Appunti di Campi elettromagnetici
Guida d’onda a piani metallici paralleli

INTRODUZIONE: LA PROPAGAZIONE PER ONDE

Si parla di **propagazione per onde** di una *perturbazione* tutte le volte che, in uno o più punti di un *mezzo*, si determina una perturbazione di qualche *caratteristica* e questa perturbazione si trasmette, con carattere *oscillatorio*, dai punti ove si è generata a zone ad essi circostanti.

La perturbazione può avere la sua sorgente in una zona approssimativamente puntiforme e si parla in questo caso di **sorgente puntiforme**, ma ci sono anche casi in cui la sorgente non può essere assimilata ad un punto, nel qual caso si parla di **sorgente estesa**. In entrambi i casi, comunque, la perturbazione si propaga intorno alla sorgente in tutte le direzioni accessibili e i punti ove essa è arrivata ad un dato istante costituiscono generalmente una superficie che prende il nome di **fronte d’onda** all’istante considerato.

In generale, la **direzione di propagazione** (detta anche “*raggio*”), in un dato punto P di un fronte d’onda, è la normale a quest’ultimo passante per P; non è detto che i raggi siano rettilinei: varia è infatti la forma che essi, e con essi i fronti d’onda, possono assumere. Il caso al quale istintivamente si pensa è quello in cui i fronti d’onda sono sfere concentriche (*onde sferiche*) e i raggi di propagazione sono perciò i raggi stessi di tali sfere, ma si tratta di un caso molto particolare. Come anche particolare è il caso in cui i fronti d’onda sono dei piani paralleli (*onde piane*), mentre i raggi sono delle rette parallele ortogonali a tali piani.

Ad ogni onda, come detto prima, è dunque associata una oscillazione: per questo motivo, spesso i due termini vengono confusi, nonostante la realtà sia in effetti che *l’onda generalmente viaggia (lungo le varie direzioni di propagazione), mentre l’oscillazione ha carattere locale, nel senso che si riferisce ai singoli punti per i quali passa l’onda.* Per esempio, nella propagazione del suono, l’onda sonora, partendo dalla sorgente, arriva, attraverso il mezzo interposto, al ricevitore (orecchio, microfono, ecc.), mentre le particelle del mezzo oscillano intorno alle loro posizioni di equilibrio.

Abbiamo poco fa parlato di *direzioni accessibili* per l’onda: il caso più generale è ovviamente quello in cui tutte le direzioni intorno alla sorgente sono possibili direzioni di propagazione e si ha allora una “*propagazione spaziale*”; tuttavia, in condizioni particolari, le possibili direzioni di propagazione possono ridursi ad una sola, come è nel caso delle *onde elastiche* nelle corde vibranti.

Lungo ogni direzione di propagazione, il movimento dell’onda può avvenire in un verso oppure in quello opposto: allora, *l’onda si dice **progressiva** se il suo movimento avviene nel verso fissato convenzionalmente come positivo, mentre si dice **regressiva** in caso contrario.* Un’onda si dice invece **permanente** se le sue caratteristiche rimangono inalterate, indefinitamente, lungo ogni raggio. D’altra parte, un’onda permanente è solo una pura astrazione, in quanto, nella pratica, l’onda è sempre **smorzata**, in conseguenza della distribuzione su fronti d’onda sempre più ampi e dell’eventuale dissipazione di una parte dell’energia che essa convoglia.

Dalla sovrapposizione di onde che si propagano lungo la stessa direzione può non risultare una propagazione ondosa: è il caso, ad esempio, delle cosiddette **onde stazionarie**.

Le onde elettromagnetiche

Una prima, grande ripartizione delle onde può essere quella tra le onde elastiche e le **onde elettromagnetiche**, che sono quelle di nostro interesse: *le “onde elettromagnetiche” sono costituite dalla propagazione, in un mezzo qualsiasi o al limite nel vuoto, di un campo elettrico e di un campo magnetico entrambi variabili nel tempo.*

Le onde elettromagnetiche si destano in un mezzo materiale (al limite nel vuoto) quando un punto o una regione del mezzo viene perturbata elettricamente, per esempio spostando ivi una carica elettrica, oppure magneticamente, per esempio variando ivi l’intensità o l’orientamento di un campo magnetico. Come è noto, ad ogni perturbazione elettrica è associata una perturbazione magnetica e viceversa, per cui *la perturbazione del mezzo, qualunque ne sia la causa, è sempre elettromagnetica, costituita cioè da un campo elettrico ed uno magnetico, variabili nel tempo.*

Chiamando **sorgente** la zona o il punto in cui avviene la perturbazione iniziale, possiamo affermare che *le onde elettromagnetiche sono perturbazioni, di carattere ondoso, dello stato elettrico e magnetico del mezzo, mediante le quali si propaga la perturbazione elettromagnetica irraggiata dalla sorgente.*

Guide d’onda

INTRODUZIONE: PROPAGAZIONE LIBERA E PROPAGAZIONE GUIDATA

La propagazione delle cosiddette **onde piane** può avvenire sostanzialmente in due modi:

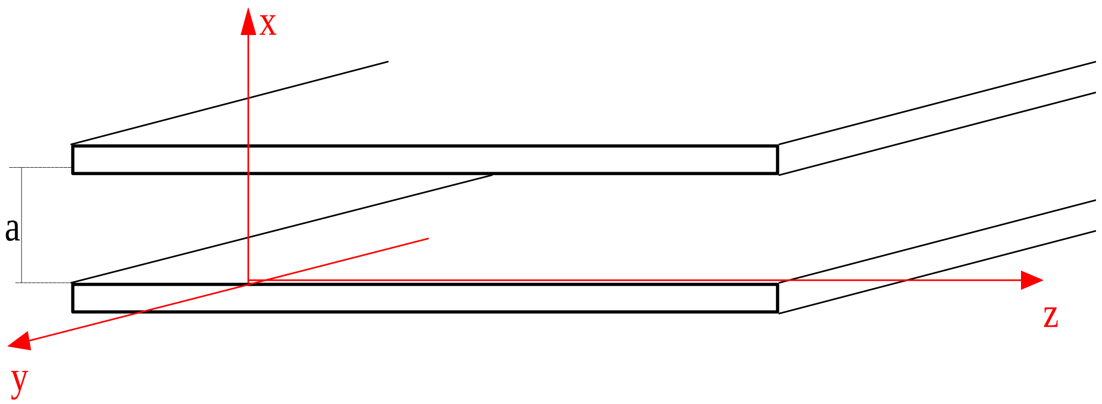
- si parla di **propagazione libera** (o anche **propagazione senza supporto fisico**) quando la propagazione avviene in punti dello spazio lontani da superfici metalliche (le cosiddette “*superfici guidanti*”): tipico caso è il collegamento tra due “*antenne*”, che avviene via etere;
- si parla invece di **propagazione guidata** (o anche “**propagazione mediante supporto fisico**”) quando la propagazione avviene per mezzo delle cosiddette “*onde guidate*”, ossia di onde che sono *guidate* lungo o su superfici conduttrici o dielettriche: esempi comuni di onde elettromagnetiche guidate sono quelle che si propagano lungo le “*linee bifilari*” o lungo i “*cavi coassiali*”, oppure le onde che si propagano nelle “*guide d’onda*” o anche le onde che si propagano lungo la superficie di discontinuità tra la crosta terrestre e l’aria, da un radio-trasmettitore al punto di ricezione.

