Appunti di Compatibilità Elettromagnetica

Equazioni di Maxwell

INTRODUZIONE

Vogliamo qui richiamare i principali concetti della **teoria dei campi elettromagnetici**. A tal proposito, ricordiamo subito che l'intervallo di frequenze di nostro interesse (che coincide con quello preso in considerazione dalla *normativa internazionale*) va da 150 kHz a 30 GHz, per cui si tratta di un intervallo estremamente ampio. Di conseguenza, le *dimensioni elettriche* degli apparati elettronici e dei *cavi di interconnessione* ad essi associati (così come i cavi di alimentazione) possono non essere elettricamente piccole (cioè molto minori della lunghezza d'onda λ). In questo caso, le usuali nozioni sui *circuiti a parametri concentrati* ed i corrispondenti strumenti di analisi (ad esempio le *leggi di Kirchhoff*) non possono essere applicati.

Purtroppo, le leggi fisiche che regolano il comportamento delle strutture con grandi dimensioni elettriche (le **equazioni di Maxwell**) non sono altrettanto facili da usare come i principi di analisi per i circuiti a parametri concentrati. D'altra parte, per strutture con grandi dimensioni elettriche non esiste altro modo di procedere.

Tutti i fenomeni elettromagnetici macroscopici sono regolati dalle ***equazioni di Maxwell**.* Da un punto di vista prettamente matematico, tali equazioni sono difficili da trattare, sebbene esse siano semplici da descrivere in termini concettuali. Queste equazioni descrivono la natura a parametri distribuiti dei campi elettromagnetici, ossia il fatto che le quantità di campo sono sempre funzioni dello spazio oltre che del tempo. Di conseguenza, *le equazioni di Maxwell sono equazioni differenziali alle derivate parziali, proprio perché i campi sono funzioni delle coordinate spaziali x,y,z e del tempo t.*

Le equazioni di Maxwell sono formulate in modo compatto per mezzo delle operazioni di **calcolo vettoriale**. Esse rappresentano lo strumento primario per la descrizione dei fenomeni elettromagnetici. La risoluzione delle equazioni di Maxwell non è ottenibile con un procedimento semplice, ma questo non ne diminuisce la loro fondamentale importanza.

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ IN REGIME NON STAZIONARIO

Materie come l’elettrostatica e la magnetostatica si occupano solo di due “oggetti”:

- il *campo elettrico STATICO* generato da cariche elettriche fisse (**elettrostatica**);
- il *campo magnetico STATICO* generato da correnti stazionarie (**magnetostatica**);

Noi, invece, ci interessiamo adesso a campi elettrici e campi magnetici variabili nel tempo.

Per definizione, ricordiamo che l’**intensità di corrente I** (misurata in A) che esce da una certa superficie S è pari al flusso del vettore **densità di corrente** $\vec{J}$ (misurata in A/m^2) attraverso questa superficie:

$$I = \int_S \vec{J} \bullet \vec{n} dS$$

Supponiamo allora di avere una superficie S, chiusa, che racchiude un certo volume τ; supponiamo inoltre che in questo volume sia localizzata una certa **carica elettrica** con densità spaziale generica ρ. Dato che la corrente è un movimento di cariche, in base al noto **principio della conservazione della carica** è chiaro che la corrente totale che esce dalla superficie S deve essere pari alla velocità (negativa) con cui varia la carica elettrica all’interno del volume stesso (visto che, a seguito del movimento, ci sono cariche che escono dal volume e quindi una variazione negativa della carica contenuta nel volume stesso): detto in formule, deve cioè risultare

$$\oint_S \vec{J} \bullet \vec{n} dS = -\frac{d}{dt}\int_\tau \rho d\tau$$

Nell’ipotesi per cui la regione di integrazione sia *stazionaria* (cioè rimanga invariata nel tempo), possiamo scambiare, al secondo membro, il segno di derivata con quello di integrale:

$$\oint_S \vec{J} \bullet \vec{n} dS = -\int_\tau \frac{d\rho}{dt} d\tau$$

L’integrale a primo membro si può inoltre trasformare in un integrale di volume applicando il noto **teorema della divergenza**: così facendo, si ottiene

$$\int_\tau \nabla \bullet \vec{J} d\tau = -\int_\tau \frac{d\rho}{dt} d\tau$$

dove ricordiamo che il simbolo $\nabla \bullet \vec{J}$ indica la **divergenza** del vettore $\vec{J}$.

L’equazione appena ricavata deve valere per un volume arbitrario $d\tau$, il che implica che debbano essere uguali le due funzioni integrande: possiamo dunque concludere che deve essere

$$\boxed{\nabla \bullet \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Questa prende il nome di **equazione di continuità (in forma differenziale) in regime non stazionario**.

Essa si distingue evidentemente dalla **equazione di continuità (in forma differenziale) in regime stazionario**, che sappiamo essere semplicemente

$$\boxed{\nabla \bullet \vec{J} = 0}$$

Ricordiamo infine l'espressione completa della divergenza di un generico vettore $\vec{A}$:

$$\nabla \bullet \vec{A} = \frac{\partial A_X}{\partial x} + \frac{\partial A_Y}{\partial y} + \frac{\partial A_Z}{\partial z}$$

Sulla base di ciò, possiamo riscrivere l'equazione di continuità in forma esplicita:

$$\frac{\partial J_X}{\partial x} + \frac{\partial J_Y}{\partial y} + \frac{\partial J_Z}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO ELETTRICO

Questo teorema afferma quanto segue: *il flusso netto del vettore $\vec{D}$ attraverso una qualsiasi superficie chiusa che circonda una certa carica Q è pari alla carica stessa.* Detto anche in altre parole, integrando il vettore $\vec{D}$ su una superficie chiusa, risulterà soltanto la carica positiva netta Q racchiusa dalla superficie stessa.

Dimostriamo questo risultato. Consideriamo una carica puntiforme Q situata in un mezzo omogeneo e isotropo con costante dielettrica ε. Consideriamo poi un punto P a distanza r dal punto in cui si trova Q: per definizione, la **densità di flusso elettrico** nel punto P vale

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{a}_r$$

dove $\vec{a}_r$ è il versore della direzione che individua il punto P rispetto all'origine del sistema di riferimento prescelto.

