

LA TRASFORMATTA DI FOURIER

1 PROPRIETA' FONDAMENTALI

1) Trasformazione diretta ed inversa

$$G(f) = \mathbf{F} [g(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt ; \quad g(t) = \mathbf{F}^{-1} [G(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$g(t) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{array} G(f)$$

2) Rappresentazione complessa

$$G(f) = \mathbf{R} \{G(f)\} + j \mathbf{Im} \{G(f)\} = |G(f)| \exp[j\Phi_G(f)];$$

$$|G(f)| = \sqrt{(\mathbf{Re} \{G(f)\})^2 + (\mathbf{Im} \{G(f)\})^2}; \quad \Phi_G(f) = \arctg \left[\frac{\mathbf{Im} \{G(f)\}}{\mathbf{Re} \{G(f)\}} \right].$$

3) Valore nell'origine

$$G(f=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt ; \quad g(t=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) \cdot$$

4) Linearita'

$$c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{array} c_1 G_1(f) + c_2 G_2(f).$$

5) Simmetria

$$g(t) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{array} G(f) \Leftrightarrow G(t) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{array} g(-f).$$

6) Inversione dell'asse

$$g(t) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{array} G(f) \Leftrightarrow g(-t) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{array} G(-f).$$

7) Coniugazione

$$g(t) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{array} G(f) \Leftrightarrow g^*(t) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{array} G^*(-f) \text{ ed anche } g^*(-t) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{array} G^*(f).$$

8) Proprieta' di simmetria

Se $g(t)$ e' un segnale reale, allora risulta:

$$\mathbf{F} [g(t)] = G(f) = G^*(-f) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{R} \{G(f)\} = \mathbf{R} \{G(-f)\}; & \mathbf{Im} \{G(f)\} = -\mathbf{Im} \{G(-f)\}; \\ |G(f)| = |G(-f)|; & \Phi_G(f) = -\Phi_G(-f). \end{cases}$$

Se $g(t)$ e' un segnale reale e pari, anche $G(f)$ e' reale e pari:

$$G(f) = \mathbf{Re}\{G(f)\} = G(-f) \quad ; \quad \mathbf{Im}\{G(f)\} = 0;$$

$$G(f) = 2 \int_0^{+\infty} g(t) \cos(2\pi f t) dt.$$

Se $g(t)$ e' un segnale reale e dispari, allora $G(f)$ e' puramente immaginaria e dispari:

$$G(f) = j\mathbf{Im}\{G(f)\} = -G(-f) \quad ; \quad \mathbf{Re}\{G(f)\} = 0;$$

$$G(f) = -2j \int_0^{+\infty} g(t) \sin(2\pi f t) dt.$$

Se $g(t)$ e' privo di simmetrie, puo' essere comunque decomposto nella somma della sua parte pari e della sua parte dispari:

$$g(t) = g_p(t) + g_d(t) \quad ; \quad g_p(t) = \frac{1}{2}[g(t) + g(-t)] \quad ; \quad g_d(t) = \frac{1}{2}[g(t) - g(-t)].$$

Per cui da quanto detto dovra' risultare:

$$\mathbf{Re}\{G(f)\} = \mathbf{F} [g_p(t)] = \frac{1}{2}\mathbf{F} [g(t) + g(-t)];$$

$$\mathbf{Im}\{G(f)\} = \mathbf{F} [g_d(t)] = \frac{1}{2j}\mathbf{F} [g(t) - g(-t)].$$

9) Cambiamento si scala

$$g(at) \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{matrix} \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right); \quad G(bf) \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbf{F}^{-1}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}} \end{matrix} \frac{1}{|b|} g\left(\frac{t}{b}\right).$$

9) Traslazione nel dominio del tempo

$$g(t - t_0) \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{matrix} G(f)e^{-j2\pi f t_0}.$$

10) Traslazione nel dominio della frequenza

$$G(f - f_0) \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbf{F}^{-1}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}} \end{matrix} g(t)e^{j2\pi f_0 t}.$$

11) Modulazione

$$2g(t) \cos(2\pi Ft + \vartheta) \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{matrix} G(f - F)e^{j\vartheta} + G(f + F)e^{-j\vartheta}.$$

12) Derivazione nel dominio del tempo

$$\frac{d^n}{dt^n} g(t) \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{matrix} (j2\pi f)^n G(f).$$

13) Derivazione nel dominio della frequenza

$$[t]^n g(t) \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{matrix} \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n}{dt^n} G(f).$$

14) Integrazione nel dominio del tempo

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{matrix} \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}G(0) \delta(f) \cdot$$

15) Convoluzione nel dominio del tempo

$$g(t) \otimes z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) z(t-\tau) d\tau \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{matrix} G(f)Z(f) \cdot$$

16) Convoluzione nel dominio della frequenza

$$g(t)z(t) \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{matrix} G(f) \otimes Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(v)Z(f-v) dv \cdot$$

17) Correlazione nel dominio del tempo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)z^*(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t+\tau)z^*(t) dt \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{matrix} G(f)Z^*(f) \cdot$$

18) Correlazione nel dominio della frequenza

$$g(t)z^*(t) \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{matrix} \int_{-\infty}^{+\infty} G(f+v)Z^*(v) dv \cdot$$

19) Relazione di Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)z^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)Z^*(f) df \cdot$$

20) Campionamento nel dominio del tempo

$$g(t) \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{matrix} G(f) \Rightarrow g_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(nT_c) \delta(t-nT_c) \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{matrix} G_c(f) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G\left(f - \frac{n}{T_c}\right)$$

2 TRASFORMATE NOTEVOLI

1) Impulso ideale (impulso di Dirac)

$$g(t) = A\delta(t) \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{matrix} G(f) = A \cdot$$