GUIDA D'ONDA A PIANI METALLICI PARALLELI

Vogliamo adesso intraprendere, a titolo di esempio, lo studio di una semplice struttura che può essere utilizzata per la **propagazione di onde guidate**. Questa struttura è costituita da due piani paralleli, posti a distanza *a* uno dall'altro, sui quali facciamo le seguenti ipotesi:

- in primo luogo, supponiamo che i due piani siano perfettamente conduttori, il che significa che la loro conducibilità elettrica è $\sigma=\infty$;
- in secondo luogo, supponiamo che i piani abbiano estensione infinita;
- in terzo luogo, supponiamo che i due piani siano separati da un dielettrico perfetto, avente costante dielettrica ε, conducibilità $\sigma=0$ e permettività $\mu=\mu_0$ pari a quella del vuoto.

La schematizzazione grafica è la seguente:



Il nostro obbiettivo è quello di determinare la configurazione del campo elettro-magnetico tra i due piani conduttori: questa determinazione passa ovviamente per la soluzione delle equazioni di Maxwell soggette alle opportune condizioni al contorno.

Il primo passo consiste nel fissare in modo opportuno il sistema di riferimento. La scelta del riferimento va sempre effettuata sulla base delle simmetrie presentate dal problema: nel nostro caso, il riferimento più conveniente è senz'altro quello cartesiano e lo prendiamo con gli assi disposti come nella figura precedente, ossia con l'asse x ortogonale ai piani e con l'asse z disposta parallelamente ai piani (la disposizione dell'asse y viene di conseguenza, visto che la terna deve essere destrogira).

Il secondo passo consiste nello scrivere le equazioni di Maxwell (in regime sinusoidale[1]) in accordo al problema che si sta esaminando. In generale, le due equazioni che ci interessano sono

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H}$$
$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{J}_0 + \sigma\vec{E} + \rho\vec{v}$$

Ricordiamo che le quantità vettoriali presenti in queste equazioni sono in realtà anche dei fasori, per cui si tratta di vettori dotati di un modulo e di una fase. Quando troveremo le espressioni

[1] Facciamo cioè l'ipotesi che la sorgente che determina l'instaurarsi di un campo elettromagnetico variabile sia di tipo sinusoidale e, inoltre, che sia trascorso un tempo sufficiente per ritenere esauriti tutti gli eventuali fenomeni transitori. Queste ipotesi, ci consentono di ritenere che si sia instaurato un **regime sinusoidale permanente** e quindi ci consentono di lavorare direttamente nel **dominio dei fasori**.

esplicite di tali fasori/vettori, potremo passare nel dominio dei tempi (che è quello di nostro interesse in quanto è quello fisico) tramite le note formule di antitrasformazione[2].

Dobbiamo allora "adattare" queste equazioni al problema in esame. A questo proposito, la prima considerazione da fare è la seguente: le guide d'onda devono necessariamente essere alimentate, in qualche parte, da una **sonda** o da una **antenna**; tuttavia, lo studio della propagazione guidata va effettuato ben lontano dalla sorgente, il che significa che, nella seconda equazione, possiamo porre $\vec{J}_0 = 0$.

In secondo luogo, dato che dobbiamo risolvere le equazioni nello spazio compreso tra i due piani e avendo supposto che tale spazio sia occupato da un isolante perfetto (cioè σ=0), possiamo senz'altro porre $\sigma\vec{E} = 0$ e ovviamente anche $\rho\vec{v} = 0$, dato che non ci possono essere cariche libere all'interno del dielettrico.

Possiamo dunque concludere dicendo che le equazioni da risolvere sono

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H}$$
$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}$$

Si osserva immediatamente che queste due equazioni sono formalmente identiche tra di loro: è opportuno però sottolineare che, in generale, esse ammettono soluzioni diverse (cioè il campo elettrico $\vec{E}(x,y,z)$ ed il campo magnetico $\vec{H}(x,y,z)$ hanno espressioni diverse) in conseguenza del fatto che cambiano le condizioni al contorno relative ai due campi.

Per risolvere quelle due equazioni, abbiamo prima necessità di scomporle nelle corrispondenti terne di equazioni scalari corrispondenti al sistema di riferimento considerato: dato che stiamo usando un riferimento cartesiano, abbiamo che

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_X & \vec{a}_Y & \vec{a}_Z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_X & E_Y & E_Z \end{vmatrix} = -j\omega\mu_0 \begin{bmatrix} H_X \\ H_Y \\ H_Z \end{bmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} \vec{a}_X & \vec{a}_Y & \vec{a}_Z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_X & H_Y & H_Z \end{vmatrix} = j\omega\varepsilon \begin{bmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{bmatrix}$$

Prima ancora di scrivere le 6 equazioni scalari corrispondenti a queste due relazioni matriciali, è opportuno provare a semplificare il problema sulla base delle simmetrie presentate dal problema in esame. Il discorso da fare è il seguente: in generale, una volta trovato il modo di risolvere le equazioni di Maxwell, noi perverremo a delle espressioni $\vec{E}(x,y,z)$ e $\vec{H}(x,y,z)$ rispettivamente del campo elettrico e del campo magnetico; questi campi, sempre in linea generale, dipenderanno dalle tre coordinate spaziali e dal tempo; in particolare, la dipendenza dal tempo sappiamo già che è di tipo esponenziale, per cui avremo qualcosa del tipo

[2] Ricordiamo che tali formule di antitrasformazione comportano semplicemente che le quantità ottenute (i fasori associati ai campi) vengano moltiplicate per il termine esponenziale $e^{j\omega t}$ e che poi si calcoli la parte reale dei prodotti così ottenuti. questa antitrasformazione ci fornirà le variazioni spaziali e temporali dei campi nella guida.

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}(x,y,z)e^{j\omega t} \longrightarrow \vec{e}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{E}(x,y,z)e^{j\omega t}\right\}$$
$$\vec{H}(x,y,z,t) = \vec{H}(x,y,z)e^{j\omega t} \longrightarrow \vec{h}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{H}(x,y,z)e^{j\omega t}\right\}$$

dove, ovviamente, le funzioni $\vec{E}(x,y,z)$ e $\vec{H}(x,y,z)$ sono quelle che noi effettivamente ricaviamo dalla soluzione delle equazioni di Maxwell. Allora, è opportuno chiedersi se il problema in esame presenti delle simmetrie particolari, nel senso che è possibile che il campo elettrico ed il campo magnetico non dipendano da una o più direzioni del riferimento prescelto. Nel caso che stiamo considerando, per esempio, è evidente che la simmetria impone che i due campi non abbiano dipendenza dalla direzione y, il che significa che

$$\frac{\partial}{\partial y}[\ \ ] = 0$$

e quindi anche che le espressioni dei due campi saranno del tipo

$$\vec{E}(x,z,t) = \vec{E}(x,z)e^{j\omega t}$$
$$\vec{H}(x,z,t) = \vec{H}(x,z)e^{j\omega t}$$

Imponendo allora la condizione $\frac{\partial}{\partial y}[\ \ ] = 0$, le equazioni matriciali scritte prima si modificano nel modo seguente:

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_X & \vec{a}_Y & \vec{a}_Z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_X & E_Y & E_Z \end{vmatrix} = -j\omega\mu_0 \begin{bmatrix} H_X \\ H_Y \\ H_Z \end{bmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} \vec{a}_X & \vec{a}_Y & \vec{a}_Z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_X & H_Y & H_Z \end{vmatrix} = j\omega\varepsilon \begin{bmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{bmatrix}$$

A questo punto, possiamo andare a scrivere le 6 equazioni differenziali scalari che dobbiamo risolvere:

$$\begin{cases} -\frac{\partial E_Y}{\partial z} = -j\omega\mu_0 H_X \\ \frac{\partial E_X}{\partial z} - \frac{\partial E_Z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_Y \\ \frac{\partial E_Y}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_Z \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{\partial H_Y}{\partial z} = j\omega\varepsilon E_X \\ \frac{\partial H_X}{\partial z} - \frac{\partial H_Z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_Y \\ \frac{\partial H_Y}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_Z \end{cases}$$