Preso invece un generico elemento di superficie dS, il flusso del vettore $\vec{D}$ (che prende notoriamente il nome di **flusso elettrico** Ψ) attraverso dS è dato, per definizione di flusso, da

$$d\Psi = \vec{D} \bullet \vec{n} dS = D dS \cos\theta$$

dove θ è l'angolo tra il vettore $\vec{D}$ e la normale a dS. Il prodotto dScosθ non è altro che la proiezione del vettore $d\vec{S}$ nella direzione del raggio vettore, ossia nella direzione di $\vec{a}_r$: poniamo perciò

$$dS_n = dS\cos\theta$$

Inoltre, l’angolo solido che, dal punto in cui si trova Q, sottende l’elemento di superficie dS, è dato da

$$d\Omega = \frac{dS_n}{r^2} = \frac{dS\cos\theta}{r^2}$$

Adesso, il flusso totale, attraverso una superficie chiusa finita S che avvolge la carica Q, si ottiene integrando il flusso elementare dΨ su tutta la superficie S:

$$\Psi = \int_S d\Psi = \int_S DdS\cos\theta = \int_S Dr^2 d\Omega = \frac{Q}{4\pi}\int_S d\Omega = Q$$

Questo è quello che volevamo dimostrare.

E’ inoltre ovvio che il risultato appena dimostrato si può ulteriormente estendere al caso in cui la superficie S racchiuda N cariche puntiformi ed al caso in cui invece essa racchiuda delle cariche non più puntiformi, ma distribuite uniformemente con una certa densità:

- se ci sono **N cariche puntiformi**, avremo evidentemente che

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} Q_i$$

- se invece le cariche sono **distribuite**, in modo uniforme, entro un volume τ con **densità spaziale di carica** ρ (misurata in Coulomb/metro^3), allora avremo che

$$\boxed{\Psi = \oint_\tau \rho(\vec{r})d\tau}$$

Quest’ultima relazione rappresenta l’espressione più generale del **teorema di Gauss in forma integrale**. Ne esiste anche un’altra, questa volta in forma differenziale, e si ottiene da quella applicando il *teorema della divergenza*: in primo luogo, per definizione stessa di Ψ possiamo scrivere che

$$\Psi = \oint_\tau \rho(\vec{r})d\tau = \int_S \vec{D}\bullet\vec{n}dS$$

In base al suddetto teorema della divergenza, l’integrale di superficie è equivalente ad un integrale di volume e precisamente

$$\Psi = \oint_\tau \rho(\vec{r})d\tau = \int_S \vec{D}\bullet\vec{n}dS = \int_\tau \nabla\bullet\vec{D}d\tau$$

Dall’uguaglianza tra i due integrali di volume otteniamo che

$$\nabla\bullet\vec{D} = \rho$$

Sostituendo l'espressione esplicita della divergenza, scriviamo che

$$\frac{\partial D_X}{\partial x}+\frac{\partial D_Y}{\partial y}+\frac{\partial D_Z}{\partial z}=\rho$$

Nel caso particolare in cui il mezzo sia isotropo e omogeneo, per cui vale la relazione $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$, il **teorema di Gauss in forma differenziale** diventa

$$\nabla\bullet\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

mentre in forma integrale diventa

$$\oint_{SUP}\vec{E}\bullet d\vec{S}=\frac{\rho_{TOT}}{\varepsilon_0}$$

LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO MAGNETICO

Questo teorema afferma quanto segue: *è sempre nullo il flusso netto del vettore $\vec{B}$ attraverso una qualsiasi superficie chiusa*: in formule, risulta quindi

$$\oint_{SUP}\vec{B}\bullet d\vec{S}=0$$

Da questo risultato deriva che tutte le linee del campo magnetico formano dei percorsi chiusi, ossia anche che <u>non esistono sorgenti isolate di campo magnetico</u>. In termini pratici, questo significa che, se spezziamo un **magnete permanente**, scopriamo che agli estremi delle due parti ottenute si sono formati nuovamente <u>due poli</u>.

In termini differenziali, il teorema dice semplicemente che è nulla la divergenza del vettore $\vec{B}$:

$$\nabla\bullet\vec{B}=0$$

TEOREMA DI AMPERE

Tra le principali leggi della **magnetostatica**, ci ricordiamo del "<u>*teorema di Ampere*</u>": in termini analitici, questo teorema afferma che

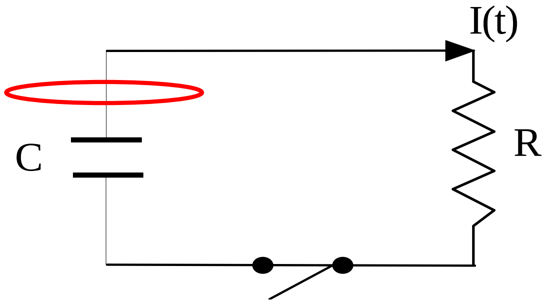
$$\oint_{\ell}\vec{B}\bullet d\vec{\ell}=\mu_0 I=\mu_0\int_S\vec{J}\bullet d\vec{S}$$

ossia che *la circuitazione, lungo una qualsiasi linea chiusa ℓ, del* ***campo di induzione magnetica*** $\vec{B}$ *(misurato in Wb/m^2) prodotto da un sistema generico di correnti stazionarie $\vec{J}$ è pari al prodotto della costante m_0 per la somma algebrica delle correnti che risultano concatenate con ℓ.*

L'enunciato del teorema specifica dunque che la sua validità è limitata ai casi in cui il campo $\vec{B}$ e la distribuzione di correnti $\vec{J}$ sono entrambi <u>stazionari</u>: il motivo è che <u>solo in presenza di regimi</u>

<u>stazionari di corrente le linee di corrente sono delle linee chiuse</u>. Il fatto che le linee di corrente debbano essere chiuse è un requisito fondamentale, in quanto, mentre il primo membro del teorema di Ampere è completamente definito una volta fissato il contorno ℓ di integrazione, il secondo membro è valido quale che sia la scelta della superficie di integrazione S (superficie che, per definizione, deve appoggiarsi sul contorno ℓ) e l'arbitrarietà di tale scelta presuppone che, necessariamente, le linee di corrente siano chiuse.

