

Traduzione dal testo “**Discrete Time Signal Processing**”
di *Oppenheim-Schafer* (ed. Prentice Hall)

Capitolo 5.3

Frequency response for rational system functions

5.3.1 Risposta in frequenza per un singolo polo o zero	1
5.3.2 Esempi con poli e zeri multipli	8
<i>Example 5.7</i>	8
<i>Example 5.8</i>	11
<i>Example 5.9</i>	11

Risposta in frequenza per sistemi tempo-discreti

5.3.1 RISPOSTA IN FREQUENZA PER UN SINGOLO POLO O ZERO

Per ottenere ulteriori informazioni sulle proprietà delle risposte in frequenza dei sistemi stabili, lineari e tempo invarianti con funzioni di rete razionali, è utile per prima cosa esaminare le proprietà di un singolo fattore del tipo $1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}$, dove r è il raggio e θ è l'angolo del polo o dello zero nel piano z . Questo fattore caratterizza sia un polo che uno zero di raggio r ed angolo θ nel piano z .

Il modulo al quadrato di un tal fattore è

$$\left|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}\right|^2 = (1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})(1 - re^{-j\theta}e^{j\omega}) = 1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta) \quad (5.64)$$

Poiché per una grandezza complessa qualsiasi si ha:

$$10 \log_{10} |C|^2 = 20 \log_{10} |C|$$

il modulo logaritmico in dB è

$$20 \log_{10} \left|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}\right| = 10 \log_{10} [1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)] \quad (5.65)$$

La fase per un fattore siffatto è

$$\text{ARG}(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}) = \arctan \frac{r \cdot \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cdot \cos(\omega - \theta)} \quad (5.66)$$

Differenziando il secondo membro dell' Eq.(5.66) (tranne che nelle discontinuità) otteniamo il ritardo di gruppo di tale fattore:

$$\text{grd}(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}) = \frac{r^2 - r \cdot \cos(\omega - \theta)}{1 + r^2 - 2r \cdot \cos(\omega - \theta)} = \frac{r^2 - r \cdot \cos(\omega - \theta)}{|1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}|^2} \quad (5.67)$$

Le funzioni nelle Equazioni (5.64)-(5.67) sono, ovviamente, periodiche in ω con periodo 2π . La Figura 5.5(a) mostra un grafico dell' Equazione (5.65) in funzione di ω lungo un periodo ($0 \leq \omega \leq 2\pi$) per alcuni valori di θ per $r = 0.9$.