2) Segnale costante

$$g(t) = A \begin{matrix} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xleftarrow{\mathbf{F}^{-1}} \end{matrix} G(f) = A\delta(f) \cdot$$

3) Impulso rettangolare

$$g(t) = A \text{rect}_T(t) = \begin{cases} A & \text{per } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{per } |t| \geq T/2 \end{cases} \begin{matrix} \mathbf{F} \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \mathbf{F}^{-1} \end{matrix} G(f) = AT \text{sinc}(\pi f T) \cdot$$

4) Impulso triangolare

$$g(t) = A \text{tri}_T(t) = \begin{cases} A \left[1 - \frac{|t|}{T} \right] & \text{per } |t| \leq T \\ 0 & \text{per } |t| \geq T \end{cases} \begin{matrix} \mathbf{F} \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \mathbf{F}^{-1} \end{matrix} G(f) = AT \text{sinc}^2(\pi f T) \cdot$$

5) Segnale "sinc"

$$g(t) = A \text{sinc}(\pi B t) \begin{matrix} \mathbf{F} \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \mathbf{F}^{-1} \end{matrix} G(f) = \frac{A}{B} \text{rect}_B(f) \cdot$$

6) Segnale "sinc²"

$$g(t) = A \text{sinc}^2(\pi B t) \begin{matrix} \mathbf{F} \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \mathbf{F}^{-1} \end{matrix} G(f) = \frac{A}{B} \text{tri}_B(f) \cdot$$

7) Segnale esponenziale monolatero

$$g(t) = A e^{-\alpha t} u_{-1}(t) \begin{matrix} \mathbf{F} \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \mathbf{F}^{-1} \end{matrix} G(f) = \frac{A}{\alpha + j2\pi f} \cdot$$

8) Segnale esponenziale bilatero

$$g(t) = A e^{-\alpha|t|} \begin{matrix} \mathbf{F} \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \mathbf{F}^{-1} \end{matrix} G(f) = A \frac{2\alpha}{(\alpha)^2 + (2\pi f)^2} \cdot$$

9) Segnale gradino unitario

$$g(t) = A u_{-1}(t) = \begin{cases} A & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases} \begin{matrix} \mathbf{F} \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \mathbf{F}^{-1} \end{matrix} G(f) = \frac{A}{2} \delta(f) + \frac{A}{j2\pi f} \cdot$$

10) Funzione "segno"

$$g(t) = A \text{sign}(t) = \begin{cases} +A & \text{per } t \geq 0 \\ -A & \text{per } t \leq 0 \end{cases} \begin{matrix} \mathbf{F} \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \mathbf{F}^{-1} \end{matrix} G(f) = \frac{A}{j\pi f} \cdot$$

11) Segnale esponenziale complesso (fasore)

$$g(t) = A e^{j2\pi f_0 t} \begin{matrix} \mathbf{F} \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \mathbf{F}^{-1} \end{matrix} G(f) = A \delta(f - f_0) \cdot$$

12) Segnale cosinusoidale

$$g(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \vartheta) \xrightarrow[\mathbf{F}^{-1}]{\mathbf{F}} G(f) = \frac{A}{2} e^{j\vartheta} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} e^{-j\vartheta} \delta(f + f_0).$$

13) Segnale sinusoidale

$$g(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \vartheta) \xrightarrow[\mathbf{F}^{-1}]{\mathbf{F}} G(f) = \frac{A}{2j} e^{j\vartheta} \delta(f - f_0) - \frac{A}{2j} e^{-j\vartheta} \delta(f + f_0).$$

14) Treno periodico di impulsi di Dirac

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow[\mathbf{F}^{-1}]{\mathbf{F}} G(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right).$$

15) Segnale a rampa

$$g(t) = A \cdot t \cdot \text{rect}_T(t) \xrightarrow[\mathbf{F}^{-1}]{\mathbf{F}} G(f) = j \frac{AT^2}{2} \frac{1}{\pi f T} [\cos(\pi f T) - \text{sinc}(\pi f T)].$$

16) Impulso Gaussiano

$$g(t) = A e^{-\pi(t/T)^2} \xrightarrow[\mathbf{F}^{-1}]{\mathbf{F}} G(f) = AT e^{-\pi(fT)^2}.$$

17) Impulso bipolare

$$g(t) = A \text{sign}(t) \text{rect}_{2T}(t) \xrightarrow[\mathbf{F}^{-1}]{\mathbf{F}} G(f) = -2jAT \text{sinc}(\pi f T) \sin(\pi f T).$$

18) Impulso cosinusoidale

$$g(t) = A \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \text{rect}_T(t) \xrightarrow[\mathbf{F}^{-1}]{\mathbf{F}} G(f) = \frac{AT}{2} [\text{sinc}(\pi f T - \pi/2) + \text{sinc}(\pi f T + \pi/2)].$$

19) Impulso modulato

$$g(t) = A \text{rect}_T(t) \cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow[\mathbf{F}^{-1}]{\mathbf{F}} G(f) = \frac{AT}{2} [\text{sinc}(\pi(f - f_0)T) + \text{sinc}(\pi(f + f_0)T)].$$

20) Impulso coseno rialzato

$$g(t) = A \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \right] \text{rect}_T(t) \xrightarrow[\mathbf{F}^{-1}]{\mathbf{F}} G(f) = AT \frac{\text{sinc}(\pi f T)}{1 - (fT)^2}$$

$$G(f) = AT \text{sinc}(\pi f T) + \frac{AT}{2} \text{sinc}(\pi f T - \pi) + \frac{AT}{2} \text{sinc}(\pi f T + \pi).$$