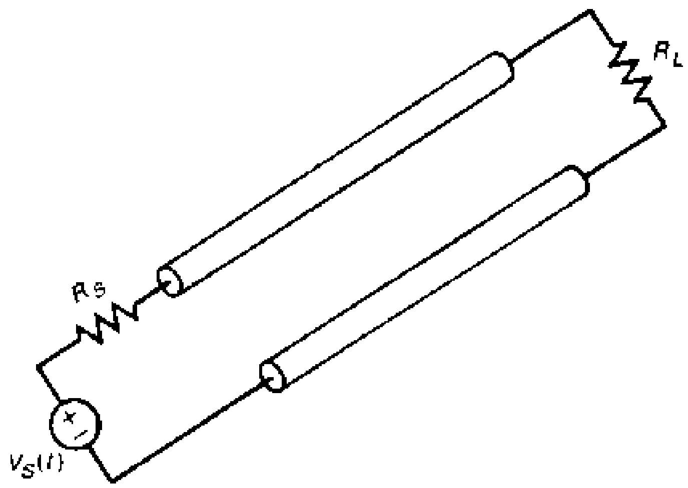
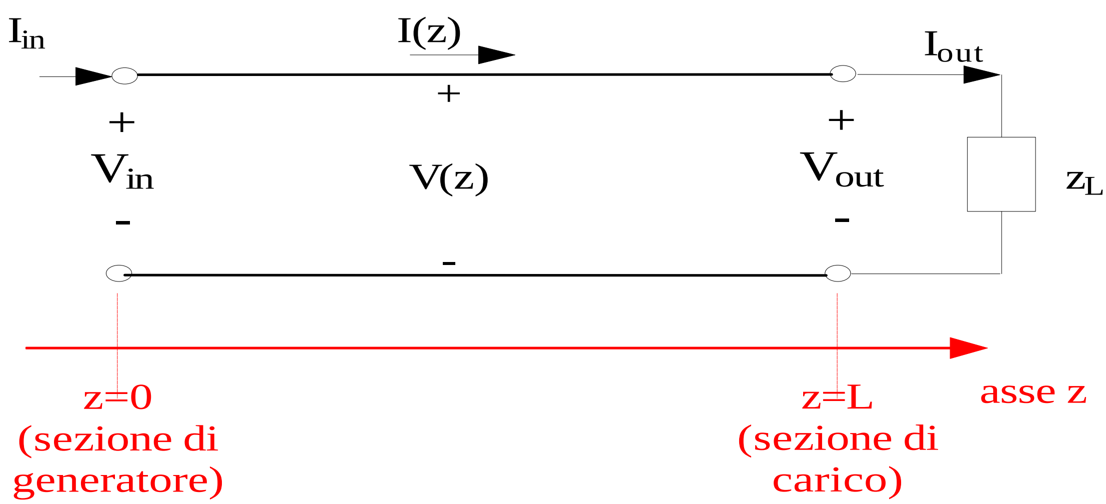
Appunti di Compatibilità Elettromagnetica

PERDITE DI POTENZA NEI CAVI

Il calcolo delle **perdite di potenza** nei cavi di interconnessione ha grande importanza, data la presenza dei cavi in tutti i sistemi di misura. Per introdurre questo argomento, dobbiamo però riprendere rapidamente alcuni concetti fondamentali relativi alle **linee di trasmissione**, la cui schematizzazione generale può essere la seguente:



Ci serve un modello elettrico (a parametri distribuiti) di questa struttura. Possiamo considerare il seguente, relativo ad una linea di trasmissione di lunghezza L:



Le grandezze che caratterizzano questo tipo di struttura sono solitamente l'**impedenza caratteristica z_C** e la **velocità di propagazione *v*** delle onde lungo la linea.

Sebbene sia importante conoscere il comportamento della linea quando i segnali di ingresso abbiano forme d'onda arbitrarie, è altrettanto importante studiarne il comportamento in **regime sinusoidale permanente**: ciò significa ipotizzare che la sorgente sia sinusoidale monofrequenziale e che ogni eventuale segnale transitorio si sia estinto.