Un altro artificio che si usa sempre nella soluzione delle equazioni di Maxwell è il seguente: abbiamo appena detto che, come soluzione di queste equazioni, ci aspettiamo delle funzioni del tipo $\vec{E}(x,z)$ e $\vec{H}(x,z)$. Ci chiediamo allora se esiste una soluzione di queste equazioni (cioè una soluzione del campo elettro-magnetico) che sia del tipo

$$\vec{E}(x)e^{j\beta z}$$
$$\vec{H}(x)e^{j\beta z}$$

dove β è una costante reale (di cui parleremo tra un attimo). Naturalmente, richiedere che la dipendenza dalla direzione z sia del tipo $e^{j\beta z}$ equivale a richiedere, in base ad una nota proprietà dei fasori, che risulti

$$\frac{\partial}{\partial z}[\ ] = j\beta[\ ]$$

per cui le 6 equazioni scalari assumono ora la forma

$$\begin{cases} -j\beta E_Y = -j\omega\mu_0 H_X \\ j\beta E_X - \frac{\partial E_Z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_Y \\ \frac{\partial E_Y}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_Z \end{cases} \qquad \begin{cases} -j\beta H_Y = j\omega\varepsilon E_X \\ j\beta H_X - \frac{\partial H_Z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_Y \\ \frac{\partial H_Y}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_Z \end{cases}$$

Si osserva, a questo punto, che abbiamo a che fare con un sistema di 6 equazioni (alcune differenziali ed altre algebriche) in 7 incognite, rappresentate dalle componenti dei 2 campi e dalla costante β. Su questa costante β possiamo fare alcune considerazioni:

- in primo luogo, il fatto di ritenere che la dipendenza dalla direzione z sia del tipo $e^{j\beta z}$, con β costante reale, contiene in sé l'ipotesi implicita di trascurare le perdite che si possono avere all'interno del mezzo dielettrico; se, al contrario, volessimo considerare anche le perdite, dovremmo ipotizzare una dipendenza da z più complessa, ad esempio del tipo

$$e^{\gamma z} = e^{(\alpha + j\beta)z} = e^{\alpha z}e^{j\beta z}$$

  dove γ è la cosiddetta **costante di propagazione** del fenomeno che si propaga, dove α (cioè la parte reale di γ) è la cosiddetta **costante di attenuazione** (che tiene conto proprio delle perdite, visto che il termine $e^{\alpha z}$, con α reale e negativo, rappresenta un'onda che si smorza lungo z) e dove β (cioè il coefficiente della parte immaginaria di γ) rappresenta la cosiddetta **costante di fase**;

- in secondo luogo, vedremo che il valore di β si determina sulla base delle condizioni al contorno del problema: ciò significa che, *fin quando non consideriamo tali condizioni al contorno, il nostro problema non ammette soluzione unica (visto che le incognite sono in numero maggiore delle equazioni), mentre tale soluzione diventa unica nel momento in cui andiamo a considerare le condizioni al contorno.*

A questo punto, dobbiamo risolvere il sistema rappresentato dalle 6 equazioni scalari. Potremmo procedere per via del tutto generale, ma è opportuno, ancora una volta, provare a semplificare ulteriormente il problema, chiedendosi se esistono delle soluzioni particolarmente semplici. Il discorso che si può fare è il seguente: nel caso più generale possibile, sia il campo elettrico sia il campo magnetico presenteranno una componente longitudinale (cioè, rispettivamente, E_Z ed H_Z) non nulla; tuttavia, al fine di semplificarci i calcoli, possiamo spezzare il problema in tre parti:

1) il primo caso che prendiamo in esame è quello dei cosiddetti **modi TE** (dove TE sta per "*Trasverse Electric*"): si suppone che sia $E_Z = 0$ ed $H_Z \neq 0$, il che corrisponde a dire che il campo elettrico totale $\vec{E}$ giace tutto nel piano ortogonale alla direzione di propagazione (asse z);

2) il secondo caso è, invece, quello dei cosiddetti **modi TM** (dove TM sta per "*Trasverse Magnetic*"): si suppone questa volta che sia $E_Z \neq 0$ ed $H_Z = 0$, il che corrisponde a dire che è il campo magnetico totale $\vec{H}$ a trovarsi tutto nel piano ortogonale alla direzione di propagazione (asse z);

3) infine, l'ultimo caso è quello dei cosiddetti **modi TEM** (dove TEM sta chiaramente per "*Trasverse Electric Magnetic*"): si suppone che sia $E_Z = 0$ ed $H_Z = 0$, ossia che entrambi i campi totali siano tutti nel piano ortogonale alla direzione di propagazione (asse z).

Una volta verificata l'esistenza di queste tre soluzioni particolari, la soluzione effettiva delle equazioni di Maxwell sarà semplicemente una combinazione lineare di tali soluzioni, visto che la linearità delle equazioni di Maxwell consente l'applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti.

Onde Elettriche Trasverse (TE)

Come primo caso, verifichiamo dunque se possa esistere una soluzione delle equazioni

$$\begin{cases} -j\beta E_Y = -j\omega\mu_0 H_X \\ j\beta E_X - \dfrac{\partial E_Z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_Y \\ \dfrac{\partial E_Y}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_Z \end{cases} \qquad \begin{cases} -j\beta H_Y = j\omega\varepsilon E_X \\ j\beta H_X - \dfrac{\partial H_Z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_Y \\ \dfrac{\partial H_Y}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_Z \end{cases}$$

che abbia $\boxed{E_Z = 0}$: dalla terza equazione sul campo magnetico, osserviamo che $E_Z=0$ implica che $\dfrac{\partial H_Y}{\partial x} = 0$ (cioè che H_Y non abbia dipendenza dalla direzione x). Possiamo allora provare ad imporre che sia anche $H_Y=0$: questo implica, in base alla prima equazione sul campo magnetico, che risulti anche $E_X=0$. D'altra parte, in base alla seconda equazione sul campo elettrico, prendere $E_Z = 0 = E_X$ equivale a prendere $H_Y=0$ e questo era stato previsto.

Deduciamo che una soluzione con $E_Z = E_X = H_Y = 0$ ha senso fisico, per cui non resta che ricavare le altre tre componenti.

Imponendo la triplice condizione $E_Z = E_X = H_Y = 0$, le equazioni che rimangono da risolvere sono

$$\begin{cases} -j\beta E_Y = -j\omega\mu_0 H_X \\ \dfrac{\partial E_Y}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_Z \\ j\beta H_X - \dfrac{\partial H_Z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_Y \end{cases}$$

Scritte in forma più opportuna, esse corrispondono a

$$\begin{cases} H_X = \dfrac{\beta}{\omega\mu_0} E_Y \\ \dfrac{\partial E_Y}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_Z \\ \dfrac{\partial H_Z}{\partial x} = j\left(\dfrac{\beta^2}{\omega\mu_0} - \omega\varepsilon\right) E_Y \end{cases}$$

E' evidente che possiamo combinare la seconda e la terza equazione in modo da ricondurci ad una sola equazione del 2° ordine per esempio in E_Y: con semplici passaggi otteniamo che $H_Z = \dfrac{j}{\omega\mu_0}\dfrac{\partial E_Y}{\partial x}$ e quindi l'equazione da risolvere è

$$\frac{\partial^2 E_Y}{\partial x^2} = \left(\beta^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon\right) E_Y$$

Per comodità, poniamo

$$\begin{aligned} k^2 &= \omega^2\mu_0\varepsilon \\ h^2 &= -\left(\beta^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon\right) = -\left(\beta^2 - k^2\right) \end{aligned}$$

Con questa posizione, l'equazione diventa

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_Y}{\partial x^2} + h^2 E_Y = 0}$$

Questa equazione prende il nome di **equazione delle onde di Helmotz, in forma ridotta, agli autovalori**: si parla di "*forma ridotta*" in quanto la forma completa dell'equazione di Helmotz è quella vettoriale che si ottiene sostituendo $\vec{E}$ al posto di E_Y; il motivo per cui si parla di equazione "*agli autovalori*" sarà invece più chiaro tra poco.

