

Il livello fisico

Parte II

PRINCIPALI CARATTERISTICHE DELLA TRASMISSIONE DIGITALE.....	1
<i>Considerazioni generali</i>	1
Schema semplificato di un sistema di trasmissione digitale	3
<i>Baud rate e bit rate</i>	6
MASSIMO BIT RATE OTTENIBILE DA UN CANALE RUMOROSO	10
<i>Teorema di Nyquist (per canali non rumorosi)</i>	10
<i>Teorema di Shannon (per canali rumorosi)</i>	11

Principali caratteristiche della trasmissione digitale

Considerazioni generali

Come si è già detto, i **segnali digitali** sono costituiti da sequenze di *segnali elementari*, temporalmente distinti tra loro, ciascuno di durata Δ . In linea teorica, si può immaginare un numero qualsiasi di forme d'onda cui far corrispondere i messaggi elementari che si vogliono rappresentare (**discretizzazione sulla forma**), oppure, usando una sola forma d'onda, *si possono scegliere per essa ampiezze diverse a seconda dell'informazione da trasmettere* (**discretizzazione sulle ampiezze**). Quest'ultimo è proprio il criterio seguito per la **trasmissione digitale**: volendo ad esempio trasmettere le 10 cifre decimali, i segnali elementari avranno tutti la stessa forma d'onda, ad esempio impulsi rettangolari, ma 10 ampiezze diverse, ognuna corrispondente ad una cifra. *Nel caso della trasmissione binaria (che è quella di nostro interesse in quanto è impiegata nei sistemi di telecomunicazioni più recenti), le ampiezze possibili sono solo due.*

In generale, comunque, la trasmissione di un simbolo piuttosto che un altro corrisponde ad una scelta tra un numero finito X di possibilità, dove X sono appunto i simboli dell'alfabeto sorgente che si vuole trasmettere ($X=2$ nel sistema binario oppure $X=10$ nel sistema decimale). In ricezione, ricevendo la sequenza di

segnali elementari, eventualmente distorta dal mezzo trasmissivo e deformata dai disturbi, si tratterà di “interpretarla”, stabilendo quale è stato il simbolo trasmesso in ciascun intervallo T. Si tratta, perciò, di fare ancora una volta una scelta tra le X possibilità note a priori. Nel caso binario, la cosa è (relativamente) semplice, in quanto le possibilità sono solo due.

Una **operazione di decisione** è tipica nella ricezione dei segnali digitali: da essa consegue che la sequenza di bit in uscita dal ricevitore può essere corretta oppure parzialmente errata (nel caso qualche segnale elementare sia stato interpretato erroneamente). E' intuitivo comprendere che si commetterà un errore solo quando l'azione combinata di distorsioni e disturbi risulta particolarmente intensa: per esempio, nel caso di trasmissione binaria in cui all' uno logico è associata una tensione +V e allo zero logico una tensione -V, l'errore si potrà commettere solo quando il disturbo è tale da trasformare una ampiezza positiva in negativa o viceversa. Al giorno d'oggi, le caratteristiche realizzative dei mezzi di trasmissione nonché quelle degli apparati di rice-trasmmissione sono di tale buona qualità da rendere veramente minima la probabilità di errore in corrispondenza di velocità di trasmissione comunque molto elevate.

Detto questo, possiamo sottolineare alcune differenze tra un **sistema di trasmissione analogica** ed un **sistema di trasmissione digitale**:

- una prima differenza è che, mentre nella trasmissione analogica è necessario utilizzare apparecchiature ottimizzate per il tipo di segnale da trasmettere (segnale telefonico, segnale musicale, segnale televisivo ⁽¹⁾ e così via), nella trasmissione digitale ciò non è necessario: i segnali numerici hanno tutti la stessa forma d'onda (a parte, ovviamente, la sequenza dei simboli), per cui è possibile trasmettere un qualunque segnale numerico senza preoccuparsi di cosa i simboli numerici rappresentano;
- una seconda differenza riguarda gli **errori**, inevitabili in qualsiasi sistema reale di comunicazione: da un lato, abbiamo già osservato che il segnale da trasmettere è comunque sempre di tipo analogico, per cui non è possibile far arrivare al ricevitore la stessa forma d'onda trasmessa e quindi anche nella trasmissione digitale non si può mai raggiungere la certezza di non commettere errori; a fronte di questo, però, ci sono due considerazioni da fare, la cui