Per capire meglio questo concetto, vediamo cosa succede quando applichiamo il teorema di Ampere ad un caso tipicamente non stazionario. Consideriamo perciò un tipico circuito per la scarica di un condensatore:



Supponendo il condensatore dotato di una certa carica iniziale non nulla, nel momento in cui chiudiamo l'interruttore, nel circuito si sviluppa la <u>*corrente di scarica*</u>, che è una corrente variabile (in particolare decrescente) nel tempo: indicata infatti con V_0 la tensione iniziale sul condensatore, questa corrente vale V_0/R nel momento in cui chiudiamo l'interruttore e poi decresce fino al valore 0 entro 3-4 costanti di tempo.

Il nostro intento è quello di applicare la relazione

$$\oint_{\ell} \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{J} \bullet d\vec{S}$$

Per farlo, scegliamo come cammino di integrazione ℓ quello indicato in figura (ossia una linea chiusa che abbraccia il conduttore attraversato dalla corrente di scarica). Una volta fissato questo cammino, il termine $\oint_{\ell} \vec{B} \bullet d\vec{\ell}$ è univocamente determinato.

Per il calcolo del secondo termine, invece, dobbiamo fissare una superficie S che si appoggi sul cammino ℓ. Prendiamo, ad esempio, una superficie S_1 che si "chiuda" prima di arrivare all'armatura del condensatore: in questo caso, la superficie è attraversata da un'unica linea di corrente (che coincide con il circuito, visto che si ritiene quest'ultimo filiforme), per cui risulta

$$\oint_{\ell} \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 I(t)$$

Al contrario, se consideriamo una superficie S_2 che si chiude tra le due armature del condensatore, è chiaro che S_2 non è attraversata da alcuna linea di corrente: infatti, per il circuito in esame, le linee di corrente NON sono chiuse, visto che partono dall'armatura a potenziale maggiore e terminano in quella a potenziale minore. La conseguenza di ciò è che, se calcoliamo il secondo membro del teorema di Ampere con riferimento a S_2, troviamo

$$\oint_{\ell} \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = 0$$

visto che non c'è nessuna corrente che attraversa la superficie di integrazione considerata.

Possiamo evidenziare ancora meglio questo concetto utilizzando la forma differenziale del teorema di Ampere e facendo vedere che i due membri dell'equazione si "comportano formalmente" in modo diverso.

La forma differenziale del teorema di Ampere è

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

dove ricordiamo che il simbolo $\nabla \times \vec{B}$ rappresenta il **rotore** del campo $\vec{B}$.

Si tratta di una equazione differenziale che stabilisce, punto per punto, l'eguaglianza tra i campi vettoriali $\nabla \times \vec{B}$ e $\mu_0 \vec{J}$. Vogliamo allora mostrare come questa relazione abbia effettivamente validità solo per un regime di corrente stazionario. Applichiamo infatti l'operatore "divergenza" ad entrambi i membri di quella relazione:

$$\nabla \bullet \left(\nabla \times \vec{B}\right) = \nabla \bullet \left(\mu_0 \vec{J}\right)$$

Il primo membro di quella equazione è sempre nullo in base ad una nota proprietà degli operatori differenziali div e rot: quindi da lì scaturisce che $\nabla \bullet \left(\mu_0 \vec{J}\right) = 0$. D'altra parte, abbiamo visto prima che, in generale, risulta $\nabla \bullet \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$ in base alla "*equazione di continuità*": andando a sostituire, troviamo che

$$0 = \nabla \bullet \left(\mu_0 \vec{J}\right) = -\mu_0 \frac{d\rho}{dt}$$

A questo punto, è evidente che la relazione $0 = -\mu_0 \frac{d\rho}{dt}$ è verificata se e solo se risulta $\boxed{\frac{d\rho}{dt} = 0}$, ossia se la densità di carica ρ rimane costante nel tempo in tutti i punti dello spazio (il che corrisponde appunto ad un **regime stazionario di corrente**).

In definitiva, possiamo riassumere dicendo che *il teorema di Ampere in forma differenziale* $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ *confronta due quantità che hanno effettivamente le stesse proprietà differenziali solo nel caso in cui lo stato fisico cui ci si riferisce è stazionario.*

Ovviamente, la stessa conclusione può anche essere ottenuta usando la forma integrale del teorema di Ampere.

Correnti di spostamento ed equazione di Ampere-Maxwell

A questo punto, in base alle considerazioni del paragrafo precedente, vogliamo trovare una nuova *forma* del teorema di Ampere, che permetta di estenderlo anche a casi di *regime non stazionario di corrente*.

Partiamo dall'enunciato $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$. Come abbiamo visto nel paragrafo precedente e come ci dicono le proprietà degli operatori differenziali, il primo membro di quella relazione è solenoidale, cioè

$$\nabla \bullet \left(\nabla \times \vec{B}\right) = 0$$

mentre il secondo membro no: infatti

$$\nabla \bullet \left(\mu_0 \vec{J}\right) = -\mu_0 \frac{d\rho}{dt}$$

Vogliamo allora provare ad aggiungere un termine al secondo membro del teorema di Ampere in modo che, pur rimanendo invariata la validità del teorema nei casi stazionari, lo si possa estendere anche a quelli non stazionari.

Dall' “*equazione di continuità*” sappiamo che

$$\nabla \bullet \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$$

Dal **teorema di Gauss in forma differenziale** abbiamo inoltre che

$$\varepsilon_0 \nabla \bullet \vec{E} = \rho$$

Derivando rispetto al tempo e ricordando che l’operatore *divergenza* è lineare, abbiamo che

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\varepsilon_0 \nabla \bullet \vec{E}\right) = \nabla \bullet \left(\varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}\right)$$

Sostituendo nel secondo membro dell'equazione di continuità si trova dunque la seguente relazione:

$$\nabla \bullet \vec{J} = -\nabla \bullet \left(\varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}\right)$$

Dato che l'operatore *divergenza* è lineare, possiamo unire i 2 argomenti in uno solo:

$$\nabla \bullet \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}\right) = 0$$

Questa relazione dice che il campo $\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$ è anch'esso solenoidale: allora, se inseriamo il termine $\varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$ al secondo membro del teorema di Ampere, troviamo

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}\right)}$$

Questa è proprio l'estensione del teorema di Ampere che noi cercavamo e prende il nome di **teorema di Ampere-Maxwell (in forma differenziale)**. *Esso lega due campi che hanno lo stesso comportamento formale sia nei casi stazionari (dove cioè dE/dt=0) sia in quelli non stazionari.*

Segnaliamo inoltre sin da ora che l'aggiunta del termine ε_0**dE/dt**, dovuta a Maxwell, rende del tutto simmetriche le relazioni tra campo elettrico e campo magnetico: infatti, *così come le* *variazioni temporali del campo elettrico inducono un campo di induzione magnetica in base alla relazione*

