Appunti di Misure Elettriche
Misura e incertezza

METODI DI MISURA

Con il termine **misurazione** si indica una serie di operazioni aventi lo scopo di determinare il **valore** di una quantità. Si tratta, quindi, del processo che porta alla quantificazione di una grandezza.

Il risultato della misurazione è la **misura**. Per semplicità, si parla solitamente di misura anziché di misurazione, ma è bene tener presente la differenza tra i due termini.

L'esecuzione di una misura richiede, teoricamente, un confronto tra la quantità incognita che si vuol misurare e una quantità nota, che è presa come **campione di riferimento**.

Per **metodo di misura** si intende la sequenza logica di operazioni, descritte in modo generico, impiegate nell'esecuzione delle misure. Una volta fissato, a livello del tutto generale, un *metodo di misura*, si procede all'effettuazione di una specifica misura: per **procedura di misura** si intende allora l'insieme di operazioni, descritte in modo specifico, utilizzate nell'esecuzione di tale specifica misura, in accordo al metodo di misura prefissato.

Per **misurando** intendiamo una quantità soggetta a misura.

Ci sono due possibilità di effettuare una misura:

- il **metodo diretto** di misura permette di ottenere il risultato della misura direttamente dalla lettura dello strumento utilizzato, senza la necessità di conoscere esplicitamente valori di altri parametri, eccetto ovviamente quelli delle grandezze che influenzano la misura stessa[1]; una misura ottenuta con il metodo diretto è ovviamente detta *misura diretta*:
- si parla invece di **metodo indiretto** di misura quando il risultato della misura è ottenuto dalla combinazione di risultati di misure dirette su parametri funzionalmente legati al misurando. Parliamo perciò in questo caso di una *misura indiretta*. Ad esempio, una misura di resistenza si può ottenere misurando la tensione ai suoi capi e la corrente attraverso di essa e facendo poi il rapporto.

[1] Si tratta delle cosiddette grandezze di influenza, che saranno esaminate in seguito.

La maggior parte delle misure è ottenuta per via indiretta, quasi sempre per motivi di costo. Ad esempio, una misura di densità di una data sostanza potrebbe essere ottenuta direttamente tramite un apparecchio che si chiama *densimetro*, ma è decisamente più comodo misurare direttamente la massa ed il volume della sostanza e farne poi il rapporto.

INCERTEZZA DI MISURA

Tutti i risultati di una misura sono affetti da una incertezza: l'**incertezza di misura** è il parametro, associato al risultato di una misura, che caratterizza la *dispersione* dei valori che potrebbero essere ragionevolmente attribuiti al misurando. Ad esempio, il risultato della misura di una tensione V sarà scritto nella forma

$$V = 15 \pm 0.5 \quad \text{mV}$$

La quantità 0.5 mV rappresenta l'incertezza della misura effettuata. Il problema della valutazione di questa quantità è l'oggetto della **teoria degli errori e dell'incertezza di misura**[2].

I motivi per cui non potremo mai eliminare l'incertezza di una qualsiasi misura sono molteplici:

- imperfezione strutturale nei componenti degli strumenti utilizzati (**incertezza strumentale**): nonostante la tecnologia metta a disposizione strumenti sempre più raffinati, non si potranno mai avere strumenti ideali, per cui questa causa di incertezza non potrà mai essere nulla;
- inadeguatezza del **campione** di confronto: gli *Istituti Metrologici* mettono a disposizione campioni sempre più raffinati per venire incontro alle esigenze della tecnica, ma questo non vale sempre;
- limitatezza della scala o del sistema numerico di visualizzazione dello strumento;
- frettolosità da parte dell'operatore;
- imperfezioni del metodo di misura utilizzato e/o inadeguatezza del modello matematico prescelto (**incertezza intrinseca** del misurando). Ogni modello può essere reso più o meno complicato, per cui questo fattore di incertezza è generalmente trascurabile; il problema è che un modello complicato risulta talvolta poco pratico nella sua applicazione, per cui bisogna sempre trovare un giusto compromesso.