¹ Pensiamo, per esempio, alla diversa banda necessaria per la trasmissione dei segnali elencati: abbiamo bisogno di almeno 3 kHz per il **segnale vocale di qualità telefonica**, di almeno 15 kHz per il **segnale musicale** e di almeno 5 MHz per il **segnale televisivo** in formato PAL.

giustificazione non si ritiene necessaria in questa sede: in primo luogo, si può fare in modo, nella trasmissione digitale, che la probabilità di errore sia talmente bassa che l'effetto degli errori diventi praticamente invisibile ⁽²⁾; in secondo luogo, mentre nel caso analogico per aumentare il rapporto segnale/rumore di 10 dB bisogna aumentare di 10 dB la potenza del segnale, nel caso digitale questo non è necessario, ossia è sufficiente un molto minore incremento di potenza per ottenere gli stessi miglioramenti dell'analogico ⁽³⁾;

- infine, la trasmissione digitale gode di una robustezza intrinseca ai disturbi di gran lunga superiore rispetto alla trasmissione analogica: infatti, un segnale analogico porta con sé informazione in ogni singolo valore assunto nel tempo, per cui ogni singola variazione dell'andamento può corrispondere a deterioramenti apprezzabili della qualità del servizio offerto; al contrario, un segnale digitale porta informazione nei livelli assunti durante intervalli di tempo di durata Δ (sia pure piccola): questo significa che un errore su un bit si potrebbe verificare solo se, durante il corrispondente tempo Δ , il segnale è stato distorto in maniera davvero molto rilevante, il che è poco probabile. Da questo si comprende il motivo per cui la qualità di un qualsiasi servizio di telecomunicazione basato su trasmissione di segnali digitali risulta sempre migliore, a parità di potenza trasmessa, dell'analogico servizio fornito usando segnali analogici. Tipico è l'esempio della **TV digitale** sempre più diffusa al giorno d'oggi (si pensi alla distribuzione broadcast via satellite, ormai interamente digitale).

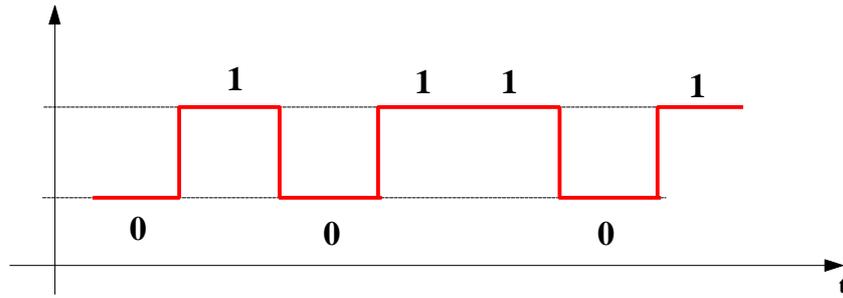
Ovviamente, tutte queste considerazioni non devono comunque lasciar credere che la trasmissione digitale sia solo “rose e fiori”, perché comunque subentrano altri tipi di problemi, spesso di non facile soluzione.

Schema semplificato di un sistema di trasmissione digitale

Come già osservato, il modo più semplice di trasmettere un **segnale binario**, cioè una sequenza di 1 e 0 logici, è quello di associare a ciascun simbolo un **impulso rettangolare di tensione**, che, in generale, avrà ampiezza V_0 nel caso dello 0 logico e V_1 nel caso dell' 1 logico:

² I sistemi reali di trasmissione numerica non sbagliano praticamente mai se sono “disturbati” soltanto dal rumore termico ed elettronico generato dalle apparecchiature elettroniche utilizzate. Sono invece molto più sensibili ad altri disturbi, tipicamente quelli provenienti da apparecchiature meccaniche in movimento (si pensi alle vecchie centrali telefoniche).