In queste circostanze, è possibile risolvere l'**equazione delle linee** nel dominio della frequenza, ossia in termini di **fasori** associati alle tensioni ed alle correnti lungo la linea. Indicati, infatti, rispettivamente con V(z) ed I(z) tali fasori (che quindi descrivono l'andamento spaziale, ma anche temporale, della tensione e della corrente lungo la linea), si trova che essi sono dati dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + V^- e^{\alpha z} e^{j\beta z} \\ I(z) = \dfrac{V^+}{z_C} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} - \dfrac{V^-}{z_C} e^{\alpha z} e^{j\beta z} \end{cases}$$

Le quantità $\mathbf{V^+}$ e $\mathbf{V^-}$ sono costanti (in generale complesse) ed il loro valore può essere determinato solo dopo aver specificato la sorgente ed il carico connessi alla linea (si tratta cioè di fissare le *condizioni al contorno* del problema).

Il parametro α è la cosiddetta **costante di attenuazione**, associata alle perdite lungo la linea, ossia alle perdite sia nei conduttori sia nel mezzo circostante. In assenza di perdite, risulta evidentemente α**=0**. La costante α si misura in *neper/m*.

Il parametro β è invece la **costante di fase**: essa esprime la variazione di fase subita dall'onda nel suo propagarsi lungo la linea. Si misura in *rad/m*.

Le equazioni prima riportate si possono anche riscrivere nella forma seguente:

$$\begin{cases} V(z) = V_f(z) + V_b(z) \\ I(z) = \dfrac{V_f(z)}{z_C} - \dfrac{V_b(z)}{z_C} e \end{cases}$$

dove cioè si sono fatte le seguenti due posizioni:

$$\begin{cases} V_f(z) = V^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \\ V_b(z) = V^- e^{\alpha z} e^{j\beta z} \end{cases}$$

Questo per evidenziare che $\mathbf{V_f(z)}$ è un'**onda progressiva di tensione**, mentre $\mathbf{V_b(z)}$ è un'**onda regressiva di tensione**. Per comprendere il significato di queste dizioni, basta convertire le espressioni di V(z) ed I(z) nel dominio del tempo, tramite le classiche formule di antitrasformazione (bisogna moltiplicare i fasori per il termine esponenziale $e^{j\omega t}$, che tiene conto del regime sinusoidale, e poi calcolare la parte reale del prodotto così ottenuto):

$$\begin{cases} v(z,t) = \mathrm{Re}\left\{V(z)e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{V^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} + V^- e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\omega t}\right\} \\ i(z,t) = \left\{I(z)e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\dfrac{V^+}{z_C} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} - \dfrac{V^-}{z_C} e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\omega t}\right\} \end{cases}$$

Facendo gli opportuni passaggi su queste espressioni (tenendo conto che le quantità V^+, V^- e z_C sono complesse, per cui possiedono un modulo ed una fase), si trova immediatamente che

$$\begin{cases} v(z,t) = \left|V^+\right| e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z + \theta^+\right) + \left|V^-\right| e^{\alpha z} \cos\left(\omega t + \beta z + \theta^-\right) \\ i(z,t) = \dfrac{\left|V^+\right|}{\left|z_C\right|} e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z + \theta^+ - \theta_{z_C}\right) - \dfrac{\left|V^-\right|}{\left|z_C\right|} e^{\alpha z} \cos\left(\omega t + \beta z + \theta^- - \theta_{z_C}\right) \end{cases}$$

Queste espressioni sono evidentemente del tutto analoghe tra loro. Consideriamo allora solo l'espressione della tensione. Essa ci dice quanto segue:

- l'onda progressiva è $\left|V^+\right| e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z + \theta^+\right)$: al crescere del tempo t, è necessario aumentare il valore di z al fine di mantenere costante l'argomento del Coseno; così facendo, si segue il movimento di un punto dell'onda. Possiamo dunque affermare che si tratta di un'onda che si muove lungo la direzione positiva dell'asse z, cioè si dirige dalla sorgente verso il carico: da qui il termine **progressiva**;
- viceversa, l'onda regressiva è $\left|V^-\right| e^{\alpha z} \cos\left(\omega t + \beta z + \theta^-\right)$: al crescere del tempo t, se vogliamo seguire un punto dell'onda dobbiamo diminuire il valore di z (al fine sempre di mantenere costante l'argomento del Coseno). Si tratta quindi di un'onda che si muove lungo la direzione negativa dell'asse z (dal carico verso la sorgente): da qui il termine **regressiva**.