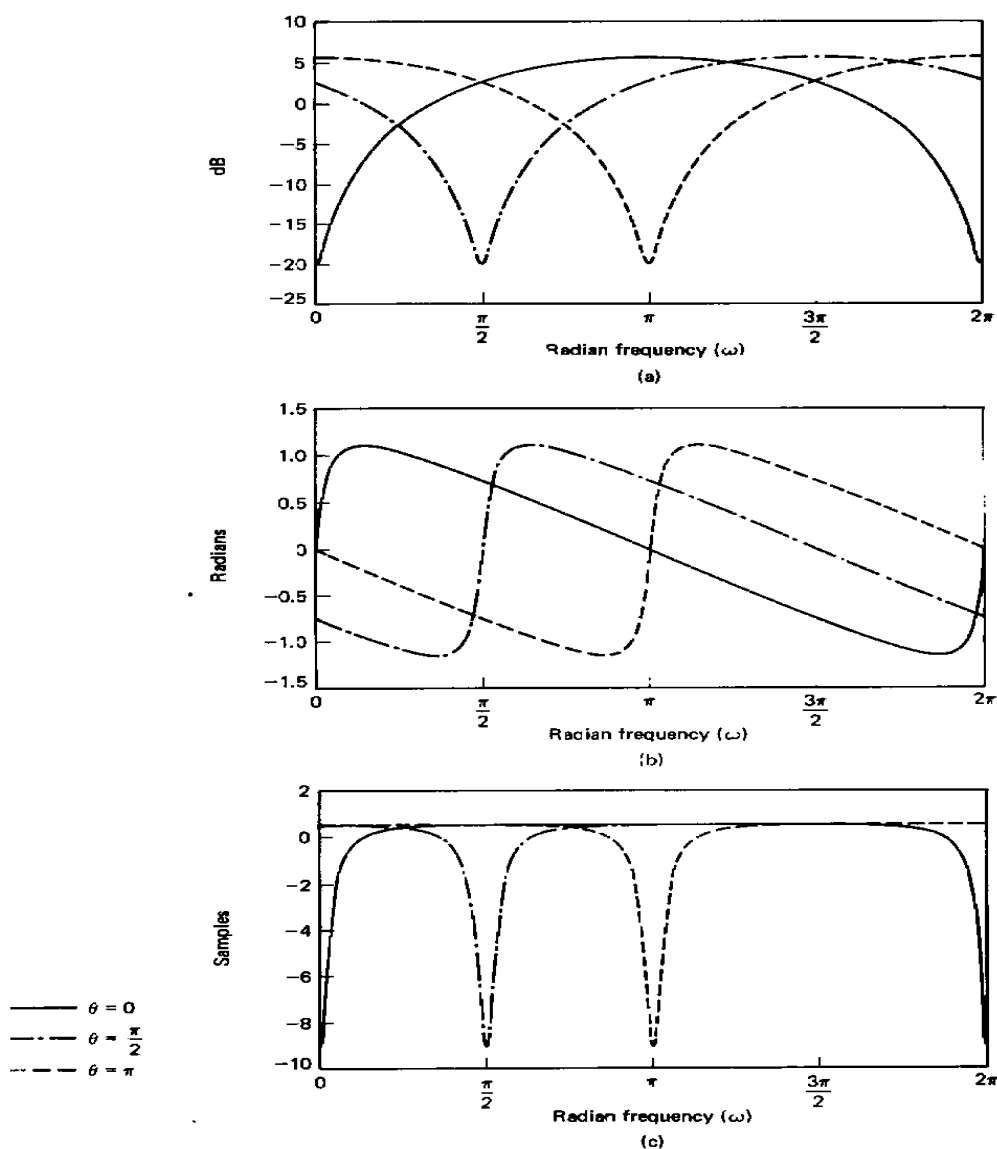


Figure 5.5 Frequency response for a single zero, with $r = 0.9$ and the three values of θ shown on the figure. (a) Log magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.

Notare che la funzione cala bruscamente nelle vicinanze di $\omega=\theta$. Inoltre notiamo dall'Equazione (5.65) che quando r è fissato, il modulo logaritmico è una funzione di $(\omega-\theta)$, così che, appena θ varia, viene traslato in frequenza.

In generale, il massimo valore dell' Eq. (5.65) si trova in $(\omega - \theta) = \pi$ e vale

$$10 \log_{10}(1 + r^2 + 2r) = 20 \log_{10}(1 + r)$$

che per $r = 0.9$ vale 5.57 dB. Analogamente il valore minimo dell' Eq. (5.65), che è collocato in $\omega=\theta$, vale

$$10 \log_{10}(1 + r^2 - 2r) = 20 \log_{10} |1 - r|$$

che vale -20 dB per $r = 0.9$. Notare che il grafico della funzione modulo al quadrato nell' Eq. (5.64) appare simile alla Fig. 5.5(a) se non per il fatto di avere un più ampio intervallo relativo di valori. Quindi il suo grafico appare più ripido per gli stessi valori di r .

La Figura 5.5(b) mostra la funzione fase nell' Eq.(5.66) come una funzione di ω per $r = 0.9$ e alcuni valori di θ . Notare che la fase è nulla in $\omega=0$ e che fissato r , la funzione trasla con θ . La Figura 5.5(c) mostra la funzione ritardo di gruppo dell' Eq.(5.67) per le stesse condizioni su r e θ . Notare che l' elevata pendenza positiva della fase per $\omega=\theta$ corrisponde ad un sostanzioso picco negativo nella funzione ritardo di gruppo in $\omega=\theta$.