³ I concetti di “rapporto segnale/rumore” e “dB” saranno ripresi anche in seguito.



Nel caso più banale, si può pensare di trasmettere una tensione nulla per lo 0 ed una tensione di un valore +V (ad esempio +5 volt) per l'1.

In ricezione, non interessa ricostruire la forma d'onda trasmessa, ma serve riottenere, con la maggiore fedeltà possibile, la sequenza di simboli trasmessa. Quindi, nella trasmissione numerica bisogna effettuare, al terminale ricevente, una decisione binaria. Le possibilità sono le seguenti:

- se è stato trasmesso il simbolo logico 0 e si è scelto di associare a tale simbolo un livello nullo di tensione, in ricezione giunge solo rumore:

$$s_R(t) = n(t)$$

In questo caso, il sistema deve essere in grado di capire che il segnale ricevuto è solo rumore, in modo da optare per lo 0 logico;

- se invece è stato trasmesso il simbolo logico 1 e si è scelto di associare ad esso una certa forma d'onda elementare $s(t)$ di durata Δ (ad esempio un impulso rettangolare di durata Δ e di una ampiezza prefissata), questa giunge al ricevitore, attenuata di una certa costante k e ritardata (di una quantità nota, dipendente dalla distanza su cui corre il collegamento e dal mezzo fisico di trasporto); possiamo perciò scrivere che, in questo caso, in ricezione si ha

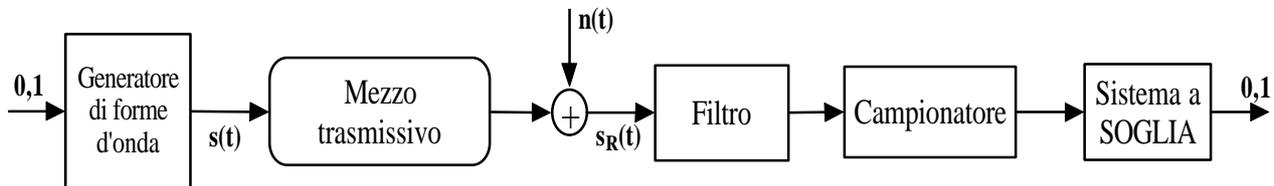
$$s_R(t) = ks(t - n\Delta) + n(t)$$

In questo caso, il sistema deve capire che c'è un segnale ricevuto con sovrapposto del rumore, in modo da optare per l' 1 logico.

Al fine di minimizzare la probabilità di errore, bisogna fare in modo che, almeno in un certo istante (che varia con le forme d'onda scelte per la trasmissione), il

segnale sia quanto più grande possibile rispetto ai valori che può assumere il rumore.

Possiamo a questo punto dare dei cenni circa la struttura a blocchi di un sistema di trasmissione binaria:



La **sequenza binaria** da trasmettere va in ingresso ad un dispositivo (**generatore di forme d'onda**) che ha il compito di associare ad essa le corrispondenti forme d'onda da trasmettere. La sequenza di tali forme d'onda costituisce il segnale $s(t)$ che viene inviato sul mezzo trasmissivo. All'uscita di quest'ultimo arriva un segnale, inevitabilmente attenuato, con sovrapposto un **rumore** $n(t)$ (che, in sede di analisi, viene sempre supposto bianco e con distribuzione gaussiana delle ampiezze). La composizione di tali segnali rappresenta il segnale $s_R(t)$ che va in qualche modo elaborato in ricezione. La prima elaborazione è compiuta da un **filtro**, del quale in questa sede non interessano i dettagli: esso è fatto in modo che il segnale alla sua uscita presenti un massimo in istanti di tempo distanti Δ secondi uno dall'altro. Questi massimi vengono misurati (mediante un dispositivo che quindi è semplicemente un **campionatore** con periodo di campionamento Δ) e, in base a tali misure, il successivo **sistema a soglia** decide se il simbolo trasmesso è 1 oppure 0: se la tensione elettrica misurata in ingresso è maggiore di un livello prefissato (detto **soglia**), il sistema a soglia fornisce in uscita il valore 1, mentre in caso contrario fornisce 0 (4).

