z}{z-1} + z^{-2}\frac{1}{z-1} =$$
$$= z^{-2}\frac{z}{z-1} + z^{-3}\frac{z}{z-1}$$

Così facendo, abbiamo ottenuto la F(z) come somma di due trasformate notevoli (si tratta, anzi, della stessa trasformata), entrambe shiftate di una certa quantità: considerando che la funzione $z/z-1$ è la trasformata della funzione $1^t = 1$, possiamo concludere che

$$f(t) = 1(t-2) + 1(t-3)$$

ESEMPIO 3

Come ultimo esempio, consideriamo la funzione

$$F(z) = \frac{z^2+z+1}{z(z+1)}$$

Questa è una funzione razionale propria avente un polo nell'origine e uno nel punto -1. Non possiamo procedere come nell'esempio precedente, in quanto, se ponessimo in evidenza il termine z^{-1}, avremmo a che fare con una funzione impropria. Scegliamo allora la "solita" strada dell'espansione in fratti semplici, che in questo caso conduce all'espressione

$$F(z) = A + \frac{B}{z} + \frac{Cz}{z+1}$$

Il calcolo dei coefficienti è ancora una volta immediato:

$$B = F(z)z\big|_{z=0} = 1$$
$$C = F(z)(z+1)\big|_{z=-1} = 1$$
$$\frac{3}{2} = F(1) = A + B + \frac{C}{2} \longrightarrow A = \frac{3}{2} - B - \frac{C}{2} = 0$$

L'espansione ha dunque la forma

$$F(z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{z+1}$$

e la sua antitrasformata vale evidentemente

$$f(t) = \delta(t-1) + (-1)^t$$

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1