Quella equazione ammette una soluzione univoca solo a patto di conoscere il valore di β, ossia solo a patto di conoscere le condizioni al contorno: tale soluzione ha espressione

$$E_Y(x) = Ae^{-jhx} + Be^{+jhx}$$

N.B. E' chiaro che la soluzione completa di quella equazione deve tener conto della dipendenza da z e della dipendenza dal tempo, per cui si tratterà della funzione

$$E_Y(x,z,t) = E_Y(x)e^{j\beta z}e^{j\omega t} = \left(Ae^{-jhx} + Be^{+jhx}\right)e^{j\beta z}e^{j\omega t}$$

Antitrasformando questa quantità, si ottiene il reale andamento spaziale e temporale del campo elettrico lungo la direzione y.

A questo punto, possiamo fare altre considerazioni a proposito della costante di fase β; tali considerazioni riguardano il valore assunto dal termine $h^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon - \beta^2$ al variare di β nell'intervallo [0,+∞[:

- la prima possibilità è che β assuma un valore tale che $\omega^2\mu_0\varepsilon > \beta^2$: in questo caso, il termine h^2 risulta positivo, per cui h risulta essere reale (positivo) e quindi l'espressione di $E_Y(x)$, usando le formule di Eulero, può anche essere espressa nella forma

$$E_Y(x) = A_1 \sin(hx) + B_1 \cos(hx)$$

  E' facile accorgersi (basta passare nel dominio del tempo) che questa soluzione rappresenta un' *onda progressiva* che si propaga (lungo, ovviamente, la direzione z) senza alcuna attenuazione (il che deriva dall'ipotesi che sia i piani conduttori sia il dielettrico sono privi di perdite):

$$\begin{aligned} e_Y(x,t) &= \mathrm{Re}\{E_Y(x)e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{A_1 \sin(hx)e^{j\omega t} + B_1\cos(hx)e^{j\omega t}\} = \\ &= \sin(hx)\,\mathrm{Re}\{A_1 e^{j\omega t}\} + \cos(hx)\,\mathrm{Re}\{B_1 e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{A_1\}\cdot\sin(hx)\cos(\omega t) + \mathrm{Re}\{B_1\}\cdot\cos(hx)\cos(\omega t) \end{aligned}$$

- la seconda possibilità è che β assuma un valore tale che $\omega^2\mu_0\varepsilon < \beta^2$: in questo caso, il termine h^2 risulta negativo, per cui h risulta essere complesso e quindi l'espressione di $E_Y(x)$, usando sempre le formule di Eulero, può anche essere espressa nella forma

$$E_Y(x) = A_2 \sinh(hx) + B_2 \cosh(hx)$$

  Questa soluzione, data la presenza delle funzioni iperboliche, non rappresenta più un'onda progressiva che si propaga senza alcuna attenuazione, bensì un'onda che si smorza esponenzialmente (sempre lungo z);

- la situazione intermedia è quella in cui β è tale che $\omega^2\mu_0\varepsilon = \beta^2$: in questo caso, risulta $h = 0$ e si parla di **regione di taglio** o **regione di CUT-OFF**, per indicare il fatto che, per valori ancora più grandi di β si ha lo smorzamento dell'onda, mentre, per valori più piccoli, si ha la propagazione dell'onda stessa.

E' chiaro che a noi interessano solo le soluzioni sinusoidali del tipo

$$E_Y(x) = A_1 \sin(hx) + B_1 \cos(hx)$$

per cui <u>facciamo per il momento l'ipotesi che il valore di β sia tale da dare una soluzione di questo tipo</u> (cioè sia tale che $\boxed{\omega^2\mu_0\varepsilon > \beta^2}$).

Restano da determinare i valori di A_1 ed A_2 in base alle <u>condizioni al contorno</u>. Tali condizioni al contorno sono chiaramente rappresentate dai valori che il campo assume in corrispondenza dei "*contorni*", ossia delle <u>superfici di discontinuità</u>. Nell'esempio che stiamo analizzando, tali contorni sono rappresentati dalle superfici dei due piani conduttori, in corrispondenza delle quali (cioè in corrispondenza di x=0 e x=a) sappiamo che il campo elettrico tangenziale deve risultare nullo. D'altra parte, il campo elettrico tangenziale è proprio E_Y, per cui le condizioni al contorno da imporre sono

$$E_Y(0) = 0 \qquad \text{(piano inferiore)}$$
$$E_Y(a) = 0 \qquad \text{(piano superiore)}$$

Imponendo la prima condizione, si trova chiaramente che B_1=0, per cui l'espressione del campo si riduce semplicemente a

$$E_Y(x) = A_1 \sin(hx)$$

Imponendo poi la seconda condizione, si ottiene $A_1 \sin(ha) = 0$ e questa uguaglianza è verificata sia quando A_1=0 sia quando $\sin(ha) = 0$: ovviamente, la soluzione A_1=0 non è di interesse pratico, per cui deve essere $\sin(ha) = 0$, ossia

$$ha = m\pi \qquad m = 0,1,2,\ldots,\infty$$

Abbiamo dunque ricavato, imponendo le condizioni al contorno, che

$$h = \frac{m\pi}{a} \qquad m = 0,1,2,\ldots,\infty$$

Considerando che $h^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon - \beta^2$, possiamo dunque scrivere che

$$\boxed{\beta = \pm\sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \qquad m = 0,1,2,\ldots,\infty}$$

N.B. L'equazione $\sin(ha) = 0$ prende il nome di **equazione agli autovalori** proprio per il fatto di fornire il valore del parametro h (e quindi di β) che era incognito.

In altre parole, come anticipato in precedenza, proprio in base alle condizioni al contorno siamo riusciti a determinare il valore della costante di fase β. Si osserva, però, che *b assume valori diversi a seconda del valore assunto dal nuovo parametro indicato con* m*.* In particolare, si ripropone ancora una volta il problema dello smorzamento dell'onda:

- quando m è tale che $\omega^2 \mu_0 \varepsilon > \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$, l'argomento della radice è positivo, per cui β è un numero reale e quindi abbiamo <u>propagazione senza attenuazione</u> (visto che comunque risulta $\omega^2 \mu_0 \varepsilon > \beta^2$);

- quando m è tale che $\omega^2 \mu_0 \varepsilon < \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$, l'argomento della radice diventa negativo, per cui β è un numero complesso e quindi abbiamo <u>smorzamento</u>;

- quando, infine, m è tale che $\omega^2 \mu_0 \varepsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$, risulta β=0 e quindi $h^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon$: in questo caso abbiamo ancora propagazione senza attenuazione, ma la situazione è ancora una volta quella della **regione di CUT-OFF**, visto che per valori maggiori di m si ha lo smorzamento, mentre per valori minori si ha la propagazione senza attenuazione.

