

Appunti di Controlli Automatici 1

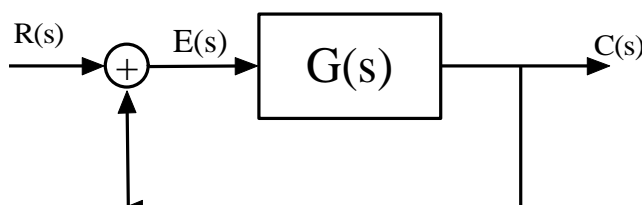
Errori a regime nei sistemi in retroazione

<i>Errori a regime per controlli in retroazione unitaria</i>	1
Errore a regime nella risposta al gradino (errore di posizione)	2
Errore a regime nella risposta alla rampa (errore di velocità).....	3
Errore a regime nella risposta alla parabola (errore di accelerazione)	5
Conclusioni.....	6
<i>Errori a regime per controlli in retroazione non unitaria</i>	8

Errori a regime per controlli in retroazione unitaria

Nello studio dei **sistemi di controllo in retroazione**, una specifica molto importante è il cosiddetto **errore a regime** nella risposta del sistema stesso ai **segnali canonici** (gradino, rampa, impulso, parabola). Consideriamo, per esempio, un servomeccanismo di posizione, cui poniamo in ingresso un segnale a gradino o a rampa: è necessario che, a regime, l'albero di uscita assuma una posizione θ corrispondente all'andamento del segnale in ingresso, entro limiti di errore prefissati.

Per calcolare gli errori a regime nella risposta ai più importanti segnali canonici (gradino, rampa e parabola), facciamo inizialmente riferimento al **sistema con retroazione unitaria** indicato nella figura seguente:



In questo schema, la variabile immediatamente a valle della giunzione sommatrice rappresenta effettivamente l'**errore $e(t)=r(t)-c(t)$** , inteso come scostamento della variabile controllata $c(t)$ rispetto al riferimento imposto $r(t)$. Questo significa che, per il momento, stiamo supponendo che il comportamento voluto consista nella ripetizione esatta del segnale di riferimento $r(t)$. Vedremo poi

in seguito cosa succede nel caso più generale in cui la funzione di trasferimento del ramo di retroazione non è una costante di valore unitario.

L'andamento del tempo della variabile errore $e(t)$, in funzione dell'ingresso $r(t)$, si ottiene evidentemente antitrasformando l'espressione

$$E(s) = R(s) - C(s) = R(s) - \frac{G(s)}{1+G(s)} R(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s)$$

Di tale andamento interessa principalmente la parte finale, cioè il cosiddetto **andamento asintotico**, definibile come $e_r = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$: applicando allora il noto teorema del valore finale, ci ricordiamo che

$$e_r = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

per cui siamo interessati a calcolare la quantità $sE(s)$, onde poi calcolarne il limite per $s \rightarrow 0$.

Errore a regime nella risposta al gradino (errore di posizione)

Supponiamo di applicare in ingresso al sistema un gradino di altezza R_0 , la cui trasformata sarà dunque $R(s) = R_0 / s$. Possiamo scrivere in questo caso che

$$E(s) = \frac{R_0 / s}{1 + G(s)} \longrightarrow e_r = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_0}{1 + G(s)} = \frac{R_0}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)}$$

La quantità $\lim_{s \rightarrow 0} G(s)$ prende il nome di **costante di posizione** e si indica generalmente con K_p : con questa posizione, possiamo concludere che

$$e_r = \frac{R_0}{1 + K_p}$$

E' dunque chiaro che il valore di e_r viene a dipendere da $\lim_{s \rightarrow 0} G(s)$, ossia dalla funzione di trasferimento del sistema in anello aperto. In particolare, il valore di quel limite dipende dal tipo di sistema:

- se il sistema è di tipo 0 (nessun polo nell'origine), allora risulta

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \alpha^* \frac{\prod_{k=1}^m (1 + sT_k)}{\prod_{i=1}^n (1 + sT_i)} = \alpha^* \longrightarrow e_r = \frac{R_0}{1 + \alpha^*}$$

In questo caso, cioè, *la costante di posizione è pari al guadagno statico α^** ;

- se il sistema è invece di tipo 1 (o superiore, quindi con uno o più poli nell'origine), allora risulta

