<u>Appunti di Misure Elettriche</u>

Metodo dei minimi quadrati

La prima formulazione del **principio dei minimi quadrati** fu la seguente: *il valore più probabile di una qualunque quantità misurata è tale che la somma dei quadrati delle deviazioni delle misure da questo valore sia minimo.* Vediamo in cosa si traduce questa frase.

Supponiamo di avere **N misure ripetute** di una stessa quantità (il **misurando**), che formano perciò il **campione di misura ($X_1,X_2,\dots,X_N$)**. La differenza (o **scarto**) della generica misura X_i dal **valore più probabile X** del misurando è $X-X_i$; allora il **principio dei minimi quadrati** afferma che X è quel valore che minimizza la seguente sommatoria:

$$\sum_{i=1}^{N}(X-X_i)^2$$

Minimizzare questa sommatoria rispetto ad X significa imporre la seguente condizione:

$$\frac{d}{dX}\sum_{i=1}^{N}(X-X_i)^2=0$$

Calcoliamo allora quella derivata:

$$\frac{d}{dX}\sum_{i=1}^{N}(X-X_i)^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dX}(X-X_i)^2=\sum_{i=1}^{N}2(X-X_i)=2NX-2\sum_{i=1}^{N}X_i$$

Imponendo che la quantità ricavata sia uguale a zero, si trova evidentemente che X coincide con la **media aritmetica delle N misure** a nostra disposizione:

$$X=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i$$

Quindi, dall'applicazione del principio ai minimi quadrati deriva che <u>*il valore più probabile di una quantità misurata più volte è la media aritmetica delle misure ottenute.*</u>

Si può allora pensare ad una serie di applicazioni di questo principio. Ci interessiamo, in particolare, all'<u>applicazione del metodo dei minimi quadrati alle **equazioni lineari in due variabili**</u>.

In forma del tutto generica, una equazione lineare in due variabili può essere scritta nella forma seguente:

$$y=mx+q$$

Su un *piano cartesiano*, questa è ovviamente l'espressione di una retta con coefficiente angolare **m** e intercetta sull'asse delle ordinate pari a **q**.

Supponiamo di aver eseguito diverse misure delle variabili y ed x, al fine di aumentare la precisione con cui identificare i parametri **m** e **q**. Dato che le incognite sono due, dobbiamo avere a disposizione un numero N di misure (o meglio coppie di misure) maggiore di 2. Ciascuna coppia di misura ci darà origine ad una equazione del tipo

$$y_i = mx_i + q$$

In realtà, non è proprio così, *in quanto le N equazioni trovate non saranno in genere tutte consistenti, ma esisteranno delle* ***deviazioni*** *rispetto ai valori teorici.* In altre parole, per la generica coppia (x_i,y_i) di misure, risulterà una equazione del tipo

$$y_i + d_i = mx_i + q$$

dove d_i è appunto la deviazione.

A questo punto, in base al principio dei minimi quadrati, i valori più probabili di m e di q, ossia quelli che consentono di individuare la retta che meglio raccordi i punti sperimentali (x_i,y_i), sono quelli che minimizzano la sommatoria delle deviazioni quadratiche:

$$\sum_{i=1}^{N} d_i^2$$

Andiamo allora ad esplicitare meglio questa sommatoria e poi a calcolarne le derivate parziali rispetto ad m ed a q, in modo da uguagliarle a zero:

$$\sum_{i=1}^{N} d_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (mx_i + q - y_i)^2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial m} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} (mx_i + q - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial}{\partial m} (mx_i + q - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} 2x_i (mx_i + q - y_i) \\ \dfrac{\partial}{\partial q} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} (mx_i + q - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial}{\partial q} (mx_i + q - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} 2(mx_i + q - y_i) \end{cases}$$

Uguagliando dunque a zero le due equazioni ottenute, otteniamo il seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i (mx_i + q - y_i) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} (mx_i + q - y_i) = 0 \end{cases}$$

E' immediato trovare le soluzioni di questo sistema: in primo luogo, possiamo riarrangiare le due equazioni, scrivendo che

$$\begin{cases} m\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + q\sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = 0 \\ m\sum_{i=1}^{N} x_i + Nq - \sum_{i=1}^{N} y_i = 0 \end{cases}$$

Ponendo $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ e $\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$, possiamo ulteriormente scrivere il sistema nella forma

$$\begin{cases} m\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + qN\overline{x} - \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = 0 \\ mN\overline{x} + Nq - N\overline{y} = 0 \end{cases}$$

Ricavando ad esempio m dalla seconda equazione e sostituendo nella prima, otteniamo

$$m = \frac{\overline{y} - q}{\overline{x}} \longrightarrow \frac{\overline{y} - q}{\overline{x}} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + qN\overline{x} - \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = 0 \longrightarrow q = \frac{\frac{\overline{y}}{\overline{x}} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\frac{1}{\overline{x}} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\overline{x}} = \frac{\overline{y} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \overline{x} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\overline{x}^2}$$

Tornando adesso nell'espressione di m, otteniamo

$$m = \frac{\overline{y} - q}{\overline{x}} = \frac{\overline{y} - \frac{\overline{y} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \overline{x} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\overline{x}^2}}{\overline{x}} = \frac{1}{\overline{x}}\overline{y} - \frac{\frac{1}{\overline{x}}\overline{y} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\overline{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - N\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\overline{x}^2}$$

Concludiamo dunque che i coefficienti della retta ricercata sono i seguenti:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - N \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\overline{x}^2}$$

$$q = \frac{\overline{y} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \overline{x} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\overline{x}^2}$$

Il metodo dei minimi quadrati può anche essere generalizzato al caso in cui la relazione tra le variabili x ed y non sia lineare. Tipico esempio è quello di una **relazione di tipo polinomiale**, in cui cioè risulti

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

In questo caso, le incognite da determinare sono evidentemente gli m+1 coefficienti. Servono perciò un numero di coppie di misure (x_i,y_i) in numero N maggiore di m+1. Per quanto riguarda il modo di procedere, è lo stesso visto prima, nel senso che bisogna ipotizzare che le varie coppie di misure corrispondano a delle deviazioni tali che

$$y_i - d_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_m x_i^m$$

Esplicitando da qui l'espressione di d_i, bisogna usarla per minimizzare ancora una volta la quantità $\sum_{i=1}^{N} d_i^2$; bisogna perciò calcolare le m+1 derivate parziali di quella quantità, una rispetto a ciascun coefficiente, ed uguagliarle a zero, arrivando così ad un sistema di m+1 equazioni in m+1 incognite dal quale ricavare i coefficienti desiderati.

Il problema di questa metodologia è che i tempi di calcolo possono anche essere lunghi, per cui sono stati messi a punto degli algoritmi che accelerino la minimizzazione della funzione $\sum_{i=1}^{N} d_i^2$. queste procedure vanno sotto il nome di **tecniche di ottimizzazione mediante l'LSM** (acronimo inglese di *Least Squares Method*).

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1