Osservazione: guide d'onda come filtri delle frequenze minori

Sempre a proposito del problema della propagazione con o senza attenuazione, si osserva che la costante di fase dipende, tra le altre cose, anche dalla pulsazione angolare ω. Allora, fissato il valore di m e indicato con ω_C (**pulsazione critica**) il valore di tale pulsazione tale che

$$\omega_C^2\mu_0\varepsilon-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2=0\longleftrightarrow\beta=0\longleftrightarrow\text{ CUT OFF}$$

possiamo affermare quanto segue: <u>quando $\omega>\omega_C$, β risulta reale, per cui c'è propagazione senza attenuazione; quando, invece ω scende al di sotto di ω_C, β diventa complesso e c'è quindi propagazione con attenuazione</u>.

In generale, dunque, diciamo che, *per ciascun valore di m, esiste un valore della pulsazione critica ω_{Cm} al di sotto della quale l'onda non può propagarsi.*

Quando la pulsazione ω è al di sopra del valore critico, β è reale ed assume valori compresi tra 0 (che si ha quando $\omega=\omega_{Cm}$) ed ∞ (che si ha quando anche ω tende all'∞). In questo senso, la guida d'onda si comporta come un **filtro**, visto che lascia passare solo alcune frequenze, che poi sono quelle più elevate (per cui potremmo parlare di "filtro passa-alto").

Riepilogando, abbiamo trovato che la componente y del campo elettrico ha espressione

$$E_{Y,m}(x)=A_1\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$$

e questa prende il nome di **autofunzione**. A questa autofunzione vanno aggiunte, ovviamente, la dipendenza dal tempo e quella dalla coordinata z: l'espressione completa è dunque

$$\boxed{E_{Y.m}(x,z,t)=A_1\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)e^{j\beta z}e^{j\omega t}}$$

Antitrasformando, otteniamo la corrispondente espressione del campo $e_{Y,m}$ nel dominio del tempo.

I valori del parametro m caratterizzano una particolare configurazione del campo che prende il nome di "**modo**":

$$TE_1\xrightarrow{m=1}E_{Y,1}(x,z,t)=A_1\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{j\beta z}e^{j\omega t}$$

$$TE_2\xrightarrow{m=2}E_{Y,2}(x,z,t)=A_1\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)e^{j\beta z}e^{j\omega t}$$

....

La combinazione lineare di tutti questi modi (anzi, più precisamente, di quelli che si ottengono per valori di m tali che la costante di fase β risulti reale) fornisce l’espressione completa del campo elettrico lungo la direzione y:

$$\boxed{E_Y(x,z,t) = \left[A_1 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + A_3 \sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right) + ...\right] e^{j\beta z} e^{j\omega t}}$$

Il modo TE di ordine più basso è quello corrispondente ad m=1 (**TE$_1$**) ed è chiaramente quello cui corrisponde il valore massimo della costante di fase β: si tratta del cosiddetto **modo TE fondamentale**. Come detto, il numero di modi che a noi interessano è determinato dal massimo valore di m in corrispondenza del quale β risulta reale.

Inoltre, in base alle considerazioni fatte prima, è evidente che ciascun modo (individuato dal corrispondente valore di m) non può propagarsi a qualsiasi frequenza, ma solo se la frequenza è superiore al valore critico. Quindi, in ciascuna guida avremo la propagazione di un certo numero di modi a seconda del valore della frequenza di lavoro rispetto alla frequenza critica.

L’ultima considerazione da fare, prima di andare oltre, riguarda la presenza delle costanti A_1,A_2,A_3,..., che sono ancora indeterminate: è possibile far vedere che i valori di tali costanti possono essere determinati facendo riferimento alla potenza erogata per alimentare la guida d’onda ed è un aspetto del quale non ci occupiamo.

A questo punto, una volta fatte tutte queste considerazioni, possiamo tornare al problema di partenza, che era quello di determinare, oltre ad E_Y, anche le componenti H_X ed H_Z. A questo scopo, basta utilizzare le relazioni

$$\begin{cases} H_X = \dfrac{\beta}{\omega\mu_0} E_Y \\ \dfrac{\partial E_Y}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_Z \end{cases}$$

Sostituendo l’espressione di E_Y, abbiamo quanto segue:

$$H_X(x,z,t) = \frac{\beta}{\omega\mu_0}\left[A_1 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + A_3 \sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right) + ...\right] e^{j\beta z} e^{j\omega t}$$

$$H_Z(x,z,t) = \frac{j}{\omega\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}\left[A_1 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + A_3 \sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right) + ...\right] e^{j\beta z} e^{j\omega t}$$

Una osservazione importante, prima di proseguire, è la seguente: quando abbiamo imposto le condizioni al contorno, abbiamo trovato che, almeno a livello analitico, il parametro m può assumere tutti i valori interi compresi tra 0 ed ∞. In effetti, però, il valore m=0 non ha senso fisico, in quanto, se m=0, il corrispondente modo (cioè il TE$_0$) sarebbe caratterizzato da $E_Y = H_Z = H_X = 0$ e si tratterebbe perciò di una soluzione di nessun interesse. Ecco perché, nel caso dei modi TE, quello di ordine più basso è il TE$_1$, che si ottiene per m=1. Vedremo invece tra poco che, per i modi TM, il modo di ordine più basso è il TM$_0$, in conseguenza del fatto che la soluzione per m=0 ha questa volta senso fisico.

Onde magnetiche trasverse

Nel paragrafo precedente abbiamo ricercato, come soluzioni delle equazioni delle onde, delle funzioni $\vec{E}$ ed $\vec{H}$ caratterizzate dal fatto di avere $E_Z = 0$, ossia dal fatto di presentare nulla la componente del campo elettrico nella direzione di propagazione. Adesso vediamo l'altra possibilità, ossia ricerchiamo delle soluzioni caratterizzate dal fatto di avere $H_Z = 0$, ossia dal fatto di presentare nulla la componente del campo magnetico nella direzione di propagazione: se esistono, tali soluzioni prendono il nome di **onde magnetiche trasverse** (brevemente **TM**).

Le equazioni da cui partire sono ancora una volta

$$\begin{cases} -j\beta E_Y = -j\omega\mu_0 H_X \\ j\beta E_X - \dfrac{\partial E_Z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_Y \\ \dfrac{\partial E_Y}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_Z \end{cases} \qquad \begin{cases} -j\beta H_Y = j\omega\varepsilon E_X \\ j\beta H_X - \dfrac{\partial H_Z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_Y \\ \dfrac{\partial H_Y}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_Z \end{cases}$$

Imponiamo che risulti $\boxed{H_Z = 0}$: dalla terza equazione sul campo elettrico, questa condizione implica che $\dfrac{\partial E_Y}{\partial x} = 0$ (cioè che E_Y non abbia dipendenza dalla direzione x). Imponiamo allora che sia anche $E_Y=0$: questo implica, in base alla prima equazione sul campo elettrico, che risulti anche $H_X=0$. D'altra parte, in base alla seconda equazione sul campo magnetico, prendere $H_Z = 0 = H_X$ equivale a prendere $E_Y=0$ e questo era stato previsto. Deduciamo che una soluzione con $H_Z = H_X = E_Y = 0$ ha senso fisico, per cui non resta che ricavare le altre tre componenti.