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}}$$

(nell'ipotesi, ovviamente, che J=0), allo stesso modo vedremo tra poco che, in base alla prima equazione di Maxwell, le variazioni temporali del campo di induzione magnetica inducono un campo elettrico secondo la relazione

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}}$$

Possiamo chiarire anche meglio il significato del termine aggiunto $\varepsilon_0 dE/dt$: per farlo, consideriamo intanto la **forma integrale del teorema di Ampere-Maxwell**, ossia

$$\int_{SUP} \nabla \times \vec{B} \bullet d\vec{S} = \mu_0 \int_{SUP} \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \bullet d\vec{S}$$

Il primo membro può essere trasformato da integrale di superficie ad integrale di linea (mediante il **teorema di Stokes**) e rappresenta la circuitazione di $\vec{B}$ lungo una linea chiusa ℓ cui si appoggia la superficie S:

$$\oint_{\ell} \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{SUP} \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \bullet d\vec{S}$$

Il secondo membro è invece scomponibile in 2 termini distinti:

$$\boxed{\oint_{\ell} \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{SUP} \vec{J} \bullet d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_{SUP} \frac{d\vec{E}}{dt} \bullet d\vec{S}}$$

Questa espressione potrebbe già essere assunta come formulazione del teorema in forma differenziale. In effetti, possiamo fare qualche ulteriore passaggio.

Il primo integrale a secondo membro è il termine $\mu_0 I$ che compare nella forma integrale del teorema di Ampere valido in regime stazionario:

$$\oint_{\ell} \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \int_{SUP} \frac{d\vec{E}}{dt} \bullet d\vec{S}$$

Il secondo integrale, invece, passando l'operatore $\frac{d}{dt}$ al di fuori dell'integrale in base ad un noto teorema, conduce alla seguente relazione finale:

$$\oint_{\ell} \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Quindi, la **forma integrale del teorema di Ampere-Maxwell** dice questo: *dato un contorno (chiuso) qualsiasi ℓ, la circuitazione del campo di induzione magnetica lungo tale contorno è data dalla somma di due termini: il termine $\mu_0 I$ rappresenta le (eventuali) correnti concatenate al contorno prescelto, mentre il termine $\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ è legato alla (eventuale) variazione temporale del flusso del campo elettrico attraverso una superficie appoggiata al contorno stesso.*

Quindi, il termine $\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ si comporta, agli effetti magnetici, come una normale corrente che si somma corrente reale I. Per ragioni puramente storiche, questo termine prende il nome di **corrente di spostamento**:

$$\boxed{I_S = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}}$$

Fisicamente, non si tratta di una corrente, ossia di un moto ordinato di cariche; tuttavia, dal punto di vista magnetico, si comporta come tale.

Possiamo allora applicare questo teorema al circuito visto nel paragrafo precedente per la scarica del condensatore: così come lì avevamo visto come il teorema di Ampere fosse inadeguato, adesso faremo vedere come invece il teorema di Ampere-Maxwell risulta perfettamente applicabile.

Cominciamo dalla superficie S_1 che è tagliata dal circuito ed è quindi attraversata dalla corrente di conduzione I(t) (dovuta alla scarica del condensatore); possiamo tranquillamente ritenere che il campo elettrico sia tutto contenuto tra le armature del condensatore: questo significa che il contributo delle correnti di spostamento è nullo per questa superficie. Il contrario accade considerando la superficie S_2 che passa tra le armature del condensatore: in questo caso, non si hanno contributi dovuti alla corrente di conduzione I(t) (che infatti non interseca la superficie). Viceversa, al variare della carica localizzata sulle armature, varia il campo elettrico tra di esse e varia quindi nel tempo anche il suo flusso. Si ha perciò un contributo non nullo dato dalla corrente di spostamento. Il flusso del campo elettrico attraverso S_2 è valutabile facilmente tramite il teorema di Gauss: dato che S_2 racchiude una sola armatura, il flusso è dato dal rapporto tra la carica totale racchiusa ed ε_0, per cui

$$\Phi_E = \frac{q(t)}{\varepsilon_0}$$

In questo caso particolare possiamo verificare che la corrente di spostamento così calcolata è pari esattamente a quella di conduzione I: infatti

$$I_S = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dq(t)}{dt} = I$$

La conclusione è dunque che il secondo membro dell'equazione di Ampere-Maxwell dà sempre lo stesso valore della circuitazione di $\vec{B}$ comunque sia scelta la superficie S appoggiata al contorno di integrazione ℓ.

Segnaliamo inoltre che, talvolta, si trova un'altra formulazione dell'equazione di Ampere-Maxwell: infatti, ricordando che, nel vuoto, risulta $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ (legame tra campo di induzione magnetica e **campo magnetico**) e $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ (legame tra **densità di flusso elettrico** e campo elettrico), l'equazione di Ampere-Maxwell assume l'espressione

$$\boxed{\oint_{\ell} \vec{H} \bullet d\vec{\ell} = \int_{SUP} \vec{J} \bullet d\vec{S} + \frac{d}{dt}\int_{SUP} \vec{D} \bullet d\vec{S}}$$

e questa espressione vale per qualsiasi mezzo.

Questa forma evidenzia una volta di più il significato della legge di Ampere-Maxwell: nel produrre un campo magnetico $\vec{H}$, un flusso elettrico $\vec{D}$ variabile nel tempo ha lo stesso effetto di una densità di corrente $\vec{J}$ dovuta a cariche libere. *Così come l'elettrostatica ci dice che una corrente statica (costante nel tempo) genera un campo magnetico, la legge di Ampere-Maxwell mostra che un campo elettrico variabile nel tempo produce lo stesso risultato.*

L'integrale di linea del campo magnetico lungo un percorso chiuso ℓ prende il nome di **forza magnetomotrice** (brevemente **f.m.m.**) lungo tale percorso:

$$\text{f.m.m.} = \oint_{\ell} \vec{H} \bullet d\vec{\ell}$$

Come vedremo, si tratta in pratica delle quantità duale della cosiddetta *forza elettromotrice*, di cui parleremo nel prossimo paragrafo.

