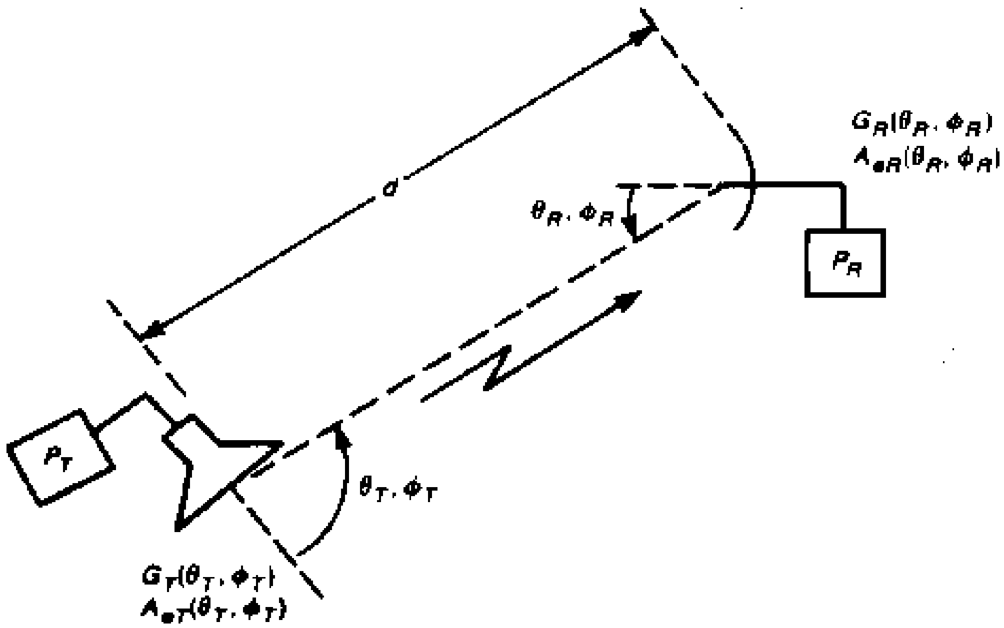
Appunti di
<u>Compatibilità Elettromagnetica</u>

EQUAZIONE DI FRIIS DELLA TRASMISSIONE

Il calcolo esatto dell'accoppiamento tra due antenne presenta generalmente una serie di difficoltà. Allora, nella pratica, questo calcolo viene eseguito in modo approssimato tramite l'ausilio dell'*equazione di Friis della trasmissione*, che andiamo ad illustrare.

Consideriamo due generiche antenne in spazio libero, come mostrato nella figura seguente:



Una antenna trasmette una potenza totale $\mathbf{P_T}$, mentre la potenza ricevuta complessivamente sull'impedenza di carico dell'altra antenna è $\mathbf{P_R}$. L'antenna trasmittente è caratterizzata, lungo la direzione (θ_T,φ_T) della trasmissione, da un *guadagno direttivo* $\mathbf{D_T(\theta_T,\varphi_T)}$ e da una *apertura efficace* $\mathbf{A_{eT}(\theta_T,\varphi_T)}$. Analogamente, l'antenna ricevente è caratterizzata, lungo la direzione (θ_R,φ_R) della trasmissione, da un guadagno direttivo $\mathbf{D_R(\theta_R,\varphi_R)}$ e da una apertura efficace $\mathbf{A_{eR}(\theta_R,\varphi_R)}$.