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \alpha^* \frac{\prod_{k=1}^m (1 + sT_k)}{s \prod_{i=1}^{n-1} (1 + sT_i)} = \infty \longrightarrow e_r = \frac{R_0}{1 + K_p} = 0$$

In questo caso, quindi, *la costante di posizione è ∞ e quindi l'errore di posizione a regime è nullo.*

Errore a regime nella risposta alla rampa (errore di velocità)

Supponiamo adesso di applicare in ingresso al sistema una rampa di pendenza R_0 , la cui trasformata sarà dunque $R(s) = R_0 / s^2$. Possiamo scrivere in questo caso che

$$E(s) = \frac{R_0 / s^2}{1 + G(s)} \longrightarrow e_r = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_0}{1 + G(s)} \frac{1}{s} = \frac{R_0}{\lim_{s \rightarrow 0} [(1 + G(s))s]} = \frac{R_0}{\lim_{s \rightarrow 0} s + \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{R_0}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)}$$

La quantità $\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$ prende il nome di **costante di velocità** e si indica generalmente con K_V : con questa posizione, possiamo dunque concludere che il valore a regime dell'errore vale

$$e_r = \frac{R_0}{K_V}$$

Vediamo in questo caso come cambia il valore di e_r al variare del tipo del sistema:

- se il sistema è di tipo 0, allora

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \alpha^* \frac{\prod_{k=1}^m (1 + sT_k)}{\prod_{i=1}^n (1 + sT_i)} = 0 \longrightarrow e_r = \infty$$

In questo caso, dunque, l'errore di velocità è ∞ , il che significa che il segnale in uscita sarà tale che l'errore vada aumentando all'infinito;

- se il sistema è invece di tipo 1, allora

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \alpha^* \frac{\prod_{k=1}^m (1 + sT_k)}{\prod_{i=1}^{n-1} (1 + sT_i)} = \alpha^* \longrightarrow e_r = \frac{R_0}{\alpha^*}$$

Questa volta, la costante di velocità è pari al guadagno statico α^* , per cui l'errore a regime si assesta su un valore costante;

- infine, se il sistema è di tipo 2 (o superiore), allora

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \alpha^* \frac{\prod_{k=1}^m (1 + sT_k)}{s \prod_{i=1}^{n-2} (1 + sT_i)} = \infty \longrightarrow e_r = 0$$

In questo caso la costante di velocità è ∞ e quindi l'errore di velocità a regime è nullo. Osserviamo, in base a quanto visto nel paragrafo precedente, che in questo caso (cioè con sistema di tipo 2) risultano nulli sia l'errore di velocità appena calcolato sia quello di posizione in risposta al gradino: questo comporta, in base alla *proprietà di linearità*, che risulterà anche nullo l'errore a regime nella risposta ad una qualunque combinazione lineare di un gradino e di una rampa.

Errore a regime nella risposta alla parabola (errore di accelerazione)

Come ultimo caso, supponiamo di applicare in ingresso al sistema una parabola di equazione $r(t) = \frac{1}{2} R_0 t^2$. La sua trasformata di Laplace è evidentemente $R(s) = R_0 / s^3$, per cui la possiamo scrivere in questo caso che

$$E(s) = \frac{R_0 / s^3}{1 + G(s)} \longrightarrow e_r = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_0}{1 + G(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{R_0}{\lim_{s \rightarrow 0} [(1 + G(s))s^2]} = \frac{R_0}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)}$$

Per analogia con i casi considerati prima, la quantità $\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$ prende il nome di **costante di accelerazione** e si indica generalmente con K_a : possiamo dunque concludere che il valore a regime dell'errore vale questa volta

$$e_r = \frac{R_0}{K_a}$$

Vediamo come cambia il valore di e_r al variare del tipo del sistema:

- se il sistema è di tipo 0, allora

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \alpha^* \frac{\prod_{k=1}^m (1 + sT_k)}{\prod_{i=1}^n (1 + sT_i)} = 0 \longrightarrow e_r = \infty$$

- in modo analogo, se il sistema è di tipo 1 abbiamo che

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \alpha^* \frac{\prod_{k=1}^m (1 + sT_k)}{\prod_{i=1}^{n-1} (1 + sT_i)} = 0 \longrightarrow e_r = \infty$$

- se il sistema è di tipo 2, allora

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \alpha^* \frac{\prod_{k=1}^m (1 + sT_k)}{\prod_{i=1}^{n-2} (1 + sT_i)} = \alpha^* \longrightarrow e_r = \frac{R_0}{\alpha^*}$$

In questo caso la costante di accelerazione è pari al guadagno statico e quindi l'errore di accelerazione a regime si mantiene su un valore costante.