A queste cause si aggiunga il fatto che l'inserzione di uno strumento di misura in un sistema quasi sempre altera le condizioni iniziali del sistema stesso e non consente perciò la misura del valore che il misurando aveva prima dell'inserzione. Quindi, *il processo di misura di per sé disturba il sistema e altera il valore delle quantità da misurare.* L'entità di tale disturbo varia, evidentemente, da strumento a strumento; uno degli aspetti più importanti della **scienza delle misure** è quello di minimizzare questo disturbo.

Nel seguito, faremo sempre riferimento a quanto riportato nella "*Guide to the expression of uncertainty in measurement*", redatta dall' **ISO** (*International Organization for Standardization*): in questo manuale (che nel seguito chiameremo semplicemente **GUIDA**) si afferma che *lo scopo di una misura è determinare il valore (non il valore vero) del misurando.*

Una misura deve iniziare con una appropriata specificazione del **misurando**, del **metodo di misura** e della **procedura di misura**.

---

[2] In generale, la **teoria degli errori** comprende tutti i procedimenti di valutazione e minimizzazione degli errori nei *procedimenti approssimati* (sperimentali e/o matematici). Non esiste un trattato esaustivo della teoria degli errori.

IL RISULTATO DI UNA MISURA

Supponiamo di voler misurare una certa grandezza X, ad esempio il valore di una tensione tra due punti di un circuito. Immaginiamo allora di andare a compiere una serie di **misure ripetute** di questa tensione, sforzandoci di mantenere sempre le stesse condizioni ambientali. In generale, *noteremo che i risultati delle misure non sono uguali tra di loro:* in particolare, accade generalmente che le prime cifre significative si mantengono uguali per tutte le misure, mentre invece le altre variano da misura a misura. Per esempio, se la tensione da misurare è realmente di 12V, i valori che potremo ottenere saranno 12.1, 11.9, 12, 12.2, 11.8 e così via.

Le cause di questa variabilità dei risultati delle misure sono molteplici e sono state in parte accennate prima; citiamo:

- le *perturbazioni ambientali* (variazioni di temperatura, di pressione, di umidità, di campi magnetici ed elettrici di natura parassita e così via);
- *limitazione tecnologiche* della strumentazione (imperfezioni costruttive, instabilità della taratura);
- limitazioni nel *potere risolutivo* dell'occhio e dell'*abilità di lettura* dell'operatore: in particolare, queste limitazioni riguardano solo gli **strumenti analogici** (ad esempio un **multimetro analogico**), in quanto gli **strumenti digitali** (ad esempio un **multimetro digitale**) forniscono indicazioni numeriche dei valori misurati.

ERRORI

Prima di eseguire una misura di un misurando, è possibile avere a disposizione una *stima del valore di tale misurando*[3]. Indichiamo allora con V il **valore vero** (che non è mai noto) del misurando e con A la **stima** (che invece è nota) di V.

Al fine di operare alcune possibili correzioni alle misure eseguite, è tradizionalmente risultato utile introdurre il concetto di errore.

Si definisce **errore assoluto**, **E**, la differenza tra il valore misurato X e la stima A del valore del misurando:

$$E = X - A$$

Se noi conoscessimo esattamente il valore del misurando, potremmo anche valutare esattamente l'errore assoluto. Al contrario, del misurando abbiamo solo la stima A, per cui l'errore assoluto E non potrà mai essere conosciuto esattamente e quindi la correzione non potrà mai essere completa. Questo è il motivo per cui una misura sarà sempre affetta da incertezza. *Occorre però distinguere le parole "errore" ed "incertezza", che non sono assolutamente dei sinonimi e non vanno perciò confuse*: possiamo dire genericamente che *l'**incertezza** (simbolo: **U**) di una misura è un qualunque numero positivo di cui si sappia con certezza (!) che è maggiorante del valore assoluto dell'errore E:*

$$|E| \le U$$

[3] Tale stima può derivare dalla disponibilità di un campione o dalla conoscenza del suo valore (e della sua incertezza), oppure dalla definizione convenzionale a priori del valore del misurando, o dal valor medio di misure precedentemente eseguite sullo stesso misurando o da altre informazioni ancora.