Riepiloghiamo inoltre le **unità di misura** delle principali quantità vettoriali che abbiamo introdotto:

campo elettrico $\vec{E}$: [V/m]
campo magnetico $\vec{H}$: [A/m]
densità di flusso elettrico $\vec{D}$: [C/m^2]
campo di induzione magnetica $\vec{B}$: [Wb/m^2]

LEGGE DI FARADAY

Una delle leggi principali studiate in *Elettrostatica* è quella secondo cui la circuitazione del campo elettrico $\vec{E}$ lungo una qualsiasi linea chiusa è sempre zero:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0$$

In forma differenziale, questa legge è $\nabla \times \vec{E} = 0$ ed esprime quindi il fatto che *il campo elettrico (statico) è irrotazionale*.

Adesso supponiamo che la regione in cui stiamo valutando il campo elettrico sia sede di un campo magnetico variabile nel tempo (e quindi di un campo di induzione magnetica variabile nel tempo); in questo caso, quella legge non è più valida, in quanto subentra la **legge dell'induzione di Faraday**: secondo questa legge, infatti, risulta

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{S} \vec{B} \bullet d\vec{S}}$$

Essa dice in pratica che *la circuitazione del campo elettrico, lungo un qualsiasi percorso chiuso G, è pari al tasso (negativo) di variazione del flusso magnetico attraverso una qualsiasi superficie aperta S che si appoggia su G.*

La quantità a primo membro prende il nome di **forza elettromotrice** (misurata in V) indotta sul cammino Γ:

$$f.e.m = \oint_\Gamma \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Come già accennato, si tratta della quantità duale della *forza magnetomotrice*, che corrisponde alla circuitazione del campo magnetico.

La quantità a secondo membro è invece la variazione temporale del flusso magnetico (quest'ultimo misurato in Wb) attraverso la superficie aperta S appoggiata sul contorno Γ:

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \bullet d\vec{S}$$

Solo se il flusso del campo magnetico è costante o nullo attraverso la superficie S considerata, è nulla la circuitazione del campo elettrico[1].

Esiste anche una forma differenziale di questa legge: applicando infatti il *teorema di Stokes*, possiamo trasformare l'integrale a primo membro in un integrale di superficie ed in particolare

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \bullet d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B} \bullet d\vec{S}$$

Inoltre, possiamo scambiare, a secondo membro, il segno di derivata parziale con il segno di integrale:

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \bullet d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$$

Quella equazione risulta verificata se e solo se coincidono le funzioni integrande (dato che la superficie di integrazione è la stessa), per cui concludiamo che

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

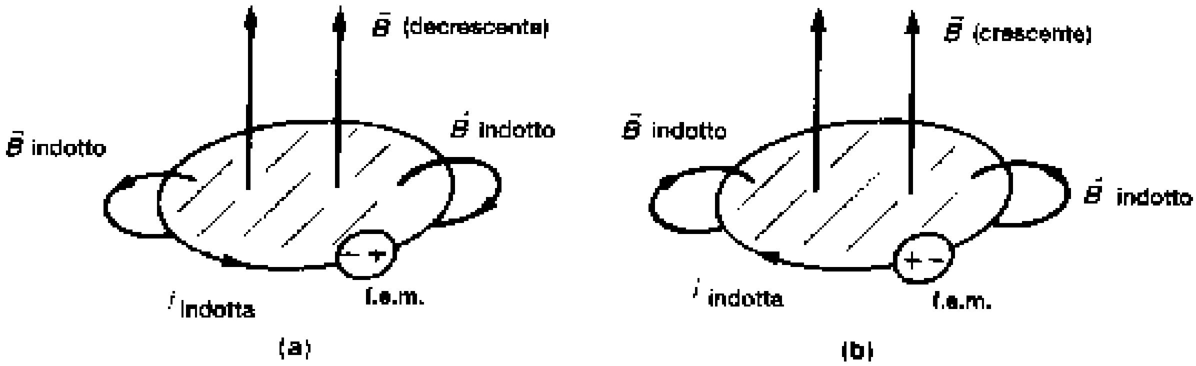
E' necessario adesso fare alcune osservazioni sulle formule appena ricavate:

- in primo luogo, ricordiamo che il contorno Γ e la superficie S ad esso appoggiata sono legati tramite la nota **regola della mano destra**: se le dita della mano destra sono orientate lungo il percorso Γ, allora il pollice indica la direzione ed il verso della normale $\vec{n}$ alla superficie racchiusa da Γ. L'elemento di superficie è $d\vec{S} = \vec{n}dS$;

[1] Ricordiamo che la superficie in questione deve essere necessariamente aperta, in quanto, se fosse chiusa, il *teorema di Gauss per il campo magnetico* ci direbbe che è comunque nullo il flusso del vettore B attraverso la superficie stessa.

- è' inoltre molto importante spiegare il significato del segno negativo che compare a secondo membro della legge di Faraday. Esso esprime la cosiddetta **legge di Lenz**: questa dice che *la forza elettromotrice indotta sul contorno chiuso ha verso tale da generare una corrente indotta il cui flusso magnetico tende ad opporsi a qualsiasi cambiamento del flusso magnetico originale.*

Per spiegare bene quest'ultimo concetto, facciamo riferimento, per semplicità, ad una superficie piana S del tipo riportato nella figura seguente:



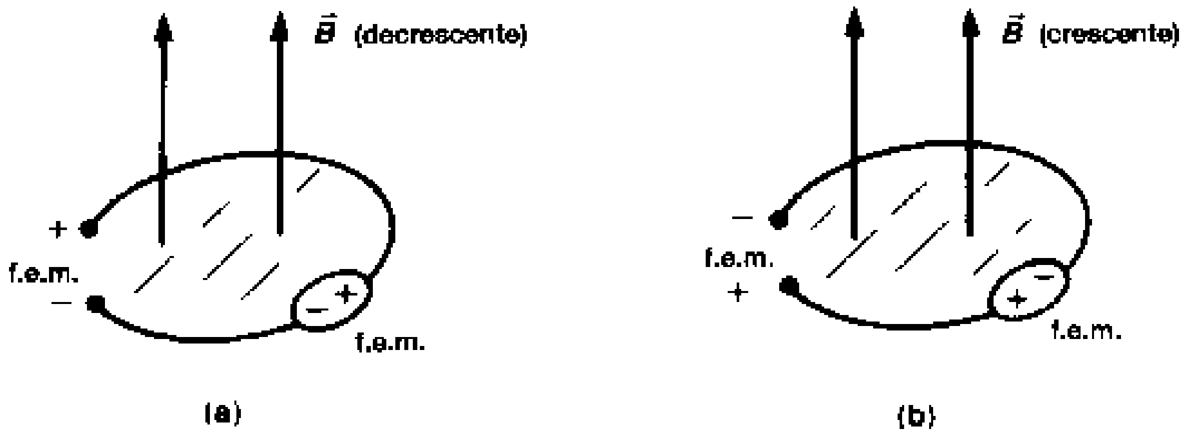
Consideriamo la figura di sinistra: il vettore $\vec{B}$ è diretto verso l'alto ed il suo modulo sta diminuendo; allora, sulla spira si induce una forza elettromotrice che genera nella spira una corrente $i_{indotta}$; la polarità della f.e.m. è tale che la corrente induce un nuovo campo $\vec{B}$ (il cui verso è determinabile con la legge della mano destra) che si oppone alla diminuzione del $\vec{B}$ originale[2].