Una semplice costruzione geometrica è spesso molto utile per capire qualitativamente l' andamento delle funzioni risposte in frequenza direttamente dal diagramma poli-zeri. La procedura si basa sul fatto che la risposta in frequenza corrisponde alla funzione di rete calcolata sul cerchio unitario nel piano z e che il valore complesso di ciascun polo e zero può essere rappresentato da un vettore nel piano z che va dal polo o dallo zero verso un punto sul cerchio unitario. Illustriamo per prima cosa la procedura per funzioni di rete del primo ordine del tipo

$$H(z) = 1 - re^{j\theta} z^{-1} = \frac{z - re^{j\theta}}{z} \quad r < 1 \quad (5.68)$$

Nella Sezione 5.3.2 considereremo esempi di ordine più alto. Un tale fattore ha un polo in $z = 0$ e uno zero in $z = re^{j\theta}$ come illustrato in Fig. 5.6:

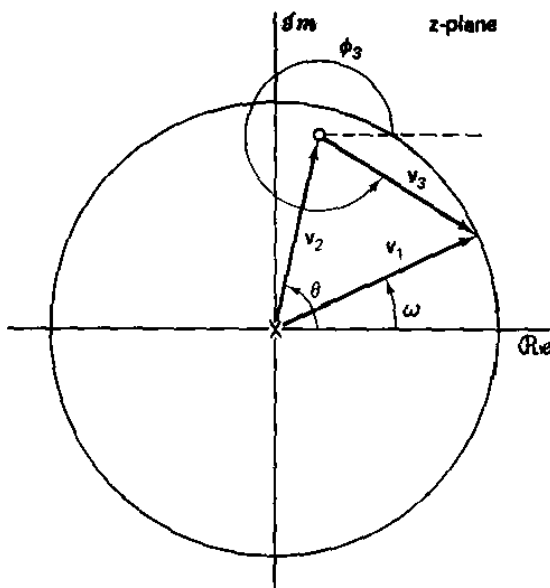


Figure 5.6 z -plane vectors for a first-order system function evaluated on the unit circle, with $r < 1$.

In questa figura sono anche indicati i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, e $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, che rappresentano i numeri complessi $e^{j\omega}$, $re^{j\theta}$ e $(e^{j\omega} - re^{j\theta})$, rispettivamente. In termini di questi vettori, il modulo del numero complesso $\frac{e^{j\omega} - re^{j\theta}}{e^{j\omega}}$ è il rapporto del modulo dei vettori $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_1$, cioè:

$$\left| \frac{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}}{1} \right| = \left| \frac{e^{j\omega} - re^{j\theta}}{e^{j\omega}} \right| = \frac{|\mathbf{v}_3|}{|\mathbf{v}_1|} \quad (5.69)$$

oppure, poiché $|\mathbf{v}_1| = 1$, l' Eq (5.69) è semplicemente uguale a $|\mathbf{v}_3|$. La corrispondente fase è

$$\angle(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}) = \angle(e^{j\omega} - re^{j\theta}) - \angle e^{j\omega} = \angle \mathbf{v}_3 - \angle \mathbf{v}_1 = \phi_3 - \phi_1 = \phi_3 - \omega \quad (5.70)$$

Tipicamente un vettore come $\mathbf{v}_3$ che va dallo zero al cerchio unitario si chiama **vettore zero**, e un vettore che va dal polo al cerchio unitario si chiama **vettore polo**. Quindi il contributo di un singolo fattore zero $(1 - re^{j\theta}z^{-1})$ alla funzione modulo alla frequenza ω è pari alla lunghezza del vettore zero $\mathbf{v}_3$ che va dallo zero al punto $z = e^{j\omega}$ sul cerchio unitario. Il vettore ha una lunghezza minima quando $\omega = \theta$. Ciò giustifica il calo repentino della funzione modulo in $\omega = \theta$ in Fig 5.5(a). Notare che il vettore polo $\mathbf{v}_1$ che va dal polo in $z = 0$ a $z = e^{j\omega}$ ha sempre lunghezza unitaria. Quindi non ha alcun effetto sul modulo della risposta. L' Equazione (5.70) afferma che la funzione fase è uguale alla differenza tra l' angolo del vettore zero che va dallo zero in $re^{j\theta}$ al punto $z = e^{j\omega}$ e l' angolo del vettore polo che va da $z = 0$ al punto $z = e^{j\omega}$.