Si definisce adesso **coefficiente di riflessione per la tensione** la seguente quantità:

$$\Gamma(z) = \frac{V_b(z)}{V_f(z)} = \frac{V^-}{V^+} e^{2\alpha z} e^{j2\beta z}$$

Si tratta dunque del rapporto tra l'onda regressiva e quella progressiva di tensione e risulta quindi variabile con la sezione z che si considera sulla linea. Se consideriamo, in particolare, la sezione di carico (z=L), si ottiene

$$\Gamma_L = \Gamma(L) = \frac{V_b(L)}{V_f(L)} = \frac{V^-}{V^+} e^{2\alpha L} e^{j2\beta L}$$

Facendo qualche passaggio in più, si trova che il **coefficiente di riflessione al carico** è

$$\boxed{\Gamma_L = \frac{z_L - z_C}{z_L + z_C}}$$

Questa relazione è molto importante, in quanto ci dice che, quando $\mathbf{z_L = z_C}$, risulta $\mathbf{\Gamma_L = 0}$: si tratta della condizione di adattamento tra linea e carico, in corrispondenza della quale non c'è onda regressiva lungo la linea, ma solo onda progressiva:

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = V_f(z) \\ I(z) = \dfrac{V^+}{z_C} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = \dfrac{V_f(z)}{z_C} \end{cases}$$

Ciò significa che tutta la potenza disponibile al carico viene effettivamente ceduta al carico stesso, senza che una quota parte di essa (rappresentata appunto da Γ_L) torni indietro verso la sorgente.

E' possibile esprimere il coefficiente di riflessione nella generica sezione z in funzione del coefficiente di riflessione al carico: si trova infatti che

$$\Gamma(z) = \Gamma_L e^{2\alpha(z-L)} e^{j2\beta(z-L)}$$

Si può inoltre utilizzare $\Gamma(z)$ per esprimere in altro modo i fasori della tensione e della corrente lungo la linea: infatti, in base all'espressione appena riportata per $\Gamma(z)$ si trova facilmente che

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}\left[1+\Gamma(z)\right] = V_f(z)\left[1+\Gamma(z)\right] \\ I(z) = \dfrac{V^+}{z_C} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}\left[1-\Gamma(z)\right] = \dfrac{V_f(z)}{z_C}\left[1-\Gamma(z)\right] \end{cases}$$

Si definisce inoltre **impedenza di ingresso** in una generica sezione della linea la seguente quantità, data dal rapporto tra i fasori della tensione e della corrente in quella sezione:

$$\boxed{z_{in}(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = z_C \frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)}}$$

Nel caso di linea adattata (z_L=z_C), abbiamo detto che Γ_L=0, da cui consegue anche che $\Gamma(z)$=0 e quindi che l'impedenza di ingresso coincide con l'impedenza caratteristica della linea (e quindi anche con quella di carico).

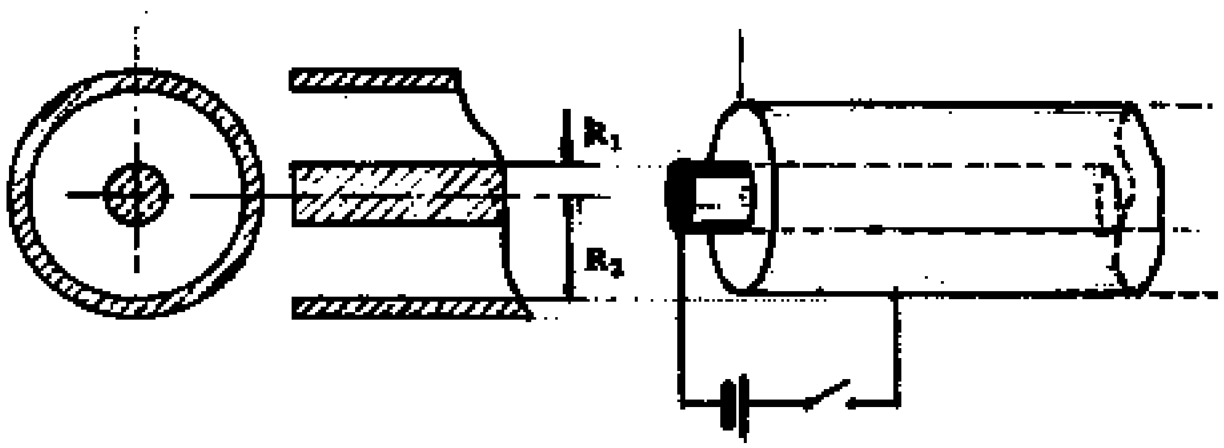
La potenza media che attraversa, procedendo verso destra, una generica sezione della linea è data dalla seguente espressione generale:

$$\boxed{P_{media}(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{V(z) I^*(z)\right\}}$$

dove $I^*(z)$ è il complesso coniugato del fasore della corrente.