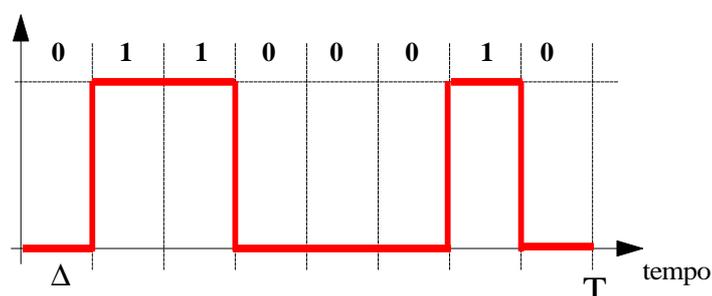
E' importante fare una osservazione. Lo schema tracciato nell'ultima figura, tipico di un sistema di trasmissione binaria, può essere in effetti distinto in due parti, una **binaria** ed una **analogica**: infatti, ci sono simboli binari solo prima del generatore di forme d'onda e dopo il sistema a soglia, mentre, nel resto dello schema, avendo a che fare con forme d'onda continue nel tempo, siamo in presenza di un normale sistema analogico. In altre parole, quindi, il generatore di forme d'onda ed il sistema a soglia effettuano, rispettivamente, il passaggio da digitale ad

⁴ In effetti, questa è solo una semplice schematizzazione di come vanno le cose, in quanto non si tiene conto, ad esempio, che la trasmissione digitale può essere anche multilivello, ossia tale per cui i segnali elementari associati ai simboli possano avere più di due ampiezze: in casi come questi, di cui si terrà conto più avanti, lo schema si complica in quanto, come minimo, bisognerà prevedere più soglie per la decisione; ad esempio, per un sistema a 4 livelli (cioè con 4 diverse ampiezze per i segnali elementari), serviranno 3 soglie.

analogico (D→A) e da analogico a digitale (A→D). In altre parole ancora, essi fanno da **interfaccia** tra il sistema binario ed il sistema analogico usato per la trasmissione.

Baud rate e bit rate

Riprendiamo nuovamente l'esempio considerato in precedenza circa la trasmissione della sequenza di bit corrispondente al codice ASCII della lettera "b":



Il segnale rappresentativo della suddetta sequenza (01100010) è una *specie di onda quadra*: è composta da 8 segnali elementari (impulsi rettangolari), ciascuno rappresentativo di un bit, ed ha una durata complessiva di T secondi. Ogni singolo segnale elementare ha invece durata Δ (detto **periodo di cifra**), pari in questo caso a T/8.

In generale, il tempo T richiesto per trasmettere un simbolo dell'**alfabeto** della sorgente (può essere un carattere ASCII, un valore numerico risultato di una misura o quant'altro) dipende da due fattori: il **metodo di codifica** utilizzato (cioè sostanzialmente il criterio usato per associare al simbolo una corrispondente sequenza di bit che lo identifichi univocamente) e la cosiddetta **velocità di segnalazione**, ossia il numero di volte al secondo in cui il segnale può cambiare valore (ad esempio il cambio di voltaggio in un segnale elettrico).

La velocità di segnalazione si misura in **baud rate**, dove il *baud* è il numero di volte in cui il segnale può cambiare valore in un secondo. Ad esempio, un mezzo di trasmissione con baud rate di *b* baud tollera *b* cambiamenti di valore al secondo da parte del segnale ⁽⁵⁾.