Il diagramma poli-zeri per il caso $\theta = \pi$ è mostrato in Fig. 5.7, e i vettori polo e zero sono mostrati per due differenti valori di ω :

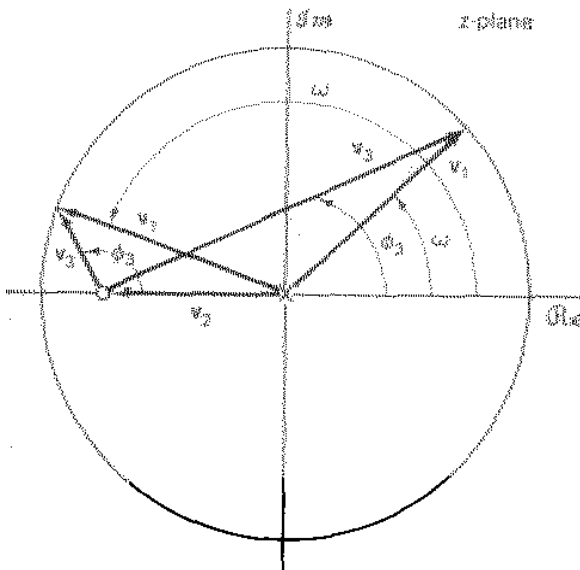


Figure 5.7 *z*-plane vectors for a first-order system function evaluated on the unit circle, with $\theta = \pi$, $r < 1$. The pole vector $\mathbf{v}_1$ and the zero vector $\mathbf{v}_3$ are shown for two different values of ω .

Chiaramente, appena ω aumenta da zero il modulo del vettore $\mathbf{v}_3$ diminuisce fino a raggiungere il minimo in $\omega = \pi$ e ciò tiene conto dell' andamento della curva corrispondente a $\theta = \pi$ in Fig 5.5(a). L' angolo del vettore $\mathbf{v}_3$ in Fig. 5.7 aumenta, all' inizio, più lentamente di ω così che la curva della fase parte negativa; poi quando ω è prossima a π , l' angolo del vettore $\mathbf{v}_3$ aumenta più rapidamente di ω e ciò tiene conto della ripida pendenza positiva della funzione fase nell' intorno di $\omega = \pi$. Notare che quando $\omega = \pi$ gli angoli dei vettori $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_1$ sono uguali così che la fase totale è nulla.

La dipendenza dei contributi dalla risposta in frequenza di ciascun fattore $1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}$ dal raggio r è mostrata in Fig. 5.8 per $\theta = \pi$ e per alcuni valori r :

