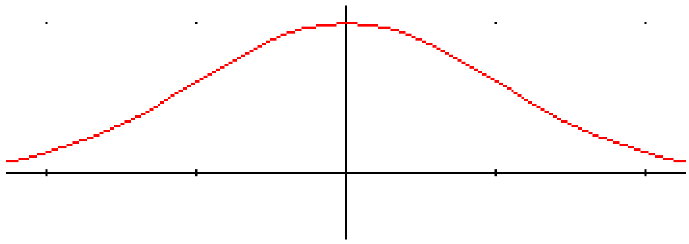
Appunti di Misure Elettriche
Distribuzione gaussiana

FUNZIONE DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI GAUSS

Si dice che una variabile aleatoria continua X ha una **distribuzione gaussiana con media** μ **e deviazione standard** σ quando la sua funzione densità di probabilità è

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

L'andamento grafico di questa funzione è quello di una *campana* centrata sul **valore medio** μ. Ad esempio, se μ=0, si ha quanto segue:

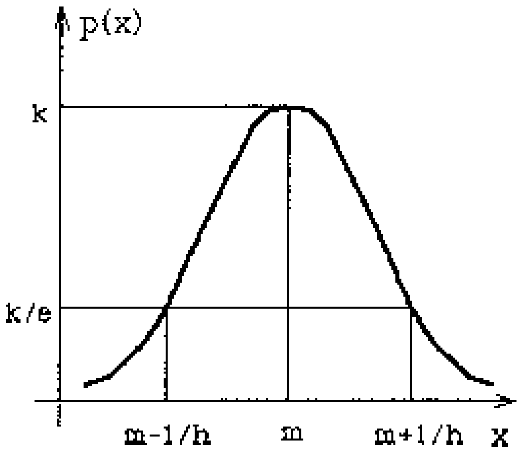


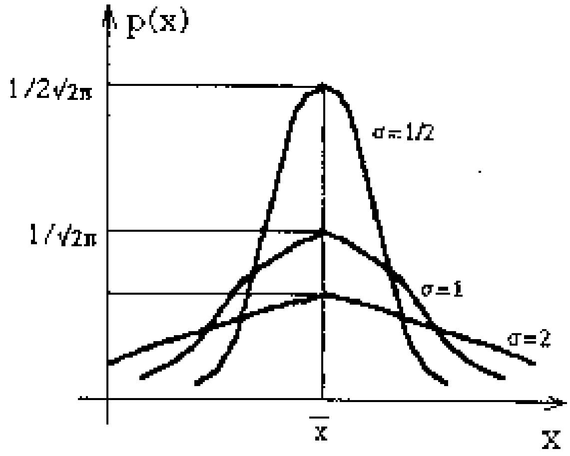
Questa *campana* è tanto più larga quanto maggiore è la **varianza** σ: quindi, una piccola varianza corrisponde ad una curva appuntita con un picco pronunciato, mentre invece una grande varianza dà luogo ad una curva più piatta, cioè con una maggiore dispersione dei valori rispetto al valore medio.

Un modo più compatto di esprimere una densità di probabilità di tipo gaussiano è il seguente:

$$p(x) = ke^{-h^2(x-\mu)^2}$$

In questo caso, la costante k indica il valore massimo di p(x), ottenuto in corrispondenza di x=μ, mentre la costante h (detta **costante di precisione**), essendo inversamente proporzionale alla varianza, fornisce le indicazioni circa la maggiore o minore larghezza della curva: un alto valore di h corrisponde ad una curva appuntita mentre un basso valore di h corrisponde ad una curva più piatta, come illustrato nella prossima figura:





L’espressione $p(x) = ke^{-h^2(x-\mu)^2}$ è quella più comoda per verificare che μ è effettivamente la media di X e per calcolare l’espressione della varianza. Cominciamo per esempio dal calcolo della media, effettuato in base alla semplice definizione:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xke^{-h^2(x-\mu)^2}dx = k\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-h^2(x-\mu)^2}dx = k\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{z}{h}+\mu\right)e^{-z^2}\frac{1}{h}dz =$$
$$= \frac{k}{h^2}\int_{-\infty}^{+\infty} ze^{-z^2}dz + \frac{k\mu}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = 0 + \frac{k\mu}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = \frac{k\mu}{h}\sqrt{\pi}$$

Si tratta ora di trovare le espressioni delle costanti k ed h. In realtà, è sufficiente trovare l’espressione di k. Infatti, affinché la funzione $p(x) = ke^{-h^2(x-\mu)^2}$ sia una densità di probabilità, il suo integrale tra -∞ a +∞ deve essere unitario:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-h^2(x-\mu)^2}dx = 1$$

E’ facile verificare che questa condizione è verificata se solo se risulta $\boxed{k = \frac{h}{\sqrt{\pi}}}$.