Imponendo la triplice condizione $H_Z = H_X = E_Y = 0$, le equazioni che rimangono da risolvere sono

$$\begin{cases} j\beta E_X - \dfrac{\partial E_Z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_Y \\ -j\beta H_Y = j\omega\varepsilon E_X \\ \dfrac{\partial H_Y}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_Z \end{cases}$$

Scritte in forma più opportuna, esse corrispondono a

$$\begin{cases} E_X = -\dfrac{\beta}{\omega\varepsilon} H_Y \\ \dfrac{\partial E_Z}{\partial x} = j\left(\omega\mu_0 - \dfrac{\beta^2}{\omega\varepsilon}\right) H_Y \\ \dfrac{\partial H_Y}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_Z \end{cases}$$

Confrontando queste equazioni con quelle ottenute nel paragrafo precedente a proposito delle componenti H_X, E_Y ed H_Z, è evidente che le equazioni sono formalmente identiche. Come formalmente identico è il modo di procedere: possiamo infatti facilmente combinare la seconda e la terza equazione in modo da ricondurci ad una sola equazione del 2° ordine in H_Y, ossia l'equazione

$$\frac{\partial^2 H_Y}{\partial x^2} = \left(\beta^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon\right) H_Y$$

Ponendo ancora una volta

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon$$
$$h^2 = -\left(\beta^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon\right) = -\left(\beta^2 - k^2\right)$$

otteniamo ancora una volta l'equazione

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_Y}{\partial x^2} + h^2 H_Y = 0}$$

Questa equazione è identica a quella ottenuta per E_Y nel caso dei modi TM, per cui è possibile ripetere le stesse identiche considerazioni fatte in quel caso: la soluzione generale dell'equazione è del tipo

$$H_Y(x) = Ae^{-jhx} + Be^{+jhx}$$

ed è ovviamente univoca solo a patto di conoscere le condizioni al contorno. E' anche opportuno sottolineare come *proprio queste condizioni al contorno facciano sì che questa soluzione, pur essendo formalmente identica a quella ottenuta per $E_Y(x)$ nel caso dei modi TE, in effetti risulti diversa da quell'altra:* è chiaro, infatti, che le condizioni al contorno per il campo magnetico sono diverse da quelle per il campo elettrico.

Se facciamo la solita ipotesi per cui $\omega^2 \mu_0 \varepsilon > \beta^2$ (il che equivale ad imporre che il parametro h sia reale positivo), quella soluzione si può scrivere nella forma

$$H_Y(x) = A_1 \sin(hx) + B_1 \cos(hx)$$

Dobbiamo determinare i valori di A_1 ed A_2 in base alle condizioni al contorno. Non è però conveniente imporre tali condizioni al contorno direttamente su H_Y, in quanto sappiamo che, in generale, la componente tangenziale del campo magnetico non è nulla sulla superficie di un conduttore. E' preferibile, invece, andare a ricavare la componente E_Z ed imporre su di essa le condizioni al contorno.

Per ricavare E_Z, basta considerare che sussiste la relazione $\frac{\partial H_Y}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_Z$, mediante la quale ricaviamo quindi che

$$E_Z = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{\partial H_Y}{\partial x} = \frac{h}{j\omega\varepsilon} A_1 \cos(hx) - \frac{h}{j\omega\varepsilon} B_1 \sin(hx)$$

Le condizioni al contorno sono sempre

$$E_Z(0) = 0 \qquad \text{(piano inferiore)}$$
$$E_Z(a) = 0 \qquad \text{(piano superiore)}$$

per cui, con discorso analogo a quello fatto per i modi TE, è immediato verificare che essere corrispondono

$$A_1 = 0$$
$$h = \frac{m\pi}{a} \qquad m = 0,1,2,\dots,\infty$$

Con queste condizioni, ricaviamo che l'andamento di E_Z è dato dalla funzione

$$E_Z(x) = -\frac{m\pi}{j\omega\varepsilon a} B_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$$

L'espressione completa di tale componente deve ovviamente tener conto anche della dipendenza dalla coordinata z e dal tempo, per cui si tratta della funzione

$$E_Z(x,z,t) = -\frac{m\pi}{j\omega\varepsilon a} B_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{j\beta z} e^{j\omega t}$$

Nota questa componente, possiamo andare a ricavare anche le componenti E_X ed H_Y per i modi TM:

$$\begin{cases} H_Y(x,z,t) = B_1 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{j\beta z} e^{j\omega t} \\ E_X(x,z,t) = -\frac{\beta}{\omega\varepsilon} H_Y = -\frac{\beta}{\omega\varepsilon} B_1 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{j\beta z} e^{j\omega t} \end{cases}$$

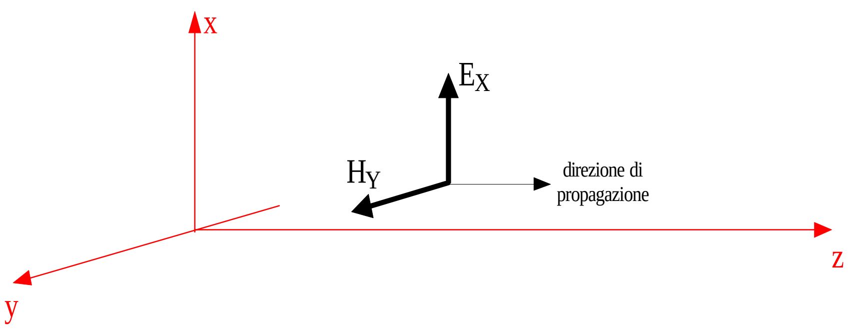
Così come nel caso dei modi TE, al variare di m abbiamo tutti i possibili modi TM:

$$\begin{cases} E_Z(x,z,t) = -\frac{\pi}{j\omega\varepsilon a} B_1 \left[\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + 2\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + 3\sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right) + \dots\right] e^{j\beta z} e^{j\omega t} \\ H_Y(x,z,t) = B_1 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{a}x\right) + \dots\right] e^{j\beta z} e^{j\omega t} \\ E_X(x,z,t) = -\frac{\beta}{\omega\varepsilon} B_1 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{a}x\right) + \dots\right] e^{j\beta z} e^{j\omega t} \end{cases}$$

Si osserva però una differenza fondamentale con i modi TE, visto che, come preannunciato in precedenza, per i modi TM il modo di ordine più basso è il modo **TM_0**, caratterizzato dal valore m=0:

$$TM_0 \begin{cases} E_Z(x,z,t) = 0 \\ H_Y(x,z,t) = B_1 e^{j\beta z} e^{j\omega t} \\ E_X(x,z,t) = -\frac{\beta}{\omega\varepsilon} B_1 e^{j\beta z} e^{j\omega t} \end{cases}$$

Come si osserva da queste espressioni, <u>il modo TM_0 è una soluzione fisica di interesse</u>, visto che non presenta tutte le componenti del campo identicamente nulle: *la particolarità di tale modo è quella per cui <u>il campo magnetico è interamente diretto lungo y, mentre il campo elettrico è interamente diretto lungo x</u>, il che significa che il campo elettromagnetico giace nel piano* *perpendicolare all'asse di propagazione* (si parla, perciò, di "*campo completamente trasverso*"):



Questo tipo di onda prende il nome di **modo trasverso elettromagnetico** (brevemente "**modo TEM**"): nonostante si tratti di un caso particolare della propagazione guidata, è comunque un caso molto importante, visto che rappresenta il tipo familiare di onda che si propaga lungo le linee di trasmissione oppure con cui si propaga un raggio di luce solare. Inoltre, dato che questo modo si ottiene per m=0 , lo si definisce anche **modo fondamentale**.