Sulla base di queste informazioni, possiamo fare i seguenti discorsi. In primo luogo, possiamo calcolare la *densità di potenza disponibile* in corrispondenza dell'antenna ricevente: ipotizzando che l'antenna ricevente si trovi nella regione di *campo lontano* dell'antenna trasmittente, possiamo assumere che il campo elettromagnetico sia, localmente, quello di un'*onda piana uniforme*; di conseguenza, è noto che la densità di potenza all'antenna ricevente è ottenibile come prodotto della densità di potenza di un *radiatore puntiforme isotropico* per il guadagno direttivo dell'antenna trasmittente nella direzione in cui avviene la trasmissione:

$$p_{attiva} = \frac{P_T}{4\pi d^2} D_T(\theta_T,\varphi_T)$$

Il senso di questa formula è evidente: se l'antenna trasmittente fosse un radiatore isotropico puntiforme e nell'ipotesi implicita che il mezzo sia senza perdite (come nel caso ideale del vuoto), la densità di potenza sarebbe quella delle onde sferiche, ossia appunto $\frac{P_T}{4\pi d^2}$; al contrario, dato che l'antenna trasmittente ha delle *proprietà direzionali*, queste sono tenute in conto dal guadagno direttivo, ovviamente considerato nella direzione che congiunge tale antenna con quella ricevente.

Se adesso consideriamo le caratteristiche dell'antenna ricevente, sappiamo che, per definizione, il prodotto tra la densità di potenza disponibile e l'apertura efficace corrisponde proprio alla potenza ricevuta dall'antenna: scriviamo perciò che

$$P_R = p_{attiva} \cdot A_{eR}(\theta_R, \varphi_R)$$

Naturalmente, avendo supposto che l'antenna riceva potenza solo nella direzione individuata dalla coppia di angoli (θ_R,φ_R), si è considerato il valore dell'apertura efficace solo lungo tale direzione.

Se ora combiniamo le ultime due relazioni, concludiamo che la potenza ricevuta, nella direzione congiungente l'antenna ricevente e quella trasmittente, vale

$$P_R = \frac{P_T}{4\pi d^2} D_T(\theta_T, \varphi_T) \cdot A_{eR}(\theta_R, \varphi_R)$$

Questa espressione potrebbe già andare bene per i nostri scopi. Tuttavia, in essa non appare esplicitamente la frequenza di lavoro o, in alternativa, la corrispondente lunghezza d'onda; per far comparire la lunghezza d'onda, è sufficiente allora utilizzare la nota espressione (valida per la maggior parte delle antenne) che lega l'apertura efficace dell'antenna ricevente con il suo guadagno direttivo:

$$A_{eff,max}(\theta, \varphi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} D(\theta, \varphi)$$

Come si vede, questa espressione fa riferimento al valore massimo dell'apertura efficace (detta perciò *apertura massima efficace*), il che si ottiene quando il carico dell'antenna è adattato e quando la *polarizzazione* dell'onda incidente è parallela a quella del campo prodotto dall'antenna se venisse usata in trasmissione. Facciamo allora l'ipotesi che entrambe queste condizioni siano verificate: sostituendo nell'espressione di P_R, concludiamo che tale potenza ricevuta risulta essere

$$\boxed{P_R = P_T \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 \cdot D_R(\theta_R, \varphi_R) \cdot D_T(\theta_T, \varphi_T)}$$

Questa è dunque l'**equazione di Friis della trasmissione**, scritta nella sua forma più tradizionale. Da notare che, spesso, al posto del guadagno direttivo si usa il *guadagno di potenza G*, definito nel modo seguente:

$$G(\theta, \varphi) = \frac{P_T}{P_{a\,lim}} \cdot D(\theta, \varphi)$$

dove P_T è la potenza realmente irradiata dall'antenna trasmittente e P_{alim} la potenza complessiva che le è stata inviata. Nella maggior parte delle antenne, si possono ritenere trascurabili le perdite, per cui il rapporto P_T/P_{alim} (detto *fattore di efficienza*) è unitario e quindi il guadagno di potenza coincide con quello direttivo.