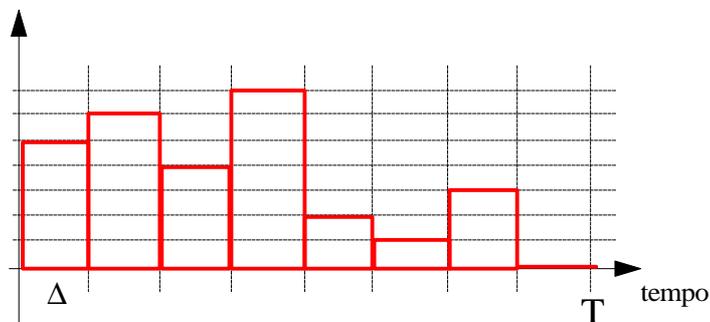
E' intuitivo allora un concetto: si è detto in precedenza che lo spettro di un segnale è tanto più esteso (cioè comprende frequenze tanto più elevate) quanto più

⁵ Evidentemente, il numero di cambiamenti di livello al secondo coincide con il numero di segnali elementari che transitano sul mezzo in un secondo.

“veloce” è il segnale stesso, cioè quanto più rapide sono le sue variazioni nel tempo; dire allora che un mezzo di trasmissione tollera un baud rate pari a b significa dire, sostanzialmente, che la sua banda passante (brevemente **banda** da ora in poi) è tale da far passare le armoniche necessarie affinché il segnale possa cambiare livello b volte al secondo. Quindi, il baud rate tollerato da un mezzo di trasmissione è direttamente proporzionale alla banda del mezzo stesso.

A questo punto, dal baud rate dobbiamo passare al cosiddetto **bit rate**, cioè alla velocità con cui possiamo trasmettere i bit sul mezzo di comunicazione ⁽⁶⁾. Si potrebbe erroneamente pensare che baud rate e bit rate siano la stessa cosa, ma ciò è vero solo in un caso: se ogni segnale elementare corrisponde ad un solo bit (potremmo dire “trasporta” un solo bit), allora effettivamente vale l’uguaglianza. Infatti, in ricezione, il ricevitore si aspetta di ricevere solo due tipi di segnali elementari (ad esempio due impulsi rettangolari di ampiezza $+V$ oppure $-V$) e quindi ogni sua scelta può dare solo esito binario, cioè un solo bit. Al contrario, se ogni segnale elementare corrisponde a più bit, è chiaro che il bit rate diventa un multiplo intero del baud rate.

Per spiegarci meglio, supponiamo che il segnale trasmesso sia una tensione variabile nel tempo e che i segnali elementari siano impulsi rettangolari di tensione di 8 diverse ampiezze:



In questo caso, il baud rate è sempre lo stesso in quanto è una caratteristica del mezzo, ma il ricevitore, dovendo sempre scegliere tra 8 possibilità, può associare a ciascuna di esse un numero M di bit tale che $2^M=8$, ossia può associare $M=3$ bit a ciascuna scelta (cioè quindi a ciascun segnale elementare). Così facendo, quindi, a fronte di un baud rate b , otteniamo un bit rate pari a $3b$ bit/s.

⁶ Da non confondere la velocità di trasmissione dei bit con la velocità di propagazione degli stessi (cioè dei segnali elettrici): quest’ultima, infatti, determina semplicemente, una volta nota la distanza tra sorgente e destinazione, dopo quanto tempo ciascun bit arriva alla destinazione, mentre invece il bit rate quantifica la velocità alla quale i bit possono succedersi nel tempo.

In generale, dunque, vale la relazione

$$\boxed{\text{bit rate} = \text{baud rate} \cdot M}$$

A parità di baud rate, il bit rate è tanto maggiore quanto maggiore è il numero M di bit associato a ciascuna ampiezza, ossia quindi quanto maggiore è il numero $A=2^M$ di ampiezze utilizzate.

Queste considerazioni mostrano come, a parità di caratteristiche del mezzo di trasmissione (rappresentate essenzialmente dalla sua banda), velocità di trasmissione maggiori saranno ottenibili solo perfezionando le tecniche di codifica (ossia i criteri con cui associare i bit ai simboli di sorgente) nonché il tipo di segnali elementari da usare in trasmissione: bisogna cioè cercare di individuare segnali elementari cui associare un numero sempre maggiore di bit a parità ovviamente di potenza trasmessa e probabilità di errore ottenibile in ricezione.