Tutti questi concetti introduttivi ci consentono di introdurre e caratterizzare le perdite di potenza nei cavi usati nei sistemi di misura (e non solo).

Tipici cavi per interconnessioni sono quelli di tipo **coassiale**, di cui la figura seguente propone una schematizzazione (da diverse sezioni):



Abbiamo dunque sostanzialmente un sistema formato da <u>due conduttori cilindrici coassiali</u>, di raggio R_1 ed R_2: il conduttore più esterno prende il nome di **calza** (o semplicemente *schermo*), mentre il conduttore interno viene detto **anima** del cavo. Le onde si propagano nello spazio interno alla calza e tale spazio è solitamente occupato da un dielettrico caratterizzato da costanti relative $\boldsymbol{\varepsilon_r}$ e $\boldsymbol{\mu_r}$**=1**. Ad esempio, nel caso del cavo **RG-58U**, il dielettrico è il *Teflon* e la sua permettività relativa vale ε_r=2.1.

Le costanti $\boldsymbol{\varepsilon_r}$ (permettività relativa) e $\boldsymbol{\mu_r}$ (permeabilità relativa) determinano la **velocità di propagazione** delle onde di tensione e di corrente nel mezzo: tale velocità è infatti data da

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$$

dove ovviamente c è velocità della luce nel vuoto, pari a $3*10^8$ metri/sec.

I costruttori solitamente specificano le caratteristiche dei cavi coassiali fornendo:

- il *modulo dell'impedenza caratteristica* z_C nell'ipotesi di basse perdite (ad esempio, per il cavo RG-58U risulta $|z_C|=50\Omega$);
- la *velocità di propagazione* percentuale rispetto alla velocità di propagazione del vuoto (per il cavo RG-58U risulta v=0.69c);
- il valore delle *perdite* per un cavo di 100 ft a determinate frequenze.

Occupiamoci allora di quest'ultimo aspetto.

Nelle linee di trasmissione esistono <u>due tipi di perdite</u>: quelle <u>all'interno dei conduttori</u> e quelli <u>nel dielettrico circostante</u>. Tuttavia, alle frequenze di normale funzionamento, le perdite nei conduttori rappresentano sicuramente l'effetto dominante.

La resistenza dei conduttori aumenta, per **effetto pelle**, proporzionalmente alla radice quadrata della frequenza; *nonostante sia nota la legge di proporzionalità, la perdita nel cavo dovrebbe essere specificata per ogni frequenza a cui il cavo viene utilizzato. Normalmente, i costruttori ne forniscono i valori solo per alcune frequenze specifiche:* ad esempio, la perdita nel cavo coassiale RG-58U, alla frequenza di 100 MHz, è di 4.5 dB/100 ft.

E' importante inoltre sottolineare che la specifica delle perdite fa riferimento ad una **cavo adattato**, ossia presuppone che risulti $\mathbf{z_C=z_L}$, dove z_L è l'impedenza appunto del **carico**: sotto questa condizione, abbiamo visto prima che non ci sono riflessioni di energia in corrispondenza del carico (Γ_L=0) e <u>la linea è percorsa solo da onde progressive</u>.

Mettiamoci dunque nell'ipotesi di cavo adattato. Consideriamo l'espressione della potenza media precedentemente citata:

$$P_{media}(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{V(z)I^*(z)\right\}$$

Dato l'adattamento, i fasori associati alla tensione ed alla corrente sono

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \\ I(z) = \dfrac{V^+}{z_C} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \end{cases}$$

Eseguendo allora la moltiplicazione necessaria al calcolo della potenza, abbiamo quanto segue:

$$P_{media}(z)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{V(z)I^*(z)\right\}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{V^+e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}\cdot\left[\frac{V^+}{z_C}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}\right]^*\right\}=\frac{1}{2}e^{-2\alpha z}\,\mathrm{Re}\left\{V^+\cdot\left[\frac{V^+}{z_C}\right]^*\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-2\alpha z}\left|V^+\right|^2\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{z_C^*}\right\}=\frac{1}{2}e^{-2\alpha z}\frac{\left|V^+\right|^2}{\left|z_C\right|}\cos\theta_{z_C}$$