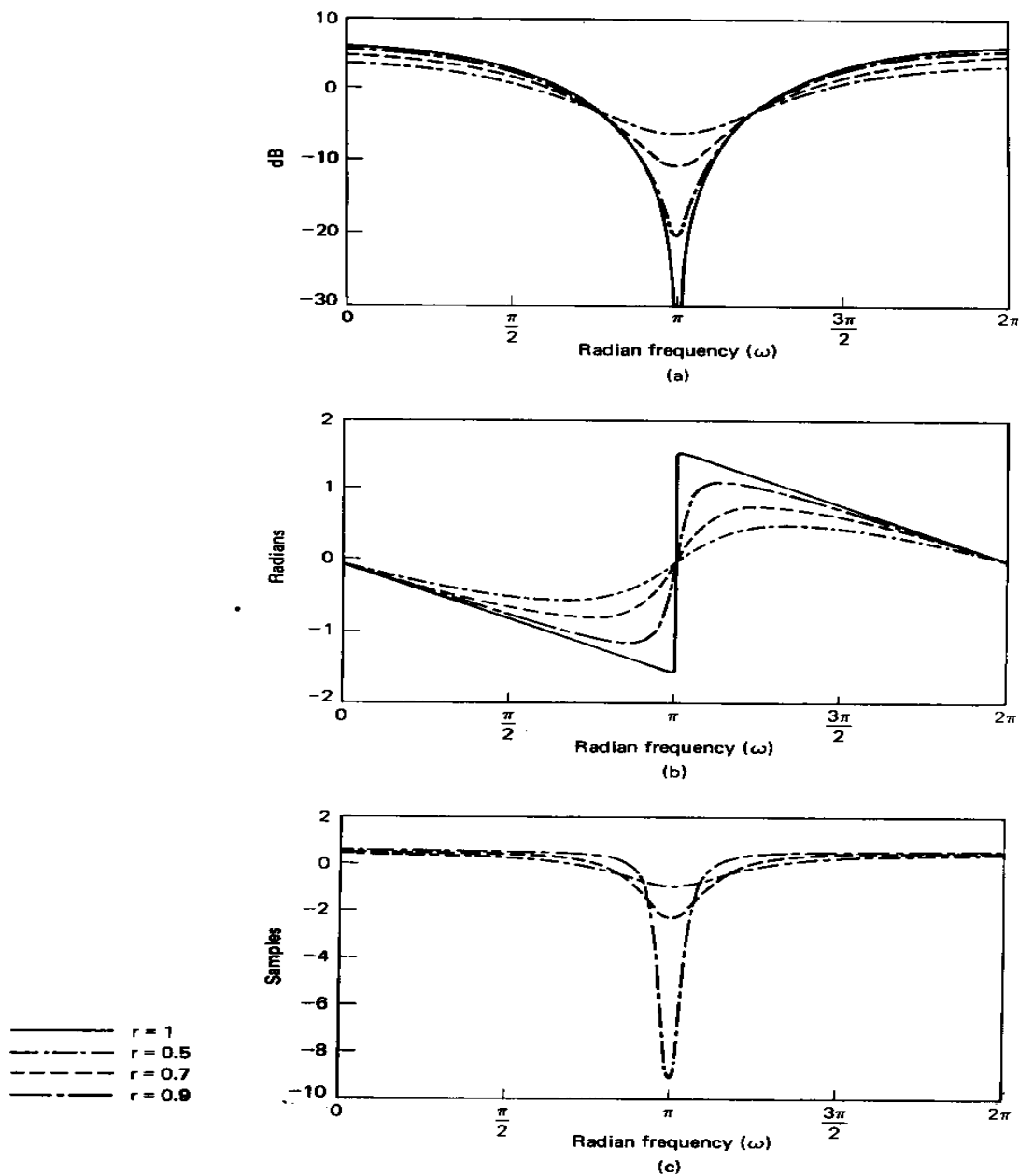


Figure 5.8 Frequency response for a single zero, with $\theta = \pi$, $r = 1, 0.9, 0.7$, and 0.5 . (a) Log magnitude. (b) Phase. (c) Group delay for $r = 0.9, 0.7$, and 0.5 .

Notare che la funzione modulo logaritmico raffigurata in Fig. 5.8(a) cala più bruscamente appena r diviene prossimo a 1; infatti, il modulo in dB tende a $-\infty$ in $\omega = \theta$ per $r \rightarrow 1$. La funzione fase disegnata in Fig. 5.8(b) ha pendenza positiva nell'intorno $\omega = \theta$, che diventa infinita per $r \rightarrow 1$. Quindi per $r = 1$, la funzione fase è discontinua con un salto di π radianti in $\omega = \theta$. Lontano da $\omega = \theta$ la pendenza della funzione fase è negativa. Poiché il ritardo di gruppo è l'opposto della pendenza della curva della fase, il ritardo di gruppo è negativo intorno a $\omega = \theta$ e cala bruscamente per $r \rightarrow 1$. La Figura 5.8(c) mostra che appena ci allontaniamo da $\omega = \theta$, il ritardo di gruppo diventa positivo e relativamente piatto. Quando $r = 1$, il ritardo di gruppo è uguale a $1/2$ ovunque eccetto che per $\omega = \theta$, dove è indefinito.