A proposito della probabilità d'errore, ad esempio, è evidente un fatto: se è fissato il massimo valore assumibile dal segnale trasmesso sul mezzo in questione, scegliere segnali elementari con due sole ampiezze (bit rate = baud rate) è cosa ben diversa dallo scegliere segnali elementari con 8 ampiezze (bit rate = 3 * baud rate), in quanto, in questo secondo caso, è più probabile che un eventuale disturbo induca il ricevitore in errore; essendo le ampiezze più simili tra loro, è infatti sufficiente, per provocare l'errore, un disturbo più piccolo (e quindi più probabile) rispetto a quello che determinerebbe l'errore in un sistema a due sole ampiezze.

Torniamo adesso al bit rate e indaghiamo sul legame con la banda a disposizione sul mezzo trasmissivo: supponiamo di voler ottenere una velocità di N bit/s (dove $N=1/\Delta$ e dove Δ è il **periodo di cifra**, cioè la "durata" del singolo bit); il tempo richiesto per spedire 8 bit è allora $T=8/N$, nell'ipotesi di usare segnali elementari con due sole ampiezze (**M=1**). Allora, in base a quanto visto in precedenza tramite l'analisi di Fourier, deduciamo che $f = \frac{1}{T} = \frac{N}{8}$ è la frequenza della prima armonica del segnale che dovremo trasmettere. Assumendo, per esempio, che il segnale sia sufficientemente ricostruibile dalle prime 15 armoniche, deduciamo che la banda che dovremo avere a disposizione sul mezzo sarà approssimativamente

$$B = 15 \cdot f = 15 \cdot \frac{N}{8} \text{ [Hz]}$$

Tanto per fare un esempio numerico, consideriamo una velocità di 14400 bit/s (brevemente 14.4 kbps): in base a quella formula, avremo bisogno di una banda di 27 kHz. Se consideriamo che una linea telefonica ordinaria, spesso chiamata **linea voice-grade**, ha una **frequenza di taglio** volutamente introdotta a **3000 Hz**, dovremmo dedurre che, con la tecnica scelta, i 14.4 kbps sono impensabili.

Dovremo allora necessariamente codificare le singole forme d'onda con più bit, ossia ad esempio scegliere rettangoli con un numero di ampiezze maggiore di 2: così facendo, aumentiamo il bit rate a parità di baud rate e quindi possiamo sperare di raggiungere la velocità desiderata a parità di banda a disposizione.

Possiamo ragionare nel modo seguente, ad esempio nel caso della linea telefonica con banda 3000 Hz: se 3000 Hz è la frequenza della massima armonica che può passare attraverso la linea, il corrispondente numero n_{max} della più alta armonica sarà

$$n_{max} = \frac{B}{N/8} = \frac{3000}{N/8}$$

cioè approssimativamente $24000/N$ ("approssimativamente" in quanto il taglio non è mai netto).

La tabella seguente riporta allora, per $B=3000$ Hz e $T=8/N$, i vari "numeri" corrispondenti a diverse velocità di trasmissione N (e supponendo $M=1$):

bps	T(ms)	1°armonica(Hz)	n_{max}
300	26.67	37.5	80
600	13.33	75	40
1200	6.67	150	20
2400	3.33	300	10
4800	1.67	600	5
9600	0.83	1200	2
19200	0.42	2400	1
38400	0.21	4800	0

La tabella mostra evidentemente che, al crescere della velocità di trasmissione, cresce la frequenza della prima armonica e, contemporaneamente, si riduce il numero di armoniche che riescono a passare nella banda passante: in generale, risultano necessarie almeno 20 armoniche per poter ricostruire in ricezione la sequenza di bit, il che significa che la linea in questione non possa essere usata per

bit rate superiori a 1200 bps (stiamo sempre supponendo $M=1$). Addirittura, per un bit rate di 38400 bps, nemmeno la prima armonica rientra nella banda passante, per cui il ricevitore teoricamente non riceve assolutamente niente di decodificabile.