Sostituendo questa espressione in quella ottenuta per E[X], si trova evidentemente che E[X]=μ.
Calcoliamo adesso la varianza di X, applicando sempre la definizione:

$$var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - E[X])^2 p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 \cdot ke^{-h^2(x-\mu)^2}\cdot dx = k\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot e^{-h^2(x-\mu)^2}\cdot dx =$$
$$= k\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^2}{h^2}\cdot e^{-z^2}\cdot\frac{1}{h}dz = \frac{k}{h^3}\int_{-\infty}^{+\infty} z^2\cdot e^{-z^2}\cdot dz = \frac{k}{h^3}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{h}{h^3\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2h^2}$$

da cui chiaramente scaturisce che

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$$

Un'altra grandezza facile da calcolare è la **deviazione media** di X: infatti, ricordando che quest'ultima è data, per definizione, da

$$\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cdot |x - \mu| \cdot dx$$

abbiamo che

$$\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} k e^{-h^2(x-\mu)^2} \cdot |x-\mu| \cdot dx = k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(x-\mu)^2} \cdot |x-\mu| \cdot dx = k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2y^2} \cdot y \cdot dy = 2k\int_{0}^{+\infty} e^{-h^2y^2} \cdot y \cdot dy =$$

$$= 2k\int_{0}^{+\infty} e^{-z} \cdot y \cdot \frac{dz}{2h^2 y} = \frac{k}{h^2}\int_{0}^{+\infty} e^{-z} dz = \frac{k}{h^2} = \frac{h/\sqrt{\pi}}{h^2} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sigma \cong \frac{4}{5}\sigma$$

Abbiamo dunque trovato che *la deviazione media di X è circa i 4/5 della deviazione standard di X stessa.* Questa relazione tra deviazione media α e deviazione standard σ è molto utile nella pratica, per due ragioni:

- supponiamo di aver effettuato una serie di misure e di aver trovato che gli *errori accidentali* sono distribuiti secondo una distribuzione di Gauss; in questo caso, per calcolare σ, possiamo evitare di calcolare il quadrato degli scarti e possiamo invece calcolare prima α e poi moltiplicare per 5/4; è bene però precisare che questo discorso vale solo per la distribuzione di Gauss;
- in secondo luogo, se non si è certi a priori che gli errori accidentali sono distribuiti con legge di Gauss, si può andare a calcolare α e σ e poi verificare che il loro rapporto sia pari a 4/5.

CALCOLO DELLA DISTRIBUZIONE CUMULATIVA PER UNA VARIABILE DI GAUSS

E' noto che la *distribuzione cumulativa* di una variabile aleatoria X continua è

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx$$

Vogliamo calcolare questa funzione nel caso che X sia una variabile di Gauss. Sostituendo semplicemente l'espressione di p(x), otteniamo

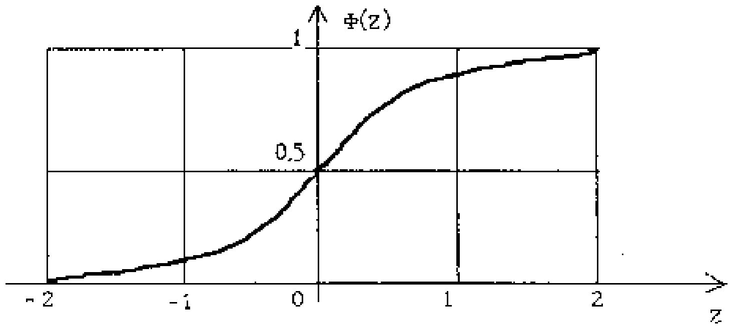
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Tutto sta a calcolare quell'integrale. Il problema è che esso non può essere calcolato con i metodi analitici elementari, per cui bisogna seguire qualche altra strada.