Segnaliamo inoltre che, nella pratica, i guadagni delle antenne e le potenze in gioco sono espressi in dB. Allora, l'equazione di Friis in dB assume la seguente espressione:

$$(P_R)_{dB} = 10\log_{10} P_R = (P_T)_{dB} + 20\log_{10}\frac{\lambda}{4\pi d} + 10\log_{10} D_R(\theta_R,\varphi_R) + 10\log_{10} D_T(\theta_T,\varphi_T)$$

Questa espressione consente, tra le altre cose, di ricavare facilmente la cosiddetta **attenuazione in spazio libero**, ossia l'attenuazione subita dal segnale, nella sua propagazione dall'antenna trasmittente a quella ricevente, a causa solamente della divergenza sferica delle onde:

$$(\alpha_{SL})_{dB} = (P_T)_{dB} - (P_R)_{dB} = 20\log_{10}\frac{4\pi d}{\lambda} - 10\log_{10} D_R(\theta_R,\varphi_R) - 10\log_{10} D_T(\theta_T,\varphi_T)$$

Questa espressione mostra sostanzialmente due cose:

- la prima è che non è possibile eliminare, come contributo all'attenuazione, il termine $20\log_{10}\frac{4\pi d}{\lambda}$, che rappresenta sostanzialmente proprio la divergenza sferica; questo termine prende il nome di **attenuazione di tratta** (o anche *attenuazione base*): una volta fissata la distanza d tra le due antenne, esso è tanto maggiore quanto minore è la lunghezza d'onda, ossia quanto maggiore è la frequenza[1];
- la seconda è che l'attenuazione risulta tanto più ridotta quanto maggiori sono i guadagni direttivi delle due antenne nella direzione di trasmissione; si tratta di un risultato ovvio.

Un'altra espressione di notevole utilità pratica è quella che consente di calcolare l'intensità del campo elettrico trasmesso ad una certa distanza *d* dall'antenna trasmittente. Infatti, cominciamo col ricordare che, a patto di essere in zona lontana dall'antenna trasmittente, la densità di potenza dell'onda trasmessa è (localmente) quella di un'onda piana uniforme, per cui è data dalla nota espressione

$$\vec{p}_{attiva} = \frac{|\vec{E}|^2}{2\eta_0}\vec{a}_r$$

Avendo detto prima che vale anche la relazione $p_{attiva} = \frac{P_T}{4\pi d^2} D_T(\theta_T,\varphi_T)$, possiamo combinare le due per ottenere che il modulo del campo elettrico, a distanza d dalla sorgente, vale

$$|\vec{E}| = \sqrt{P_T \frac{2\eta_0}{4\pi d^2} D_T(\theta_T,\varphi_T)}$$

Ricordando che l'*impedenza caratteristica del vuoto* è $\eta_0 = 120\pi\ \Omega$, concludiamo che

$$\boxed{|\vec{E}| = \sqrt{P_T \cdot \frac{60}{d} \cdot D_T(\theta_T,\varphi_T)}}$$

[1] Queste considerazioni sembrerebbero dire che lo "spazio libero" sia un mezzo passa-basso, dato che l'attenuazione aumenta al crescere della frequenza. In realtà, è noto che non è così: l'atmosfera terrestre è infatti notoriamente un mezzo passa-banda, per cui le equazioni appena individuate valgono solo nella banda passante.

Torniamo adesso all'equazione di Friis nella sua forma generale. In base ai discorsi fatti, ci sono alcune ipotesi implicite sotto le quali vale questa equazione:

- la prima ipotesi è che si possa usare, per l'antenna ricevente, la relazione $A_{eff,max}(\theta,\varphi)=\frac{\lambda^2}{4\pi}D(\theta,\varphi)$, il che è possibile solo se l'antenna è *adattata* alla propria impedenza di carico ed alla polarizzazione dell'onda incidente; se almeno una di queste condizioni non è verificata, anche l'equazione finale non potrà essere applicata, per cui la si potrà considerare solo come un limite superiore per l'accoppiamento, ossia come il massimo accoppiamento cui potremo tendere nel nostro progetto;
- la seconda ipotesi è che entrambe le antenne si trovino nella regione di *campo lontano* dell'una rispetto all'altra, in modo da poter ritenere che il campo sia rappresentabile in termini di onda piana uniforme. Di solito, il criterio usato per la determinazione della regione di campo lontano di una antenna è il seguente: la distanza $\mathbf{d_0}$, dall'antenna in questione, alla quale si può ritenere di essere in campo lontano è il valore maggiore da scegliersi tra $\mathbf{2D^2/\lambda}$ e $\mathbf{3\lambda}$, dove λ è la massima lunghezza d'onda di lavoro e D la massima dimensione dell'antenna. Generalmente, per le antenne ad apertura si usa $2D^2/\lambda$, mentre invece per le antenne a filo si usa 3λ:
  - ∗ il valore $2D^2/\lambda$ è stato scelto in quanto garantisce che, sui bordi dell'antenna, l'onda incidente differisca, per quanto riguarda la fase rispetto a quella dell'onda piana, di non più di $\lambda/16$;
  - ∗ il valore 3λ garantisce invece che l'impedenza d'onda (pari al rapporto tra i moduli del campo elettrico e di quello magnetico) dell'onda incidente sia approssimativamente la stessa dello spazio libero ($=\eta_0$)