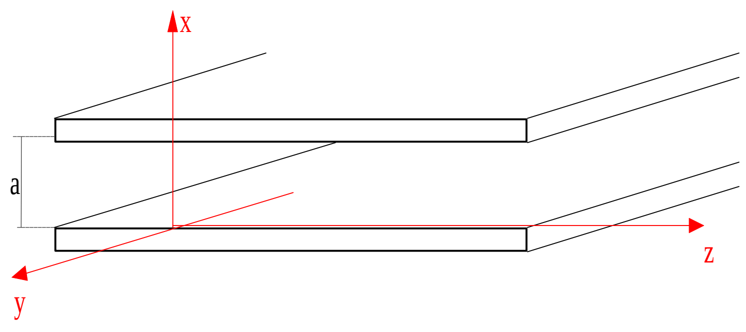
ESERCIZIO NUMERICO SULLA GUIDA A PIANI CONDUTTORI PARALLELI

Progettare una guida a piani conduttori paralleli, separati da un dielettrico avente $\mu=\mu_0$ *ed* $\varepsilon=\varepsilon_0$*, in modo che in essa si propaghino, in corrispondenza di una pulsazione* $\omega=30\pi\cdot 10^9\,(\mathrm{rad/sec})$*, solamente 3 modi.*

Risoluzione

Prima di scendere nei dettagli dei calcoli numerici, cerchiamo di inquadrare qualitativamente la situazione, riprendendo le considerazioni dei precedenti paragrafi.

Abbiamo detto che una **guida d'onda a piani conduttori paralleli** è un semplice esempio di struttura da utilizzare per guidare delle onde elettromagnetiche:



Facciamo l'ipotesi che i piani abbiano una estensione indefinita lungo l'asse y e che siano perfettamente conduttori ($\sigma=\infty$). Sotto queste ipotesi, abbiamo visto che la risoluzione delle equazioni di Maxwell, opportunamente adattate al problema, conduce alle seguenti 6 equazioni differenziali scalari alle derivate parziali:

$$\begin{cases} -j\beta E_Y = -j\omega\mu_0 H_X \\ j\beta E_X - \dfrac{\partial E_Z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_Y \\ \dfrac{\partial E_Y}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_Z \end{cases} \qquad \begin{cases} -j\beta H_Y = j\omega\varepsilon E_X \\ j\beta H_X - \dfrac{\partial H_Z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_Y \\ \dfrac{\partial H_Y}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_Z \end{cases}$$

Abbiamo dunque un sistema di 6 equazioni (alcune differenziali ed altre algebriche) in 7 incognite, rappresentate dalle componenti dei 2 campi e dalla costante β. Su questa costante β è bene ricordare quanto segue: il fatto di ritenere che la dipendenza dalla direzione z sia del tipo $e^{-j\beta z}$, con β costante reale, contiene in sé <u>l'ipotesi implicita di trascurare le perdite</u> che si possono avere sia all'interno del mezzo dielettrico sia in conseguenza del fatto che i conduttori non potranno mai essere perfetti; se, al contrario, volessimo considerare anche le perdite, dovremmo ipotizzare una dipendenza da z del tipo

$$e^{-\gamma z} = e^{-(\alpha + j\beta)z} = e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

ossia dovremmo introdurre la cosiddetta "**costante di attenuazione**" α oltre la "**costante di fase**" indicata appunto con β.

A questo punto, dobbiamo risolvere il sistema rappresentato dalle 6 equazioni scalari. Abbiamo allora visto che è conveniente spezzare il problema in tre parti:

1) ricerca dei "**modi TE**" (dove TE sta per "<u>*Trasverse Electric*</u>"): si suppone che sia $E_Z = 0$ ed $H_Z \neq 0$, il che corrisponde a dire che il campo elettrico totale $\vec{E}$ giace tutto nel piano ortogonale alla direzione di propagazione (asse z);

2) ricerca dei "**modi TM**" (dove TM sta per "<u>*Trasverse Magnetic*</u>"): si suppone questa volta che sia $E_Z \neq 0$ ed $H_Z = 0$, il che corrisponde a dire che è il campo magnetico totale $\vec{H}$ a trovarsi tutto nel piano ortogonale alla direzione di propagazione (asse z);

3) ricerca dei "**modi TEM**" (dove TEM sta chiaramente per "<u>*Trasverse Electric Magnetic*</u>"): si suppone che sia $E_Z = 0$ ed $H_Z = 0$, ossia che entrambi i campi totali siano tutti nel piano ortogonale alla direzione di propagazione (in realtà, come vedremo più avanti, l'unico modo TEM presente non è altro che il modo TM_0).

Per quanto riguarda i modi TE, abbiamo visto sono caratterizzati dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} H_X = \dfrac{\beta}{\omega\mu_0} E_Y \\ \dfrac{\partial E_Y}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_Z \\ \dfrac{\partial H_Z}{\partial x} = j\left(\dfrac{\beta^2}{\omega\mu_0} - \omega\varepsilon\right) E_Y \end{cases}$$

Combinando la seconda e la terza equazione in modo da ricondurci ad una sola equazione del 2° ordine in E_Y, otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial^2 E_Y}{\partial x^2} + h^2 E_Y = 0$$

dove si è posto $h^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon - \beta^2$.

Questa equazione prende il nome di "**equazione delle onde di Helmotz, in forma ridotta, agli autovalori**": la sua soluzione, che diventa univoca solo a patto di conoscere il valore di β, ha espressione

$$E_Y(x) = A_1 \sin(hx) + B_1 \cos(hx)$$

dove, ovviamente, abbiamo trascurato di indicare il termine $e^{j\omega t} e^{-j\beta z}$ che quantifica la dipendenza del campo sia dal tempo sia dalla direzione di propagazione z.

A questo punto, dobbiamo imporre le condizioni al contorno del problema in esame, rappresentate dai valori che il campo assume in corrispondenza dei "*contorni*", ossia delle superfici di discontinuità. Nell'esempio che stiamo analizzando, tali contorni sono rappresentati dalle superfici dei due piani conduttori, in corrispondenza delle quali (cioè in corrispondenza di x=0 e x=a) sappiamo che il campo elettrico tangenziale deve risultare nullo: il campo elettrico tangenziale è proprio E_Y, per cui le condizioni al contorno da imporre sono

$$E_Y(0) = 0 \qquad \text{(piano inferiore)}$$
$$E_Y(a) = 0 \qquad \text{(piano superiore)}$$

Imponendo la prima condizione, si trova chiaramente che B_1=0, per cui l'espressione del campo si riduce semplicemente a

$$E_Y(x) = A_1 \sin(hx)$$

Imponendo poi la seconda condizione, si ottiene $A_1 \sin(ha) = 0$ e questa uguaglianza è verificata sia quando A_1=0 sia quando $\sin(ha) = 0$: ovviamente, la soluzione A_1=0 non è di interesse pratico, per cui deve essere $\sin(ha) = 0$, ossia

$$h = \frac{m\pi}{a} \qquad m = 0,1,2,\dots,\infty$$

Considerando che $h^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon - \beta^2$, possiamo dunque scrivere che

$$\boxed{\beta = \pm\sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \qquad m = 0,1,2,\dots,\infty}$$

e possiamo inoltre riscrivere l'espressione del campo elettrico nella forma completa

$$E_{Y.m}(x,z,t) = A_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{-j\beta z} e^{j\omega t}$$

Noto questo campo, possiamo determinare anche le componenti H_X ed H_Z. A questo scopo, basta utilizzare le relazioni

$$\begin{cases} H_X = \dfrac{\beta}{\omega\mu_0} E_Y \\ \dfrac{\partial E_Y}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_Z \end{cases}$$

da cui otteniamo che

$$H_X(x,z,t) = \frac{\beta}{\omega\mu_0} A_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} e^{j\omega t}$$
$$H_Z(x,z,t) = \frac{j}{\omega\mu_0} A_1 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} e^{j\omega t}$$