Altre due fondamentali differenze tra errore ed incertezza sono le seguenti:

- in primo luogo, mentre gli errori sono affetti da segno, le incertezze sono sempre quantità positive;
- in secondo luogo, mentre l'incertezza può essere valutata esattamente, lo stesso non è possibile per l'errore, in quanto esso dipende dal valore vero della grandezza sotto misura e tale valore non è conoscibile perfettamente.

In sintesi, *ogni volta che compiamo una misura, noi compiamo anche un errore, che però non possiamo conoscere; tutto ciò che possiamo fare è stimare tale errore tramite un suo maggiorante, quale è appunto l'incertezza.*

Lasciando da parte, per il momento, il concetto di incertezza, torniamo agli errori. Si definisce **errore relativo**, **e**, il rapporto tra l'errore assoluto e la stima del valore del misurando:

$$e = \frac{E}{A} = \frac{X - A}{A}$$

Considerando che il valore X si assume comunque abbastanza prossimo al valore A, si può anche porre

$$\boxed{e = \frac{E}{A} \cong \frac{E}{X}}$$

e questa è l'espressione utilizzata quasi sempre nelle applicazioni.

L'errore relativo può anche essere fornito in percentuale, nel qual caso di parla di **errore relativo percentuale**, $e_{\%}$:

$$e_{\%} = \frac{X - A}{A} \cdot 100$$

Segnaliamo inoltre che, essendo l'errore di misura generalmente piccolo, è possibile trattare l'errore assoluto come differenziale, il che significa sostanzialmente scrivere che

$$E = X - A \cong dX \qquad \rightarrow \qquad e = \frac{X - A}{A} \cong \frac{E}{X} \cong \frac{dX}{X}$$

PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI NELLE MISURE INDIRETTE

Abbiamo detto in precedenza che una **misura indiretta** del misurando è una combinazione dei valori di misure dirette di grandezze funzionalmente legate al misurando stesso:

$$X = f(a, b, c, ...)$$

La funzione f rappresenta il **legame funzionale** tra il misurando (detto anche **grandezza di uscita**) e le quantità (dette **grandezza di ingresso** e suscettibili di una misura diretta) da cui dipende. Esempio banale di misura indiretta è quello del valore di una resistenza, che può essere ottenuto come rapporto tra la tensione misurata ai capi della resistenza e la corrente che risulta attraversare la resistenza (misurata anch'essa ai capi della resistenza stessa).

Considerando allora che ciascuna misura diretta presenta un errore, *ci chiediamo come una misura indiretta risenta degli errori delle singole misure dirette da cui è ottenuta*[4]*.*

Questa analisi è importante in quanto consente, prima di effettuare la misura, di scegliere il metodo più corretto per l'esecuzione della misura stessa. D'altra parte, la valutazione del modo in cui si propagano gli errori non va confusa con la procedura necessaria all'indicazione del risultato finale di una misura indiretta, per la quale è invece necessario far riferimento alla *propagazione dell'incertezza*, della quale si parlerà in seguito.