- infine, se il sistema è di tipo 3 (o superiore), allora

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \alpha^* \frac{\prod_{k=1}^m (1 + sT_k)}{s \prod_{i=1}^n (1 + sT_i)} = \infty \longrightarrow e_r = \infty$$

In questo caso la costante di accelerazione è ¥ e quindi l'errore di accelerazione a regime è nullo (come anche quello di posizione in risposta al gradino e quello di velocità in risposta alla rampa).

Conclusioni

I risultati cui siamo pervenuti sono riassunti nella tabella seguente:

Tipo di sistema	K_P	K_V	K_a	Errore di posizione	Errore di velocità	Errore di accelerazione
0	α^*	0	0	$e_r = R_0 / (1 + \alpha^*)$	$e_r = \infty$	$e_r = \infty$
1	∞	α^*	0	$e_r = 0$	$e_r = R_0 / \alpha^*$	$e_r = \infty$
2	∞	∞	α^*	$e_r = 0$	$e_r = 0$	$e_r = R_0 / \alpha^*$

Questi risultati esprimono il cosiddetto **principio del modello interno**: *affinché sia neutralizzato (con errore nullo a regime) un modo corrispondente ad un polo nell'origine di ordine m , occorre generare lo stesso modo nel regolatore, che quindi deve avere un polo nell'origine pure di ordine m o superiore, ossia deve contenere un modello del sistema elementare $1/s^m$ che genera quel modo.*

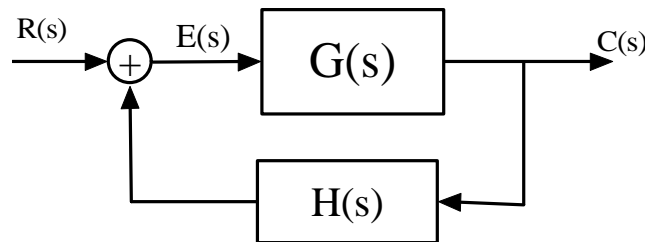
Possiamo inoltre affermare che la precisione aumenta all'aumentare del tipo del sistema e, se si tratta di tipo 0 (risposta al gradino) o di tipo 1 (risposta alla rampa) o di tipo 2 (risposta alla parabola), all'aumentare del guadagno statico α^* . Per aumentare quest'ultimo parametro, è necessario agire sugli amplificatori inseriti, nella catena di controllo, a monte del sistema controllato $G_P(s)$.

Per quanto riguarda, invece, il tipo, per ottenere un suo aumento (cioè per aumentare il numero di poli di $G(s)$ nell'origine), il principio del modello interno appena enunciato afferma che deve essere il controllore ad avere uno o più poli nell'origine a seconda delle situazioni.

D'altra parte, un sistema di tipo elevato presenta notevoli difficoltà realizzative per ciò che riguarda la stabilità: i sistemi di tipo 2, come già detto, sono piuttosto rari, perché, come risulterà chiaro nel seguito, sono di difficile stabilizzazione; il loro impiego è giustificato solo in sistemi di posizionamento e inseguimento di altissima precisione.

Errori a regime per controlli in retroazione non unitaria

Tutte le considerazioni fatte nei paragrafi precedenti a proposito dell'errore a regime sono state riferite al caso di un sistema di controllo in retroazione unitaria, tale cioè che la funzione di trasferimento del ramo di retroazione (cioè del trasduttore di misura) sia pari ad 1. Vogliamo allora estendere tali considerazioni ai sistemi con **retroazione non unitaria**, il cui schema generale è riportato nella figura seguente:



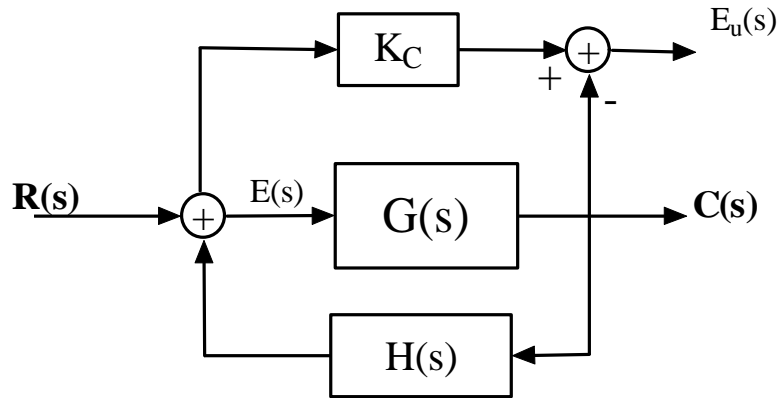
Per prima cosa, dobbiamo adesso riferirci ad una definizione più generale dell'**errore**: indicheremo allora con **e(t)** l'errore per il segnale a valle della giunzione sommanza, mentre useremo i simboli **e_i(t)** ed **e_u(t)** per indicare, rispettivamente, l'**errore riferito all'ingresso** (detto anche **errore di sistema**) e l'**errore riferito all'uscita**, espressi in relazione ad un dato comportamento ideale.

Se l'obiettivo del controllo è l'**inseguimento** ed il comportamento ideale è descritto dalla equazione $c(t) = K_C r(t)$, abbiamo intanto quanto segue:

$$\text{errore riferito all'ingresso} \longrightarrow e_i(t) = \frac{K_C r(t) - c(t)}{K_C}$$

$$\text{errore riferito all'uscita} \longrightarrow e_u(t) = K_C r(t) - c(t) = K_C e_i(t)$$

Queste due relazioni suggeriscono anche un metodo pratico per la misura di $e_i(t)$ ed $e_u(t)$; tale metodo è riassunto nel seguente schema a blocchi, che non è altro che una modifica di quello precedentemente riportato:



Adesso calcoliamo la trasformata di Laplace dell'errore riferito all'ingresso:

$$E_i(s) = \frac{K_C R(s) - C(s)}{K_C} = R(s) - \frac{C(s)}{K_C} = R(s) - \frac{\frac{G(s)}{1+H(s)G(s)} R(s)}{K_C} = \left(1 - \frac{G(s)}{K_C(1+H(s)G(s))}\right) R(s) =$$

$$= \left(\frac{1+H(s)G(s) - G(s)/K_C}{1+H(s)G(s)}\right) R(s)$$

In base a questa espressione si pone

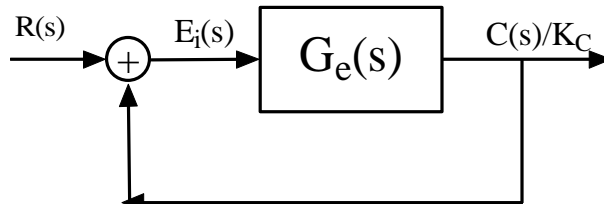
$$G_e(s) = \frac{G(s)}{K_C + G(s)(K_C H(s) - 1)}$$