Calcolando questa quantità per z=0, otteniamo la potenza fornita in ingresso al cavo:

$$P_{media,in}=P_{media}(z=0)=\frac{1}{2}\frac{\left|V^+\right|^2}{\left|z_C\right|}\cos\theta_{z_C}$$

Analogamente, prendendo z=L otteniamo la potenza fornita dal cavo al carico:

$$P_{media,out}=P_{media}(z=L)=\frac{1}{2}e^{-2\alpha L}\frac{\left|V^+\right|^2}{\left|z_C\right|}\cos\theta_{z_C}$$

La differenza tra queste due quantità è dunque la **perdita di potenza** nel cavo, espressa chiaramente in Watt:

$$P_{media,in}-P_{mediaout}=\frac{1}{2}\frac{\left|V^+\right|^2}{\left|z_C\right|}\cos\theta_{z_C}-\frac{1}{2}e^{-2\alpha L}\frac{\left|V^+\right|^2}{\left|z_C\right|}\cos\theta_{z_C}=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2\alpha L}\right)\frac{\left|V^+\right|^2}{\left|z_C\right|}\cos\theta_{z_C}$$

In realtà, i costruttori non usano questa espressione per caratterizzare la perdita di un cavo; al contrario, essi fanno riferimento alla cosiddetta **attenuazione**, definita come il rapporto tra la potenza in ingresso e quella in uscita:

$$\boxed{\text{attenuazione}=\frac{P_{media,in}}{P_{media,out}}=e^{2\alpha L}}$$

Generalmente, questo parametro viene misurato in dB per unità di lunghezza del cavo, per cui parliamo di **attenuazione specifica in dB**: in pratica, dato che

$$\text{attenuazione in dB}=10\log_{10}e^{2\alpha L}=20\cdot\alpha\cdot L\cdot\log_{10}e=8.686\cdot\alpha\cdot L\qquad\left[\frac{dB}{ft}\right]$$

l’attenuazione specifica è

$$(\alpha_S)_{dB}=\frac{\text{attenuazione in dB}}{L}=8.686\cdot\alpha$$

Convenzionalmente, L viene fissata a **100 ft**, per cui abbiamo che

$$(\alpha_S)_{dB/100ft}=\frac{\text{attenuazione in dB}}{100}=8.686\cdot\alpha\quad\left[\frac{dB}{100\,ft}\right]$$

Quindi, riepilogando, il dato specificato dai costruttori è $(\alpha_S)_{dB/100ft}$: ad esempio, per il cavo RG-58U alla frequenza di 100 MHz viene detto che $\mathbf{(\alpha_S)_{dB/100ft}=4.5dB/100ft}$. Da questo dato, si può ottenere la costante di attenuazione del cavo:

$$\alpha = \frac{(\alpha_S)_{dB/100ft}}{8.686 \cdot 100} = \frac{4.5}{8.686 \cdot 100} = 5.18 \cdot 10^{-3} \quad \left[\frac{\text{neper}}{\text{ft}}\right]$$

Se invece moltiplichiamo l'attenuazione specifica $(\alpha_S)_{dB/100ft}$ per la lunghezza effettiva del cavo (rapportata a 100 ft), otteniamo direttamente l'attenuazione del cavo in termini di dB (sempre per quella specificata frequenza):

$$\boxed{\alpha_{dB} = (\alpha_S)_{dB/100ft} \cdot \frac{L}{100} \qquad [dB]}$$

Ad esempio, un cavo RG-58U, che alla frequenza di 100MHz presenta $(\alpha_S)_{dB/100ft}$=4.5dB/100ft, lungo 30 ft introduce una attenuazione complessiva

$$\alpha_{dB} = 4.5 \cdot \frac{30}{100} = 1.35\,dB$$

Per concludere, è molto importante ricordare che *la caratterizzazione della perdita di potenza di un cavo fa riferimento al fatto che esso sia adattato ($z_L=z_C$) al carico. In caso contrario, la misura delle grandezze sopra indicate non ha niente a che vedere con la perdita di potenza del cavo.*

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1