Consideriamo una grandezza $X = f(a,b,c,....)$ che sia funzione di diverse grandezze misurabili $a,b,c,....$. Le misure di ciascuna di queste quantità $a,b,c,....$ sono affette da errori ed è possibile studiare, con semplici passaggi matematici, come questi si propagano su X. In particolare, *facciamo l'ipotesi che gli errori siano sufficientemente piccoli da poter confondere l'errore assoluto* $E_X = X - A$ *con il differenziale totale della funzione X:* quindi l'errore assoluto è

$$E_X = X - A \cong dX = \frac{\partial f}{\partial a}da + \frac{\partial f}{\partial b}db + \frac{\partial f}{\partial c}dc + ...$$

E' evidente che, in questa formula, i termini $da, db, dc,....$ sono gli errori assoluti sulle grandezze $a, b, c,....$, per cui scriviamo che

$$\boxed{E_X \cong \frac{\partial f}{\partial a}E_a + \frac{\partial f}{\partial b}E_b + \frac{\partial f}{\partial c}E_c + ...}$$

In base a questa relazione, *l'errore assoluto su X è una particolare combinazione lineare degli errori assoluti sulle grandezze* $a,b,c,....$*: i coefficienti della combinazione lineare sono le derivate parziali della funzione f rispetto ad* $a,b,c,....$*.*

Ovviamente, dall'errore assoluto possiamo facilmente risalire all'errore relativo, dividendo per il valore X misurato per la grandezza in esame:

$$e_X = \frac{E_X}{A_X} \cong \frac{E_X}{X} \cong \frac{dX}{X} = \frac{1}{X}\left(\frac{\partial f}{\partial a}E_a + \frac{\partial f}{\partial b}E_b + \frac{\partial f}{\partial c}E_c + ...\right)$$

Moltiplicando e dividendo il termine $\frac{\partial f}{\partial a}E_a$ per a, il termine $\frac{\partial f}{\partial b}E_v$ per b e così via gli altri termini, possiamo scrivere che

$$e_X \cong \frac{1}{X}\left(a\frac{\partial f}{\partial a}\frac{E_a}{a} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{E_b}{b} + \frac{\partial f}{\partial c}\frac{E_c}{c} + ...\right) = \frac{1}{X}\left(a\frac{\partial f}{\partial a}e_a + b\frac{\partial f}{\partial b}e_b + c\frac{\partial f}{\partial c}e_c + ...\right)$$

In tal modo, *anche l'errore relativo su X è una particolare combinazione lineare degli errori relativi sulle grandezze* $a,b,c,....$*:* i coefficienti della combinazione lineare sono in questo caso le derivate parziali della funzione f rispetto ad $a,b,c,....$, moltiplicate ciascuna per la grandezza corrispondente e divise tutte per X:

[4] In modo analogo, ci porremo in seguito il problema di calcolare l'incertezza della misura indiretta note che siano le incertezze associate alle singole misure dirette.

$$\boxed{e_X \cong \frac{a}{X}\frac{\partial f}{\partial a}e_a + \frac{b}{X}\frac{\partial f}{\partial b}e_b + \frac{c}{X}\frac{\partial f}{\partial c}e_c + \dots}$$

Questa formula esprime il cosiddetto **principio di sovrapposizione degli errori**. Essa fa riferimento all'errore relativo della misura di X, ma è evidente che basta moltiplicare per X per ottenere l'errore assoluto:

$$E_X \cong a\frac{\partial f}{\partial a}e_a + b\frac{\partial f}{\partial b}e_b + c\frac{\partial f}{\partial c}e_c + \dots = \frac{\partial f}{\partial a}E_a + \frac{\partial f}{\partial b}E_b + \frac{\partial f}{\partial c}E_c + \dots$$

Esempi

Facciamo allora qualche esempio di applicazione delle formule appena ottenute.

Consideriamo, ad esempio, il caso in cui la grandezza X di interesse sia il prodotto di due altre grandezze da misurare direttamente, per cui

$$X = a \cdot b$$

Per calcolare l'errore relativo su X in funzione degli errori relativi su a e su b, ci basta applicare la formula ricavata poco fa:

$$e_X \cong \frac{a}{X}\frac{\partial f}{\partial a}e_a + \frac{b}{X}\frac{\partial f}{\partial b}e_b = \frac{a}{ab}\frac{\partial}{\partial a}(ab)e_a + \frac{b}{ab}\frac{\partial}{\partial b}(ab)e_b = \frac{1}{b}be_a + \frac{1}{a}ae_b = e_a + e_b$$