Adesso consideriamo la figura di destra, nella quale il flusso magnetico che attraversa la superficie è ancora diretto verso l'alto, ma cresce in modulo. In questo caso, la f.e.m. indotta ha polarità (opposta al caso precedente) tale da creare una corrente che induce un $\vec{B}$ che si oppone alla crescita del $\vec{B}$ originale. Quest'ultimo risultato è anche abbastanza intuitivo: infatti, se fosse vero il contrario, il flusso dovuto alla corrente indotta si sommerebbe a quello originario, causando una ulteriore crescita della corrente e così; in pratica, non varrebbe più il principio di conservazione dell'energia, il che sappiamo che è impossibile.

Segnaliamo inoltre che il fatto di considerare una superficie S piana è solo una semplificazione, ma la legge di Faraday vale qualunque sia la forma di S: in pratica, una volta fissato il contorno Γ, la forza elettromotrice indotta su di esso è sempre la stessa per qualunque superficie S, purché appoggiata su Γ.

Un'altra osservazione importante è che l'avere una spira chiusa non è una condizione necessaria affinché un campo magnetico variabile nel tempo induca una forza elettromotrice in tale spira. Ad esempio, supponiamo che la spira della precedente figura sia aperta in un punto, come illustrato nella figura seguente:

[2] In pratica, quindi, bisogna pensare alla forza elettromotrice indotta come equivalente ad una sorgente di tensione inserita lungo la spira, come mostrato appunto in figura. La differenza sostanziale è che la forza elettromotrice è una tipica quantità a parametri distribuiti e quindi, a rigore, non può essere localizzata in modo esatto (concentrata in un punto). D'altra parte, se le dimensioni della spira sono elettricamente piccole, la f.e.m. può essere vista, con buona approssimazione, come una sorgente di tensione a parametri concentrati.



Anche in questo caso, una forza elettromotrice (assimilabile ad una sorgente di tensione) viene indotta lungo la spira; questa stessa f.e.m. risulta presente ai capi della spira e ciò avviene anche se la spira non può essere percorsa da corrente (perché aperta). La polarità della tensione ai morsetti coincide con quella della tensione a vuoto della spira, tensione che rappresenta appunto la f.e.m. indotta.

In conclusione, la legge di Faraday mostra che un campo magnetico variabile nel tempo genera (induce) un campo elettrico simile a quello generato da una distribuzione statica di cariche. La differenza sostanziale riguarda le linee di campo elettrico: nel caso delle cariche statiche, le linee partono dalle cariche positive e terminano su quelle negative, mentre invece, nel caso del campo magnetico variabile, le linee di campo si chiudono su se stesse.

Per finire, con riferimento alla forma differenziale $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ della legge di Faraday, riportiamo l'espressione esplicita del rotore del campo elettrico (in generale, del rotore di un qualsiasi vettore):

$$\nabla\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_Z}{\partial y} - \frac{\partial E_Y}{\partial z}\right)\vec{a}_X + \left(\frac{\partial E_X}{\partial z} - \frac{\partial E_Z}{\partial x}\right)\vec{a}_Y + \left(\frac{\partial E_Y}{\partial x} - \frac{\partial E_X}{\partial y}\right)\vec{a}_Z$$

RIEPILOGO DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL

Abbiamo adesso tutti gli elementi per presentare formalmente tutte le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo.

Le **equazioni di Maxwell** che possiamo dare in forma differenziale sono le seguenti:

$$\text{Teorema di Gauss per il campo elettrico:} \quad \nabla\bullet\vec{E} = \frac{\rho_L}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Teorema di Gauss per il campo magnetico:} \quad \nabla\bullet\vec{B} = 0$$

$$\text{Legge di Faraday:} \quad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Legge di Ampere - Maxwell:} \quad \nabla\times\vec{H} = \left(\vec{J}_L + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

Per completare questo quadro, richiamiamo le definizioni dei cosiddetti "*vettori ausiliari*":

$$\text{Vettore densità di flusso elettrico:} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\text{Vettore campo magnetico:} \qquad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

Le sei relazioni appena indicate permettono di stabilire il comportamento statico e dinamico del campo elettrico e di quello magnetico nei casi più generali possibili.

Se poi aggiungiamo anche le relazioni

$$\text{Equazione di continuità:} \qquad \nabla \bullet \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$$

$$\text{Forza di Lorentz:} \qquad \vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

(dove q è la carica elementare e v la velocità di movimento delle cariche elettriche), l'insieme di tutte queste equazioni permette l'interpretazione fisica di qualsiasi fenomeno statico o dinamico di interazione tra le cariche elettriche ed i campi elettrici e magnetici, sulla base delle leggi fondamentali della meccanica.