Possiamo dunque concludere che, per la guida in esame, il generico modo TE (cioè quello che si ottiene per il generico valore di m compreso tra 1 ed ∞) è definito dalle seguenti componenti:

$$\begin{cases} E_{Y.m}(x,z,t) = A_1 \sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \\ H_{X,m}(x,z,t) = \dfrac{\beta}{\omega\mu_0} A_1 \sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \\ H_{Z,m}(x,z,t) = \dfrac{j}{\omega\mu_0} A_1 \dfrac{m\pi}{a} \cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \end{cases}$$

Con un discorso assolutamente analogo, siamo pervenuti anche alla espressione delle componenti che caratterizzano i modi TM per la struttura in esame:

$$\begin{cases} E_{Z,m}(x,z,t) = -\dfrac{m\pi}{j\omega\varepsilon a} B_1 \sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \\ H_{Y,m}(x,z,t) = B_1 \cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \\ E_{X,m}(x,z,t) = -\dfrac{\beta}{\omega\varepsilon} B_1 \cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \end{cases}$$

Infine, partendo dalle espressioni dei modi TM, che teoricamente si ottengono per m=0,1,2,....,∞, possiamo isolare il modo che si ottiene per m=0, che corrisponde al **modo TEM** o *modo fondamentale*:

$$\begin{cases} E_{Z,0}(x,z,t) = 0 \\ H_{Y,0}(x,z,t) = B_1 e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \\ E_{X,0}(x,z,t) = -\dfrac{\beta}{\omega\varepsilon} B_1 e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \end{cases}$$

A questo punto, possiamo rispondere alla domanda posta dal problema. Si osserva infatti che, sia nei modi TE sia nei modi TM, la propagazione lungo z, che è quella che ci interessa, è regolata da un termine $e^{-j\beta z}$, il cui valore dipende dal valore della costante di fase β, la cui espressione, valida sia per i modi TE sia per i modi TM, è

$$\beta = \sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \qquad \begin{cases} TE \longrightarrow m = 1,2,\dots,\infty \\ TM \longrightarrow m = 1,2,\dots,\infty \\ TEM \longrightarrow m = 0 \end{cases}$$

Allora, è evidente che il valore di β, una volta fissata la pulsazione ω e le caratteristiche magnetiche (μ_0) ed elettriche (ε_0) del dielettrico, dipende sia dal valore di m (cioè dal modo TE e/o TM considerato) sia dal valore dello spessore a del dielettrico stesso. In particolare, quando β risulta essere reale, allora, effettivamente, le espressioni trovate prima per E ed H rappresentano modi che si propagano, mentre invece, quando β risulta immaginario, tali espressioni rappresentano modi che si attenuano. Allora, il nostro scopo è determinare quanto deve valere lo spessore a del dielettrico affinché si propaghino nella guida solamente 3 modi.

In primo luogo, è chiaro che β risulta essere una quantità reale quando $\omega^2\mu_0\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 > 0$: la condizione critica, per il generico modo m, è allora quella per cui risulta

$$\omega^2\mu_0\varepsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$

da cui si ottiene

$$a_m = \frac{m\pi}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}} = \frac{m\pi c}{\omega}$$

dove $c = 3\cdot 10^8 (m/\sec)$ è la velocità della luce visto che stiamo supponendo $\varepsilon=\varepsilon_0$.

Possiamo dunque esprimerci nel modo seguente: fissato il generico modo, ossia fissato un generico valore di m, e calcolato quindi il valore a_m, il modo considerato si propagherà senza attenuazione solo per valori $a > a_m$, mentre si attenuerà (e quindi non avrà alcuna importanza fisica) per $a \le a_m$.

Appurato questo, vediamo quali valori di a sono necessari per far propagare solamente 3 modi.

Sicuramente, <u>a prescindere dal valore di a, si propagherà comunque il modo TEM</u>: infatti, tale modo si ottiene per m=0, ossia quando $\beta = \sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon}$, il che indica che β è sempre una quantità reale.

Passiamo adesso ai modi TE1 e TM1, che si ottengono per m=1: in questo caso, lo spessore critico del dielettrico è

$$a_1 = \left.\frac{m\pi c}{\omega}\right|_{m=1} = 0.01(m)$$

Ciò significa che, prendendo un dielettrico di spessore maggiore di 0.01 metri, siamo certi che, nella guida, si propagano sia il modo TEM sia i modi TE1 e TM1. Avendo quindi già la propagazione di 3 modi, dobbiamo adesso impedire che se ne possano propagare degli altri: per esempio, con lo stesso ragionamento di prima, i modi TE2 e TM2 si propagheranno quando lo spessore del dielettrico è maggiore di

$$a_2 = \left.\frac{m\pi c}{\omega}\right|_{m=2} = 0.02(m)$$

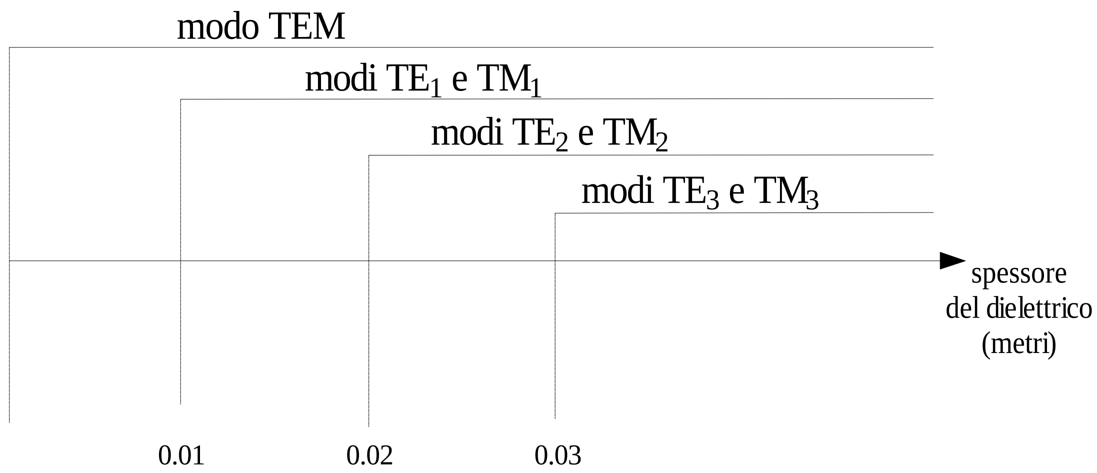
Possiamo perciò concludere che, *se vogliamo far propagare, nella nostra guida, soltanto 3 modi, dobbiamo aver cura di dare al dielettrico uno spessore* $0.01(\mathrm{m}) < a < 0.02(\mathrm{m})$.

Se avessimo voluto la propagazione di solo 5 modi, tenendo conto che i modi TE3 e TM3 prendono a propagarsi quando lo spessore del dielettrico supera il valore

$$a_3 = \left.\frac{m\pi c}{\omega}\right|_{m=3} = 0.03(\mathrm{m})$$

avremmo dovuto prendere $0.02(\mathrm{m}) < a < 0.03(\mathrm{m})$.

Il grafico seguente aiuta dunque a comprendere la situazione:



Come si osserva, mentre il modo TEM si propaga per qualunque valore (almeno a livello teorico) dello spessore del dielettrico, i modi TE1 e TM1 prendono a propagarsi solo per $a > 0.01(\mathrm{m})$, i modi TE2 e TM2 solo per $a > 0.02(\mathrm{m})$, i modi TE3 e TM3 solo per $a > 0.03(\mathrm{m})$ e così via per i modi di ordine crescente.

Facciamo infine osservare che questo ragionamento vale per un valore fissato di pulsazione angolare ω. Si potrebbe fare un discorso analogo, fissando il valore dello spessore del dielettrico e valutando quali modi si propagano in corrispondenza, per esempio, di valori crescenti di ω.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1