Tra l'altro, facciamo notare che tutti questi discorsi presuppongono un **canale di trasmissione ideale** ed anche una **apparecchiatura ricevente ideale**, il che si traduce nel dire che il segnale non subisce l'effetto di alcun rumore. Nella realtà, invece, è noto (e lo vedremo del resto più avanti) che la presenza del **rumore** deteriora ulteriormente le prestazioni dell'intero sistema rispetto a quelle teoriche descritte poco fa.

Massimo bit rate ottenibile da un canale rumoroso

Teorema di Nyquist (per canali non rumorosi)

Ci sono due teoremi fondamentali che caratterizzano i limiti per la trasmissione delle informazioni. Consideriamo per il momento il primo di essi.

Nyquist (1924) ha dimostrato che un segnale analogico di banda B (quindi con armoniche comprese tra 0 e B Hz) può essere completamente ricostruito mediante una campionatura effettuata $2B$ volte al secondo. Ad esempio, un segnale con banda di 3 kHz, come *quello vocale di qualità telefonica*, può essere ricostruito esattamente (almeno a livello teorico) tramite una sequenza di suoi campioni presi con frequenza di campionamento di 6 kHz (cioè uno ogni 0.167 ms).

Questo ha una immediata implicazione in termini di bit rate su un **mezzo di trasmissione non affetto da rumore**: supponiamo infatti che il mezzo abbia una banda B ; in base al teorema di Nyquist, usando segnali binari (cioè con $M=1$), non ha senso "campionare la linea" più velocemente di $2B$ volte al secondo, in quanto le componenti di frequenza più alta che tale velocità potrebbe recuperare vengono in realtà filtrate via. Detto in parole più semplici, un mezzo di banda B sul quale vengano fatti transitare segnali binari ($M=1$) permette un bit rate massimo di $2B$ bit/s.

Ovviamente, in base alle considerazioni fatte nei paragrafi precedenti, è possibile usare segnali elementari con più di due ampiezze ($M>1$) al fine di migliorare il bit rate a parità di banda a disposizione: infatti, il **teorema di Nyquist**, nella sua forma più generale, afferma che, se i segnali elementari (ad esempio i classici

impulsi rettangolari di durata Δ) possono assumere A ampiezze, il massimo bit rate ottenibile è

$$(\text{bit rate})_{\max} = 2 \cdot B \cdot \log_2 A \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{s}} \right]$$

dove ricordiamo che il numero A di ampiezze è legato al numero M di bit associato a ciascuna ampiezza dalla relazione $A=2^M$.

Ad esempio, se avessimo a disposizione un mezzo trasmissivo, senza rumore, con banda di 3000 Hz, potremmo trasmettere non oltre i 6000 bit/s usando segnali binari ($M=1 \rightarrow A=2^1=2$), non oltre 12000 bit/s usando due bit per forma d'onda elementare ($M=2 \rightarrow A=2^2=4$), non oltre 18000 bit/s usando tre bit per forma d'onda elementare ($M=3 \rightarrow A=2^3=8$) e così via.

Come vedremo in seguito, i **modem** più veloci sfruttano un segnale con un numero A di livelli piuttosto elevato per riuscire a trasmettere, su una linea funzionante ad x *baud*, più di x bit/sec.

Teorema di Shannon (per canali rumorosi)

Il fondamentale limite del teorema di Nyquist è quello di essere valido per canali totalmente privi di disturbi, il che purtroppo non è realistico. Nei casi reali, i disturbi, per quanto piccoli possano essere (specialmente grazie alle nuove tecnologie microelettroniche), ci sono sempre. Bisogna in questo caso applicare il **teorema di Shannon** (1948), che considera le caratteristiche di un **canale rumoroso**.