Abbiamo dunque ricavato che *l'errore relativo di una grandezza X, ottenuta dal prodotto di due grandezze misurabili a e b, è dato dalla somma degli errori relativi di a e di b.*

A questo stesso risultato possiamo arrivare anche per altra via. Cominciamo con l'applicare la definizione di errore relativo su X:

$$e_X \cong \frac{E_X}{X} = \frac{X - A_X}{X} = 1 - \frac{A_X}{X}$$

Da qui possiamo ricavare il valore A_X del misurando in funzione del suo errore relativo:

$$A_X \cong X(1 - e_X)$$

Stesso discorso possiamo fare anche per le grandezze a e b di cui X è funzione: abbiamo dunque che

$$\begin{cases} A_a \cong a(1 - e_a) \\ A_b \cong b(1 - e_b) \end{cases} \xrightarrow{\text{dato che } X=ab} A_X = A_a A_b = a(1-e_a)b(1-e_b) = ab(1-e_a)(1-e_b) = ab(1 - e_a - e_b + e_a e_b)$$

Nel termine $(1 - e_a - e_b + e_a e_b)$, il prodotto $e_a e_b$ è sicuramente trascurabile rispetto agli altri:

$$A_X \cong ab(1 - e_a - e_b)$$

Confrontando questa relazione con la relazione $A_X \cong X(1 - e_X)$ ottenuta prima, deduciamo che

$$X(1-e_X)=ab(1-e_a-e_b)\xrightarrow{\text{dato che } X=ab}1-e_X=1-e_a-e_b\longrightarrow\boxed{e_X=e_a+e_b}$$

Questo è evidentemente lo stesso risultato ottenuto prima.

Possiamo applicare questo risultato ad altri casi analoghi. Per esempio, supponiamo che sia $X=a^2$: per ottenere l'errore relativo su X, ci basta considerare la formula $e_X=e_a+e_b$ e porre a=b, in modo da ottenere $e_X=2e_a$: questa formula dice che *l'errore relativo di una grandezza X, ottenuta dal quadrato di una grandezza misurabile a, è pari a due volte l'errore relativo su a.*

In modo del tutto analogo, se $X=\sqrt{a}$, allora si verifica facilmente che $e_X=\frac{e_a}{2}$.

Inoltre, se $X=abc....$, allora $e_X=e_a+e_b+e_c+....$: *l'errore relativo di una grandezza X, ottenuta dal prodotto di un certo numero di grandezze misurabili, è dato dalla somma dei singoli errori relativi.*

Consideriamo adesso una grandezza che sia data dal rapporto tra due grandezze misurabili:

$$X=\frac{a}{b}$$

Applicando ancora una volta il principio di sovrapposizione degli errori, abbiamo che l'errore relativo su X vale

$$e_X\cong\frac{a}{X}\frac{\partial f}{\partial a}e_a+\frac{b}{X}\frac{\partial f}{\partial b}e_b=\frac{a}{a/b}\frac{\partial}{\partial a}(a/b)e_a+\frac{b}{a/b}\frac{\partial}{\partial b}(a/b)e_b=b\frac{1}{b}e_a+\frac{b^2}{a}\left(-\frac{a}{b^2}\right)e_b=e_a-e_b$$

Abbiamo in questo caso ricavato che *l'errore relativo di una grandezza X, ottenuta dal quoziente di due grandezze misurabili a e b, è dato dalla differenza degli errori relativi di a e di b:*

$$\boxed{e_X=e_a-e_b}$$

A proposito di questa formula, è importante osservare una cosa: spesso accade, nella pratica, che gli errori relativi non siano noti con esattezza in entità e segno, per cui se ne fissano i limiti che delimitano la fascia di incertezza. In genere, allora, si preferisce fornire una <u>stima del valore massimo dell'errore relativo</u>, in modo da considerare il **caso peggiore** (*worst case*): ciò significa, quindi, che, anche nel caso di X=a/b, si prende comunque