Le 4 equazioni di Maxwell possono inoltre essere espresse in forma integrale, facendo cioè riferimento al flusso ed alla circuitazione del campo elettrico e di quello magnetico:

$$\text{Teorema di Gauss per il campo elettrico:} \qquad \oint_{SUP} \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{\rho_L}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Teorema di Gauss per il campo magnetico:} \qquad \oint_{SUP} \vec{B} \bullet d\vec{S} = 0$$

$$\text{Legge di Faraday:} \qquad \oint_{\ell} \vec{E} \bullet d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

$$\text{Legge di Ampere - Maxwell:} \qquad \oint_{\ell} \vec{B} \bullet d\vec{\ell} = \mu_0 I_{TOT}$$

A queste possiamo anche aggiungerne altre due, relative ai due vettori ausiliari:

$$\oint_{SUP} \vec{D} \bullet d\vec{S} = q_L$$

$$\oint_{\ell} \vec{H} \bullet d\vec{\ell} = I_L + \frac{\partial \Phi_D}{\partial t}$$

Per concludere, le equazioni di Maxwell, in forma differenziale, relative allo <u>spazio vuoto</u>, sono le seguenti:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \bullet \vec{E} = 0$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

FLUSSO DI POTENZA

Abbiamo detto che l’unità di misura del campo elettrico $\vec{E}$ è il **V/m**, mentre quella del campo magnetico $\vec{H}$ è **A/m**. Di conseguenza, se facciamo il prodotto tra questi vettori, otteniamo una quantità (scalare o vettoriale a seconda del tipo di prodotto che abbiamo eseguito) la cui dimensione è quella di una densità di potenza, ossia **W/m²**. Di particolare interesse è l’esito del prodotto vettoriale tra campo elettrico e campo magnetico, che prende il nome di **vettore di Poynting**:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Utilizzando alcune identità tra vettori, è possibile dimostrare la validità della seguente relazione:

$$-\oint_S \vec{P} \bullet d\vec{S} = \int_V \vec{E} \bullet \vec{J} dV + \int_V \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV$$

Il termine a primo membro rappresenta il flusso netto entrante del vettore $\vec{P}$ nel volume V; il primo termine a secondo membro rappresenta la dissipazione di potenza all’interno del volume V; il secondo termine a secondo membro rappresenta la variazione temporale dell’energia immagazzinata all’interno del volume V.

Dobbiamo precisare che il vettore di Poynting sopra definito rappresenta la **potenza istantanea**. Nel caso di un regime sinusoidale permanente, è più sensato considerare la **potenza media**. Di conseguenza, per determinare il flusso medio di potenza, si definisce il fasore del vettore di Poynting, nel modo seguente:

$$\boxed{\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}^*}$$

dove ovviamente $\vec{E}$ è il fasore del campo elettrico, mentre $\vec{H}^*$ è il complesso coniugato del fasore del campo magnetico.

La **densità di potenza media** si ottiene allora tramite la formula seguente:

$$\boxed{\vec{P}_{media} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\} \qquad \left[\frac{W}{m^2} \right]}$$

EQUAZIONI COSTITUTIVE

Le equazioni di Maxwell elencate nei paragrafi precedenti non sono sufficienti per la determinazione di tutte le incognite che sono generalmente presenti in un problema di campi elettromagnetici: queste incognite sono in tutto 12 e precisamente sono le componenti dei 4 vettori $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$. Tra l’altro, in quelle equazioni non compaiono, in modo esplicito, le proprietà del **mezzo** in cui ci si trova: queste proprietà del mezzo sono rappresentate dai parametri σ (**conduttività**, misurata in **S/m**, equivalente ad una conduttività per unità di lunghezza), ε (**permettività**, misurata in **F/m**, equivalente ad una capacità per unità di lunghezza), e μ (**permeabilità**, misurata in **H/m**, equivalente ad una induttanza per unità di lunghezza).

Questi parametri, che, in generale, sono dei tensori (cioè delle matrici), compaiono nelle cosiddette **relazioni costitutive**, le quali legano tra loro quei 4 campi e la densità totale di corrente $\vec{J}$: queste relazioni costitutive sono

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{J} &= \sigma\vec{E}\\ \vec{D} &= \varepsilon\vec{E}\\ \vec{B} &= \mu\vec{H}\end{aligned}}$$

Dato un qualsiasi problema di campi elettromagnetici, il primo passo da compiere è quello di ricavare le espressioni dei parametri σ,ε e μ per il mezzo o i mezzi considerati, dopodiché si può passare alla soluzione del sistema costituito dalle equazioni di Maxwell.

E' importante osservare che le relazioni costitutive prima elencate, pur avendo una forma estremamente semplice, derivano in realtà da ragionamenti piuttosto complessi. Senza scendere nei dettagli, possiamo dare dei cenni alle situazioni in cui ci si può imbattere:

- in primo luogo, un mezzo per il quale i parametri σ,ε e μ sono delle costanti, di valore noto, si dice **mezzo lineare, omogeneo ed isotropo**;

- un **mezzo non lineare** si ha invece quando $\vec{D}$ è funzione dell'ampiezza di $\vec{E}$, quando $\vec{B}$ è funzione di $\vec{H}$ e/o quando $\vec{J}$ è funzione di $\vec{E}$. Un esempio di mezzo non lineare è dato da un *materiale ferromagnetico*, in cui il modulo di $\vec{B}$ è legato al modulo di $\vec{H}$ tramite la nota curva di *isteresi*, che è tipicamente una curva non lineare. In termini di parametri caratteristici del mezzo, un mezzo è non lineare quando risulta $\boldsymbol{\varepsilon=\varepsilon(E)}$, $\boldsymbol{\mu=\mu(H)}$ e/o $\boldsymbol{\sigma=\sigma(E)}$;

- un **mezzo non omogeneo** è tale quando i parametri del mezzo sono funzione della posizione: si ha cioè $\boldsymbol{\varepsilon=\varepsilon(x,y,z)}$, $\boldsymbol{\mu=\mu(x,y,z)}$ e/o $\boldsymbol{\sigma=\sigma(x,y,z)}$. Esempi di mezzi non omogenei sono i conduttori con isolante dielettrico oppure i *circuiti stampati*, nei quali il campo elettrico che si genera si trova in parte in aria (dove $\varepsilon=\varepsilon_0$) ed in parte nel materiale isolante (dove $\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0\neq\varepsilon_0$);

- infine, un **mezzo anisotropo** è tale quando ε,μ e/o σ sono delle matrici, per cui il campo $\vec{E}$ non è parallelo al campo $\vec{D}$ oppure il campo $\vec{B}$ non è parallelo ad $\vec{H}$ oppure $\vec{J}$ non è parallela ad $\vec{E}$. Esempio tipico sono le *ferriti*.

EQUAZIONI DI MAXWELL PER SORGENTI DI TIPO SINUSOIDALE

In generale, i vettori di campo possono avere una dipendenza arbitraria dal tempo. D'altra parte, spesso, ci si trova ad affrontare un problema di campi elettromagnetici in cui si sia instaurato un **regime sinusoidale di tipo permanente**, dovuto evidentemente al fatto che le sorgenti dei campi sono di tipo sinusoidale (isofrequenziale) e che ci si riferisce ad una condizione in cui si possono ritenere esauriti tutti i possibili fenomeni transitori.