In particolare, si può verificare che quell'integrale può essere espresso come differenza tra due funzioni del tipo seguente:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

La funzione qui riportata è la cosiddetta **distribuzione normale standard**, ossia la distribuzione normale avente media μ=0 e varianza σ=1. La particolarità di questa funzione è che il suo valore, al variare di z, è stato calcolato e tabellato sfruttando opportuni metodi numerici. L'andamento grafico di $\phi(z)$ in funzione di z è riportato nella figura seguente:



Una delle particolarità di questa funzione è nella seguente proprietà:

$$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$$

Vediamo allora come è possibile sfruttare la funzione $\phi(z)$ per calcolare la funzione F(x).
In base ad una nota proprietà della funzione di distribuzione cumulativa, possiamo scrivere che

$$P\left(x_1 \le X \le x_2\right) = F(x_2) - F(x_1)$$

dove ovviamente

$$F(x_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad F(x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Se, in questi ultimi due integrali, poniamo $z=(x-\mu)/\sigma$, è evidente che risulta

$$P\left(x_1 \le X \le x_2\right) = F(x_2) - F(x_1) = \phi(z_2) - \phi(z_1)$$

Adesso supponiamo che sia $x_1=\mu-k\sigma$ e $x_2=\mu+k\sigma$, dove k è una costante arbitraria. E' evidente che risulta z_1=-k e z_2=k, per cui possiamo riscrivere l'ultima uguaglianza nella forma

$$P\left(\mu - k\sigma \le X \le \mu + k\sigma\right) = F(\mu - k\sigma) - F(\mu + k\sigma) = \phi(k) - \phi(-k)$$

Avendo detto prima che risulta $\phi(-z) = 1 - \phi(z)$, possiamo concludere che

$$P\left(\mu - k\sigma \le X \le \mu + k\sigma\right) = F(\mu - k\sigma) - F(\mu + k\sigma) = 2\phi(k) - 1$$

Quindi, fissate la media μ e la deviazione standard σ della distribuzione, i valori della probabilità a primo membro si ottengono semplicemente fissando k e andando a leggere, sulle tabelle citate prima, il corrispondente valore di $\phi(k)$. Andiamo allora a calcolare alcune probabilità di particolare interesse:

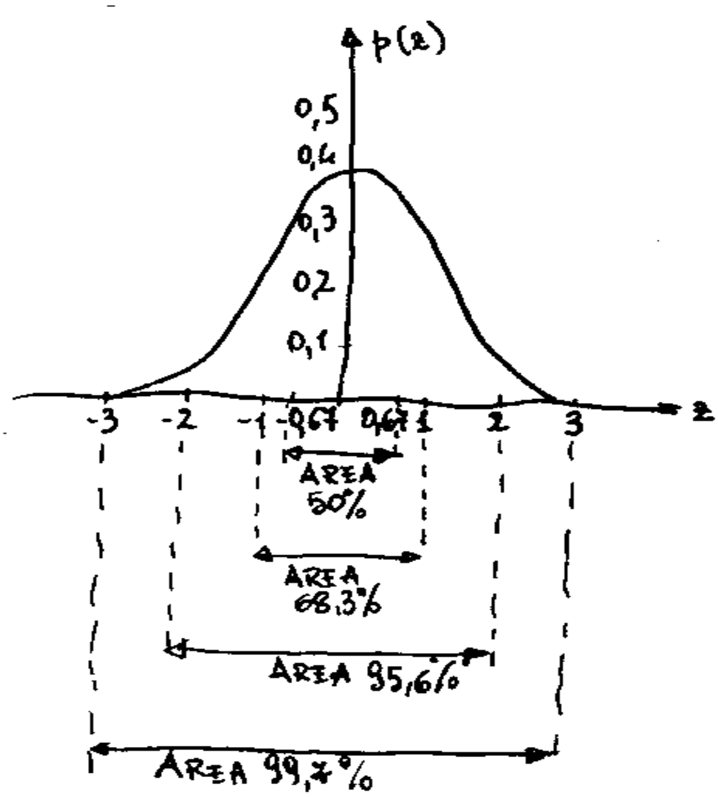
$$k=1 \rightarrow P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) = 2\phi(1)-1 = 0.683$$
$$k=2 \rightarrow P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) = 2\phi(2)-1 = 0.954$$
$$k=3 \rightarrow P(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) = 2\phi(3)-1 = 0.997$$

Queste probabilità dicono quanto segue:

- la probabilità che X cada nell'intervallo [μ-σ,μ+σ] è pari al 68,3%;
- la probabilità che X cada nell'intervallo [μ-2σ,μ+2σ] è pari al 95,4%;
- la probabilità che X cada nell'intervallo [μ-3σ,μ+3σ] è pari al 99,7%.