$$\boxed{(e_X)_{MAX}=e_a+e_b}$$

in modo da indicare il massimo valore (stimato) dell'errore relativo. C'è d'altra parte un'altra possibilità: anziché considerare il caso peggiore, si considera il **valore più probabile** dell'errore relativo, che è valutato come

$$\boxed{(e_X)_{PROB}=\sqrt{e_a^2+e_b^2}}$$

Si ottiene, con questa formula, un quantità che è sicuramente maggiore di e_a e di e_b, ma è minore della loro somma.

Consideriamo adesso una grandezza che sia data dalla somma di due grandezze misurabili:

$$X = a + b$$

Applicando il principio di sovrapposizione degli errori, l'errore relativo su X risulta essere

$$e_X \cong \frac{a}{X}\frac{\partial f}{\partial a}e_a + \frac{b}{X}\frac{\partial f}{\partial b}e_b = \frac{a}{a+b}\frac{\partial}{\partial a}(a+b)e_a + \frac{b}{a+b}\frac{\partial}{\partial b}(a+b)e_b = \frac{a}{a+b}e_a + \frac{b}{a+b}e_b = \frac{ae_a + be_b}{a+b}$$

Questa formula, nel caso particolare in cui $e_a=e_b$, fornisce evidentemente $e_X=e_a$: quindi, *l'errore relativo di una grandezza X, ottenuta dalla somma di due grandezze misurabili a e b le cui misure sono affette dallo stesso errore relativo e_a, è pari a sua volta ad e_a.*

Consideriamo infine

$$X = a - b$$

L'errore relativo su X vale

$$e_X \cong \frac{a}{a-b}\frac{\partial}{\partial a}(a-b)e_a + \frac{b}{a-b}\frac{\partial}{\partial b}(a-b)e_b = \frac{a}{a-b}e_a - \frac{b}{a-b}e_b = \frac{ae_a - be_b}{a-b}$$

Anche in quest'ultimo caso, così come nel caso di X=a/b, se ci si pone nell'ipotesi del *caso peggiore*, si prende il valore massimo dell'errore relativo, che in questo caso vale

$$\boxed{(e_X)_{MAX} = \frac{ae_a + be_b}{a-b}}$$

In tal modo, l'errore relativo ottenuto su una grandezza ottenuta per differenza è tanto maggiore quanto più le grandezze misurabili a e b sono vicine tra di loro. Ne risulta, quindi, che un metodo di misura basato sulla differenza tra due grandezze misurabili va applicato solo in casi particolari.

PROPAGAZIONE DELL'INCERTEZZA NELLE MISURE INDIRETTE

Abbiamo detto che l'incertezza associata ad una misura può essere vista come un maggiorante dell'errore assoluto E=X-A associato alla misura stessa:

$$|E| \le U$$

Possiamo allora seguire discorsi simili a quelli del precedente paragrafo per studiare anche la propagazione delle incertezze di misura. In particolare, faremo qui riferimento non più all'errore relativo, ma all'errore assoluto.

Consideriamo ad esempio una misura indiretta ottenuta come somma di due misure dirette:

$$X = a + b$$

Siano x_a ed x_b i risultati delle misure rispettivamente di a e di b; i corrispondenti errori assoluti saranno $\mathbf{E_a=a\text{-}x_a}$ e $\mathbf{E_b=b\text{-}x_b}$.

Adesso consideriamo il risultato x della misura di X, ottenuto come

$$x = x_a + x_b$$

Indicato con V il valore vero (incognito) del misurando X, l'errore assoluto associato alla misura x sarà dato da

$$E = V - x = (A + B) - (x_a + x_b) = E_a + E_b$$

dove ovviamente A e B sono i valori veri delle grandezze a e b.