Esempio: accoppiamento tra due antenne a dipolo in λ/2

A titolo di chiarimento di quanto detto poco fa, calcoliamo l'accoppiamento che si realizza tra due **antenne a dipolo in λ/2**.

In primo luogo, supponiamo che le due antenne siano poste alla distanza di **1 km**, che operino alla frequenza di **150 MHz** e che siano orientati parallelamente l'uno rispetto all'altro, in modo da rendere massima la ricezione.

In secondo luogo, supponiamo che la potenza totale irradiata dall'antenna trasmittente sia di **21.36 W**. Per calcolare l'intensità del campo elettrico in corrispondenza dell'antenna ricevente, dobbiamo conoscere il guadagno direttivo dell'antenna trasmittente nella direzione di trasmissione: avendo allora supposto che l'orientamento delle due antenne sia tale da massimizzare la ricezione, dobbiamo considerare il massimo valore del guadagno direttivo, ossia la *direttività*. Per una antenna a dipolo in $\lambda/2$, la direttività è $\mathbf{D_{max}=1.64}$, per cui l'intensità del campo elettrico all'antenna ricevente è

$$E=\sqrt{P_T\cdot\frac{60}{d}\cdot D_T(\theta_T,\varphi_T)}=\sqrt{P_T\cdot\frac{60}{d}\cdot D_{T,max}}=\sqrt{21.36\cdot\frac{60}{1000}\cdot 1.64}=45.85\quad\frac{mV}{m}$$

A partire dal campo elettrico, possiamo calcolare la densità di potenza in corrispondenza dell'antenna ricevente:

$$p_{attiva}=\frac{E^2}{2\eta_0}=2.794\quad\frac{\mu W}{m^2}$$

Applicando infine la definizione di apertura efficace, possiamo calcolare la potenza ricevuta come prodotto tra l'apertura efficace appunto e la densità di potenza disponibile:

$$P_R = p_{attiva} \cdot A_{eR}(\theta_R, \varphi_R) = p_{attiva} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} D_R(\theta_R, \varphi_R) = p_{attiva} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} D_{R,max} = 2.794 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{2^2}{4\pi} \cdot 1.64 = 1.459 \ \mu W$$

dove naturalmente abbiamo tenuto conto che la lunghezza d'onda corrispondente a 150 MHz è di 2 metri ed abbiamo supposto ancora una volta che il valore del guadagno direttivo sia quello massimo.

Evidentemente, in questi passaggi abbiamo semplicemente applicato passo dopo passo i passaggi necessari ad arrivare all'equazione di Friis, che quindi poteva essere applicata direttamente. Esprimendoci, ad esempio, in dB, abbiamo quanto segue:

$$\begin{aligned}(P_R)_{dB} &= (P_T)_{dB} + 20\log_{10}\frac{\lambda}{4\pi d} + (D_{R,max})_{dB} + (D_{T,max})_{dB} = \\ &= 43.3(dBm) - 75.9(dB) + 2.15(dB) + 2.15(dB) = -28.3 \ dBm \quad (\Leftrightarrow 1.478\mu W)\end{aligned}$$

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1