in modo tale da poter scrivere che

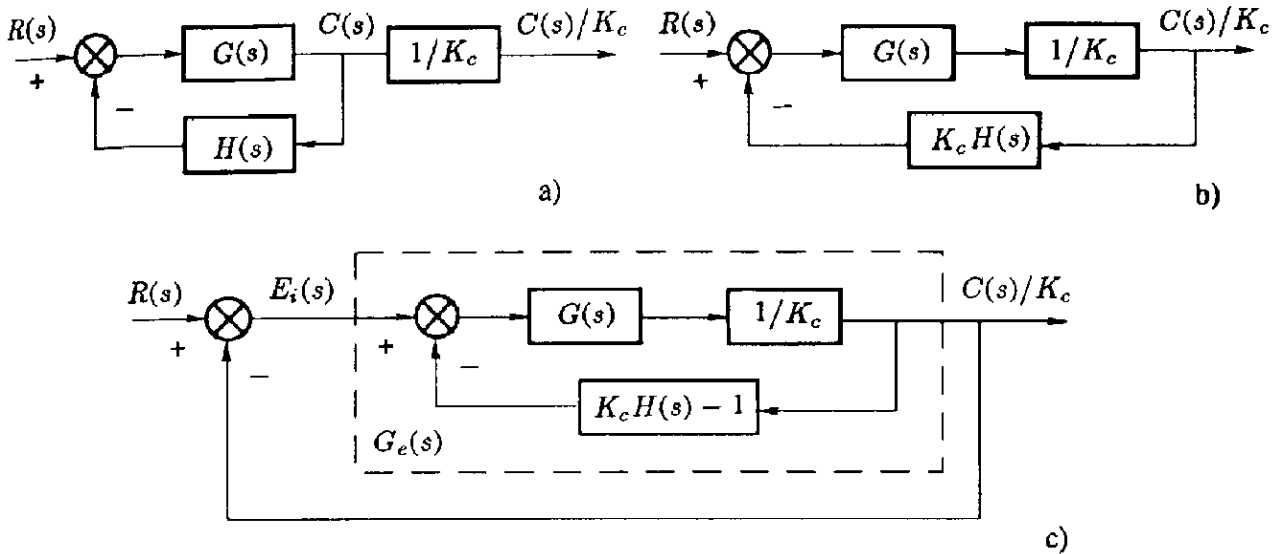
$$E_i(s) = \frac{1}{1+G_e(s)} R(s)$$

La funzione $G_e(s)$ prende il nome di **funzione di trasferimento dell'errore** ed è evidentemente funzione di $G(s)$, $H(s)$ e K_C .

Volendo riferirsi ad uno schema a blocchi, possiamo dunque rappresentare $E_i(s)$ nel modo seguente:



Volendo poi tener conto della struttura della stessa $G_e(s)$, si possono effettuare le elaborazioni indicate nella figura seguente (a→b→c):



Tornando adesso all'espressione analitica (nel dominio di Laplace) dell'errore riferito all'ingresso, avevamo trovato che

$$E_i(s) = \frac{1}{1 + G_e(s)} R(s)$$

Noi siamo interessati a che $e_r = \lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E_i(s) = 0$, per cui abbiamo che

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_e(s)} R(s)$$

Consideriamo allora, ad esempio, l'errore nella risposta al gradino unitario $R(s)=1/s$: abbiamo che

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_e(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_e(s)}$$

La quantità $\lim_{s \rightarrow 0} G_e(s)$ prende il nome di **costante di posizione** e si indica ancora una volta con K_p : possiamo dunque concludere che

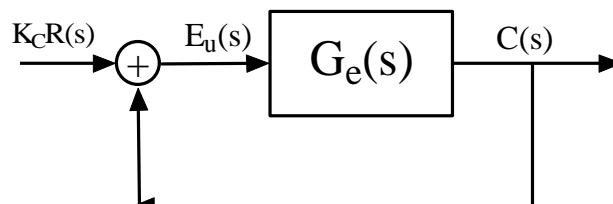
$$e_r = \frac{1}{1 + K_p}$$

che è la stessa espressione trovata nel caso della retroazione unitaria, con la differenza che, questa volta, la funzione di trasferimento coinvolta non è quella del sistema, bensì quella dell'errore.

Passiamo adesso all'errore riferito all'uscita, abbiamo quanto segue:

$$e_u(t) = K_c e_i(t) \longrightarrow \boxed{E_u(s) = K_c \frac{1}{1 + G_e(s)} R(s)}$$

Interpretando anche questa relazione mediante uno schema a blocchi, abbiamo quanto segue:



Adesso vediamo come cambiano le cose nel caso in cui il trasduttore di retroazione si possa considerare *puramente algebrico*, ossia caratterizzato da una funzione di trasferimento del tipo $H(s) = h$.

Se il sistema ha un elevato guadagno statico di anello oppure è di tipo 1 o 2, per ingressi costanti o lentamente variabili risulta $c(t) \cong \frac{1}{h} r(t)$ e quindi risulta logico assumere $K_c = 1/h$. Così facendo, si ottiene $G_e(s) = G(s)h$ e quindi ci si riconduce, per il calcolo dell'errore riferito all'ingresso, direttamente al caso di un sistema con retroazione unitaria, in cui al posto della funzione di trasferimento del percorso di segnale diretto si considera l'intero guadagno di anello

$H(s)H(s)=G(s)h$. In questo caso particolare evidentemente risulta $e_i(t)=e(t)$ e $e_u(t)=e(t)/h$.

In alcuni sistemi in retroazione, il comportamento ideale non consiste nell'inseguimento del segnale di ingresso, ma nella elaborazione di tale segnale secondo una data funzione di trasferimento $W(s)$: in questi casi, per il calcolo degli errori si possono ancora utilizzare le relazioni precedenti, sostituendovi però $W(s)$ a K_C .

Autore: **Sandro Petrizzelli**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: <http://users.iol.it/sandry>