Abbiamo dunque trovato che gli errori assoluti in questo caso si sommano. Adesso andiamo a calcolare il modulo dell'errore assoluto appena individuato:

$$|E| = |E_a + E_b| \le |E_a| + |E_b|$$

Abbiamo qui applicato la nota disuguaglianza triangolare, che è in questo caso una diretta conseguente della **regola del caso peggiore**, assumendo che i due errori sulle misure dirette vadano comunque a sommarsi.

D'altra parte, sappiamo che ciascun errore assoluto è maggiorato dall'incertezza di misura, per cui possiamo scrivere che

$$|E| \le |E_a| + |E_b| \le U_a + U_b = U$$

Questa disuguaglianza ci conferma che anche nella misura indiretta ottenuta come somma di misure indirette, l'errore assoluto è maggiorato dall'incertezza.

Si nota inoltre una <u>fondamentale differenza</u> tra l'errore assoluto E di misura e l'incertezza U di misura: infatti, *mentre gli errori associati alle singole misure dirette si sommando algebricamente ($E = E_a + E_b$), le incertezze si sommano aritmeticamente, non essendo affette da segno (al contrario degli errori).*

Passiamo adesso ad una misura indiretta ottenuta come differenza tra due misure dirette:

$$X = a - b$$

Siano sempre x_a ed x_b i risultati delle misure rispettivamente di a e di b e $\mathbf{E_a=a\text{-}x_a}$ e $\mathbf{E_b=b\text{-}x_b}$ i corrispondenti errori assoluti. In modo analogo a prima, l'errore assoluto associato alla misura $x = x_a - x_b$ sarà dato da

$$E = V - x = (A - B) - (x_a - x_b) = E_a - E_b$$

dove ovviamente A e B sono i valori veri delle grandezze a e b.

In questo caso, dunque, gli errori assoluti si sottraggono. Calcolando il modulo dell'errore assoluto appena individuato, otteniamo

$$|E| = |E_a - E_b| \le |E_a| + |E_b| \le U_a + U_b = U$$

Come si vede, applicando nuovamente la regola del caso peggiore, abbiamo trovato lo stesso risultato visto nel caso precedente.

Passiamo ora ad una misura indiretta ottenuta come prodotto di misure dirette:

$$X = a \cdot b$$

L'errore assoluto associato alla misura $x = x_a \cdot x_b$ sarà dato da

$$E = V - x = (A \cdot B) - (x_a \cdot x_b) = (A \cdot B) - [(A - e_a) \cdot (B - e_b)] = (A \cdot B) - [AB - e_a B - Ae_b + e_a e_b] =$$
$$= +e_a B + Ae_b - e_a e_b$$

Ritenendo che gli errori sulle singole misure dirette siano comunque piccoli, possiamo trascurare il termine $e_a e_b$ rispetto agli altri due, per cui concludiamo che

$$E \cong Be_a + Ae_b$$

Come nei casi precedenti, calcoliamo il modulo dell'errore assoluto appena individuato:

$$|E| \cong |Be_a + Ae_b| \le |Be_a| + |Ae_b| \le |B| \cdot |e_a| + |A| \cdot |e_b| \le |B| \cdot U_a + |A| \cdot U_b$$

Infine, consideriamo una misura indiretta ottenuta come rapporto di misure dirette:

$$X = a / b$$

L'errore assoluto associato alla misura $x = x_a / x_b$ è

$$E = V - x = \frac{A}{B} - \frac{x_a}{x_b} = \frac{A}{B} - \frac{A - e_a}{B - e_b} = \frac{A(B - e_b) - B(A - e_a)}{B(B - e_b)} = \frac{-Ae_b + Be_a}{B(B - e_b)}$$