Prima di esporre il teorema è necessario chiarire il concetto di **rapporto segnale/rumore (signal to noise ratio, S/N)**: in un generico punto di un dispositivo o di un apparato di comunicazione, il **rapporto S/N** è il rapporto fra la potenza del segnale utile e quella del rumore ad esso sovrapposto. Essendo un rapporto tra potenze, si tratta di una quantità adimensionale, che spesso viene espressa in **unità logaritmiche** anziché in unità naturali:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{S}{N}$$

In questo caso, quindi, il rapporto segnale/rumore viene misurato **decibel (dB)**, che crescono evidentemente come $10\log_{10} (S/N)$. La tabella seguente riporta alcuni valori esemplificativi:

Rapporto S/N	Misura in Db
2	3
10	10
100	20
1.000	30

Quindi, un rapporto segnale/rumore di 10 dB equivale anche a 10 in unità naturali, mentre invece, ad esempio, un rapporto segnale/rumore di 30 dB equivale a 3000 in unità naturali.

Premesso questo, il **teorema di Shannon** afferma che il massimo bit rate ottenibile da un canale rumoroso con banda passante di B Hz e con rapporto segnale/rumore (in uscita) pari a S/N (in unità naturali), è dato dalla seguente formula:

$$\boxed{(\text{bit rate})_{\max} = B \cdot \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{s}} \right]}$$

Si tratta dunque di una formula abbastanza diversa da quella vista prima per canali non rumorosi. La cosa che salta subito agli occhi è che è scomparsa la dipendenza dal numero A di ampiezze scelte per i segnali elementari (da ora in poi parleremo semplicemente di **livelli** del segnale). Il motivo è che questo parametro risulta di fatto incluso nel valore del rapporto segnale/rumore: infatti, un minimo di analisi dettagliata sulla trasmissione numerica (che però non ci interessa in questa sede) mostra che, all'aumentare della potenza di rumore e a parità di numero A di livelli, se si vuole mantenere invariata la probabilità di errore è necessario aumentare la potenza da trasmettere, al fine di elevare i livelli rispetto al rumore stesso.

In definitiva, dunque, diciamo che, per ottenere un prefissato bit rate da un canale di banda B assegnata, dovremo necessariamente garantire un rapporto S/N che soddisfi quella relazione. Dato che la potenza di rumore non è generalmente sotto il nostro controllo (ipotizzando di usare apparecchiatura riceventi ottimizzate da questo punto di vista), è ovvio che riusciremo ad aumentare il bit rate aumentando la potenza in trasmissione.

Vista la cosa al contrario, per un canale rumoroso di banda B assegnata e in corrispondenza di un determinato rapporto S/N , non potremo mai trasmettere con bit rate superiore a $B \cdot \log_2(1+S/N)$.

Tornando, per esempio, al caso del canale con banda 3 kHz, supponiamo di riuscire a garantire un rapporto segnale rumore di 30 dB (che è un valore tipico ottenibile da una normale linea telefonica): il teorema di Shannon ci dice, in questo caso, che si può arrivare al massimo a 30.000 bps ed infatti questo è approssimativamente il bit rate che si ottiene nel collegamenti a Internet tramite normale doppino telefonico dalle abitazioni agli **ISP** (*Internet Service Provider*).

In generale, quindi, volendo fare un breve riepilogo di quanto detto fino ad ora, possiamo dire quanto segue:

- più alto è il numero di bit/secondo che si vogliono trasmettere, più ampia diviene la banda passante che serve sul mezzo o, a parità di banda, più grande è la potenza che serve trasmettere;
- a parità di mezzo utilizzato, tanto più è corto il canale di trasmissione tanto più è alto il numero di bit/secondo raggiungibile (attenuazioni e sfasamenti restano accettabili) a parità di altri parametri;
- la trasmissione digitale è più critica di quella analogica in quanto genera frequenze più alte (dato che le transizioni dei segnali sono più rapide), ma può essere più facilmente "rigenerata" lungo il percorso, in quanto è sufficiente distinguere fra pochi valori per ripristinare il segnale originario (mentre invece nella trasmissione analogica ogni amplificazione introduce distorsione, che si somma a quella degli stadi precedenti) ed è quindi più robusta nei confronti dei disturbi.

Autore: **Sandro Petrizzelli**

e-mail: sandry@iol.it

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>

succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>