Allora, in questi casi, le equazioni di Maxwell possono essere espresse, senza perdere di generalità, con riferimento a sorgenti la cui variazione temporale è di tipo sinusoidale $e^{j\omega t}$:

$$
\begin{aligned}
&-\nabla \times \vec{E} = j\omega\vec{B} \\
&\nabla \times \vec{H} = j\omega\vec{D} + \vec{J}_0 + \sigma\vec{E} + \rho\vec{v} \\
&\nabla \bullet \vec{B} = 0 \\
&\nabla \bullet \vec{D} = \rho_e \\
&\vec{J} = \sigma\vec{E} \\
&\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \\
&\vec{B} = \mu\vec{H}
\end{aligned}
$$

Se poi il mezzo considerato è privo di sorgenti, allora quelle relazioni si possono sintetizzare ulteriormente:

$$
\begin{aligned}
&-\nabla \times \vec{E} = j\omega\mu\vec{H} \\
&\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} \\
&\nabla \bullet \vec{B} = 0 \\
&\nabla \bullet \vec{D} = 0
\end{aligned}
$$

In tutte queste equazioni, le grandezze che compaiono sono allo stesso tempo dei **vettori** (nel senso che presentano 3 componenti nelle tre direzioni del sistema di riferimento fissato) e dei **fasori** (nel senso che ciascuna componente può presentare una propria fase, oltre ad un proprio modulo, e non necessariamente le fasi delle varie componenti sono uguali). Per comprendere bene il concetto, consideriamo ad esempio il *fasore/vettore* associato al campo elettrico:

$$\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}_X(x,y,z) + \vec{E}_Y(x,y,z) + \vec{E}_Z(x,y,z)$$

Tale *fasore/vettore* è dato dalla somma di 3 componenti, una per ciascuna direzione di riferimento. La generica componente è a sua volta un *fasore/vettore*, che possiamo perciò esprimere come prodotto tra un versore (che ne indica direzione e verso), un modulo ed una fase: ad esempio, considerando la componente lungo l'asse x, scriviamo che

$$\vec{E}_X(x,y,z) = E_X(x,y,z)\vec{a}_X = \vec{a}_X \cdot M_X(x,y,z) \cdot e^{j\theta_X(x,y,z)}$$

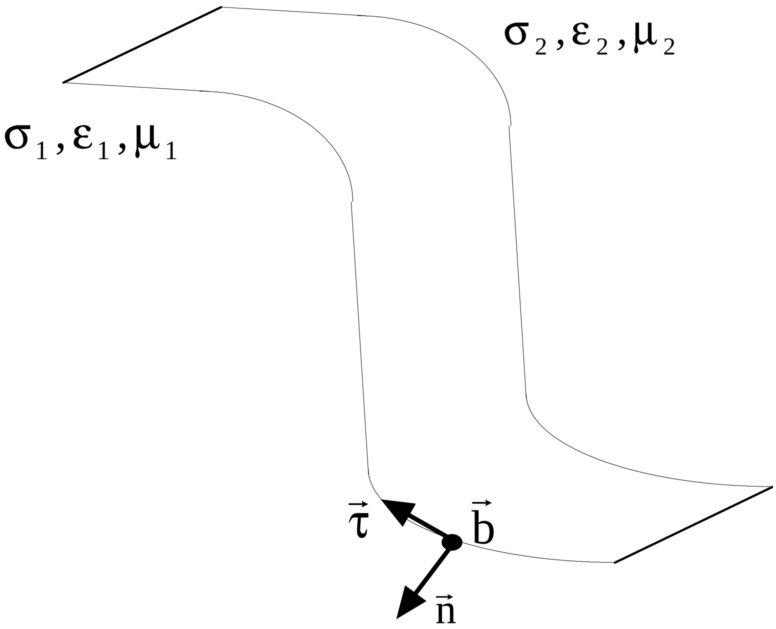
Per ottenere l'espressione nel dominio del tempo, ossia la grandezza sinusoidale associata a questo fasore/vettore, dobbiamo applicare la classica **formula di antitrasformazione**: dobbiamo cioè moltiplicare il fasore/vettore per $e^{j\omega t}$, dove ω è la pulsazione di lavoro, e poi applicare l'operatore parte reale:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_X(x,y,z,t) &= \mathrm{Re}\left\{\vec{E}_X(x,y,z)e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\vec{a}_X \cdot M_X(x,y,z) \cdot e^{j\theta_X(x,y,z)} \cdot e^{j\omega t}\right\} = \\
&= \vec{a}_X \cdot M_X(x,y,z) \cdot \mathrm{Re}\left\{e^{j\theta_X(x,y,z)} \cdot e^{j\omega t}\right\} = \vec{a}_X \cdot M_X(x,y,z) \cdot \cos\left(\theta_X(x,y,z) + \omega t\right)
\end{aligned}
$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

Le equazioni di Maxwell sono equazioni differenziali (alle derivate parziali) e quindi hanno infinite soluzioni. Per ottenere, tra queste infinite soluzioni, quella relativa alla particolare situazione in cui si opera, è necessario specificare le **condizioni al contorno** del problema in esame.

Consideriamo allora due mezzi posti in contatto tra di loro e caratterizzati ciascuno da una terna (σ,ε,μ) di valori finiti e reali, rispettivamente, della **conduttività**, della **permettività** e della **permeabilità:**



Supponiamo, in particolare, che il mezzo 2 sia un conduttore perfetto (per il quale cioè risulta $\sigma_2 \rightarrow \infty$) e inoltre che il mezzo 1 sia dielettrico. Allora, si può dimostrare che le condizioni al contorno sono le seguenti:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{n} \times \vec{H} = \vec{J}_S \\ \vec{n} \times \vec{E} = 0 \\ \vec{n} \bullet \vec{B} = 0 \\ \vec{n} \bullet \vec{D} = \rho_S \end{array}}$$

dove ricordiamo che la normale $\vec{n}$ punta dalla superficie conduttrice entro il dielettrico.

Infine, a prescindere dalla natura dei due mezzi, ricordiamo che *deve essere sempre verificata la continuità del campo elettrico tangenziale e del campo magnetico tangenziale all'interfaccia tra due mezzi, quale che sia la natura di questi ultimi.*

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1