Gli intervalli qui riportati (tutti centrati sul valore medio μ) sono detti **intervalli di confidenza**, mentre le corrispondenti probabilità sono dette **livelli (o coefficienti) di confidenza**.

La figura seguente mostra una sorta di interpretazione grafica di questi risultati:



Non dobbiamo infatti dimenticare che

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$

ossia che le probabilità calcolate prima non sono altro che aree sottese dalla campana gaussiana p(x) e dalle ascisse x_1 ed x_2 di volta in volta specificate.

Quindi, in conclusione, *sfruttando la funzione f(z) ed i suoi valori tabellati, abbiamo informazioni molto precise, una volta note m e s, sui livelli di confidenza di X.*

FUNZIONE DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONGIUNTA

Supponiamo adesso che X ed Y siano due variabili aleatorie continue, entrambe con distribuzione gaussiana, la prima con media μ_X e varianza σ_X^2 e la seconda con media μ_Y e varianza σ_Y^2. E' possibile dimostrare che la **funzione densità di probabilità congiunta** di tali variabili aleatorie è la seguente:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}+\frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}-\frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]}$$

dove $\rho = \frac{E[(X-E(X))(Y-E(Y))]}{\sigma_X\sigma_Y}$ è il **coefficiente di correlazione** di X ed Y.

E' subito ovvio che quella espressione si semplifica notevolmente quando sia X sia Y hanno media nulla e deviazione standard unitaria, ossia quando sono entrambe delle *distribuzioni normali*: infatti, ponendo

$$\begin{cases} \mu_X = \mu_Y = 0 \\ \sigma_X = \sigma_Y = 1 \end{cases}$$

si ottiene

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[x^2+y^2-2\rho xy\right]}$$

FUNZIONE DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Siano X ed Y due variabili aleatorie generiche. Si definisce **funzione densità di probabilità condizionata** la funzione

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{d}{dx}F_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

dove

$$F_{X|Y}(x,y) = F_X\left(X \le x \middle| Y = y\right) = \lim_{\Delta y \to 0} F_X\left(X \le x \middle| y \le Y \le y + \Delta y\right)$$

Allora, è possibile dimostrare che, *se X ed Y sono entrambe con distribuzione gaussiana, anche la variabile aleatoria $Z = X|Y$, la cui funzione densità è $f_{X|Y}(x,y)$, ha distribuzione gaussiana.*

Anzi, se μ_X e σ_X^2 sono media e varianza di X e μ_Y e σ_Y^2 sono media e varianza di Y, è possibile dimostrare che la media e la varianza di Z sono le seguenti:

$$\begin{cases} \mu_Z = \mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y) \\ \sigma_Z = \sigma_X\sqrt{1-\rho^2} \end{cases}$$

COMBINAZIONE LINEARE DI VARIABILI ALEATORIE CON DISTRIBUZIONE GAUSSIANA

Sia X una variabile aleatoria continua avente distribuzione gaussiana con media μ_X e varianza σ_X^2. Consideriamo inoltre la variabile aleatoria $Y = aX + b$, dove a e b sono due qualsiasi numeri reali.

Si può facilmente dimostrare che, se Y è definita in quel modo, la sua funzione densità di probabilità, a prescindere dalla natura di X, è

$$g(y) = \frac{1}{|a|} \cdot p\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

In questo caso particolare, questa formula ci dice che, essendo X gaussiana, anche Y risulta essere gaussiana: anzi, sapendo che la densità di probabilità di X è

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

possiamo subito scrivere che

$$g(y) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu_X\right)^2}{2\sigma_X^2}}$$

Conseguenza importante di questa proprietà è che, *se X ed Y sono due variabili aleatorie entrambe con distribuzione gaussiana, risulta gaussiana anche la variabile aleatoria* $Z = aX + bY$*, ossia una qualsiasi combinazione lineare delle due.*

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1