Ritenendo ancora una volta che gli errori sulle singole misure dirette siano comunque piccoli, possiamo trascurare il termine e_b a denominatore rispetto a B, per cui concludiamo che

$$E \cong \frac{Be_a - Ae_b}{B^2}$$

Calcoliamo infine il modulo dell'errore assoluto appena individuato:

$$|E| \cong \left| \frac{Be_a - Ae_b}{B^2} \right| \le \frac{|Be_a - Ae_b|}{|B^2|} \le \frac{|Be_a| + |Ae_b|}{|B^2|} \le \frac{|B| \cdot |e_a| + |A| \cdot |e_b|}{|B^2|} \le \frac{|B| \cdot U_a + |A| \cdot U_b}{|B^2|}$$

Possiamo a questo punto riepilogare, usando una tabella, i risultati ottenuti in questo e nel precedente paragrafo a proposito degli errori e delle incertezze nelle misure indirette:

Tipo di misura indiretta	Misura	Errore relativo (max)	Errore assoluto	Incertezza assoluta
somma: X=a+b	$x=x_a+x_b$	$\frac{Ae_a+Be_b}{A+B}$	E_a+E_b	U_a+U_b
differenza: X=a-b	$x=x_a-x_b$	$\frac{Ae_a+Be_b}{A-B}$	E_a-E_b	U_a+U_b
prodotto: X=ab	$x=x_a x_b$	e_a+e_b	Be_a+Ae_b	$\lvert B\rvert\cdot U_a+\lvert A\rvert\cdot U_b$
rapporto: X=a/b	$x=x_a/x_b$	e_a-e_b	$\frac{Be_a-Ae_b}{B^2}$	$\frac{\lvert B\rvert\cdot U_a+\lvert A\rvert\cdot U_b}{\lvert B^2\rvert}$

Da notare che, nella valutazione quantitativa dell'incertezza assoluta di misure indirette per prodotto e per rapporto, al posto di A e B, che sono incogniti, potremo con buona approssimazione sostituire i valori misurati x_a e x_b.

Osservazione: incertezza in una misura indiretta generica

Nel paragrafo sullo studio della propagazione degli errori nelle misure indirette, abbiamo trovato che l'errore assoluto sulla misura indiretta di X è esprimibile, in funzione degli errori assoluti sulle singole misure dirette, tramite la formula seguente:

$$E_X \cong \frac{\partial f}{\partial a}E_a + \frac{\partial f}{\partial b}E_b + \frac{\partial f}{\partial c}E_c + \dots$$

Se calcoliamo il modulo di entrambi i membri ed applichiamo la disuguaglianza triangolare così come fatto nel precedente paragrafo, abbiamo che

$$\left|E_X\right| \le \left|\frac{\partial f}{\partial a}E_a\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial b}E_b\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial c}E_c\right| + \dots \le \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right|\cdot\left|E_a\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right|\cdot\left|E_b\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right|\cdot\left|E_c\right| + \dots$$

Maggiorando gli errori assoluti con le rispettive incertezze, otteniamo che

$$\left|E_X\right| \le \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right|\cdot U_a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right|\cdot U_b + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right|\cdot U_c + \dots$$

Concludiamo perciò che l'**incertezza della generica misura indiretta** è ottenibile come

$$\boxed{U = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right|\cdot U_a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right|\cdot U_b + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right|\cdot U_c + \dots}$$

ossia come <u>somma pesata delle incertezze delle singole misure dirette</u>, dove i coefficienti di peso portano in conto la dipendenza della funzione f dalle singole grandezze di ingresso.

Possiamo a questo punto fare tre osservazioni importanti a proposito dell'incertezza (che comunque saranno riprese in seguito):

- una valutazione dell'incertezza è sempre necessaria; una misura con incertezza "completamente" sconosciuta non è una misura, ma piuttosto un numero a caso;
- dato che una incertezza è un qualunque numero maggiore dell'errore, *non ha senso chiedersi quale sia l'errore di una incertezza oppure l'incertezza di una incertezza;*
- al contrario, ha senso chiedersi se una incertezza è **corretta** (cioè se è effettivamente maggiore dell'errore) e se è **migliorabile** (ossia se si può determinare una maggiorazione ancora più stretta dell'errore).

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1