La costruzione geometrica per uno zero sul cerchio unitario a $z = -1$ è mostrata in figura 5.9:

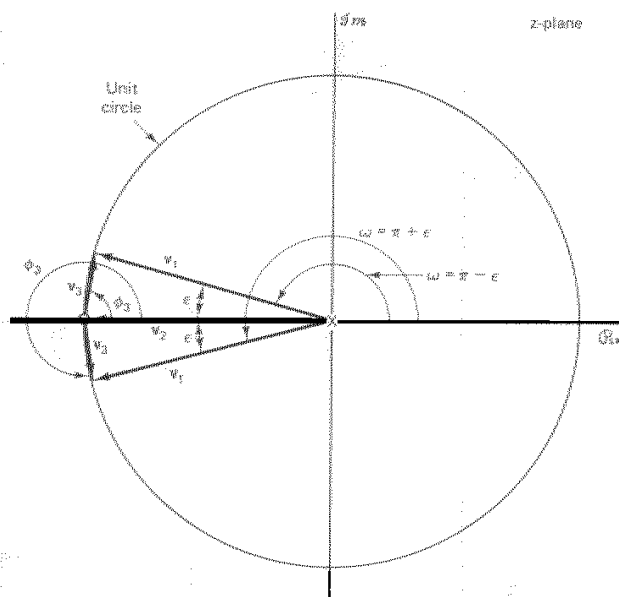


Figure 5.9 z-plane vectors for a zero at $z = -1$ for two different frequencies close to π ($\omega = \pi - \epsilon$ and $\omega = \pi + \epsilon$).

Sono indicati i vettori per due differenti frequenze, $\omega = (\pi - \epsilon)$ e $\omega = (\pi + \epsilon)$, con ϵ piccolo. Si possono fare due osservazioni. Per prima cosa, la lunghezza del vettore v_3 tende a zero per ω che approssima l'angolo del vettore zero ($\epsilon \rightarrow 0$).

Quindi il contributo moltiplicativo alla risposta in frequenza è nullo (-∞ dB).

Inoltre, il vettore v_3 cambia il suo angolo discontinuamente di π radianti appena ω va da $(\pi - \epsilon)$ a $(\pi + \epsilon)$.

Le figure 5.5 e 5.8 si riferiscono a $r \leq 1$. Se $r > 1$, la funzione modulo in dB si comporta in modo simile al caso $r < 1$, cioè cala in modo sensibile per $r \rightarrow 1$, come mostrato in figura 5.10(a):

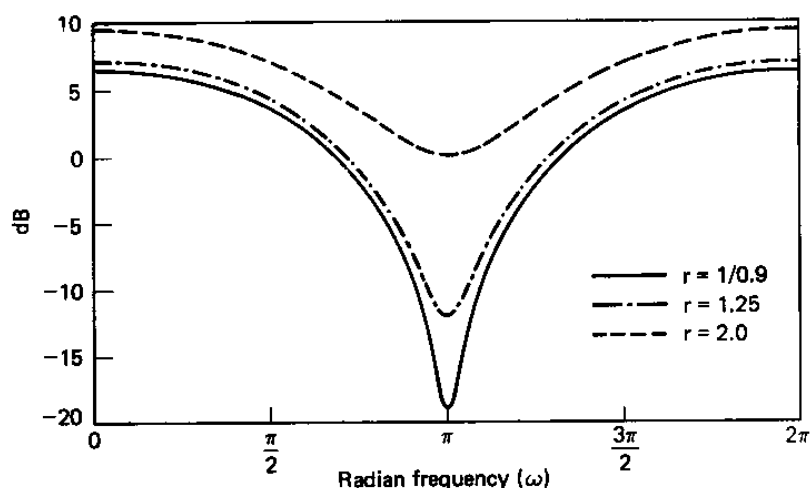


Figure 5.10 Frequency response for a single real zero outside the unit circle with $\theta = \pi$, $r = 1/0.9, 1.25, 2$. (a) Log magnitude.

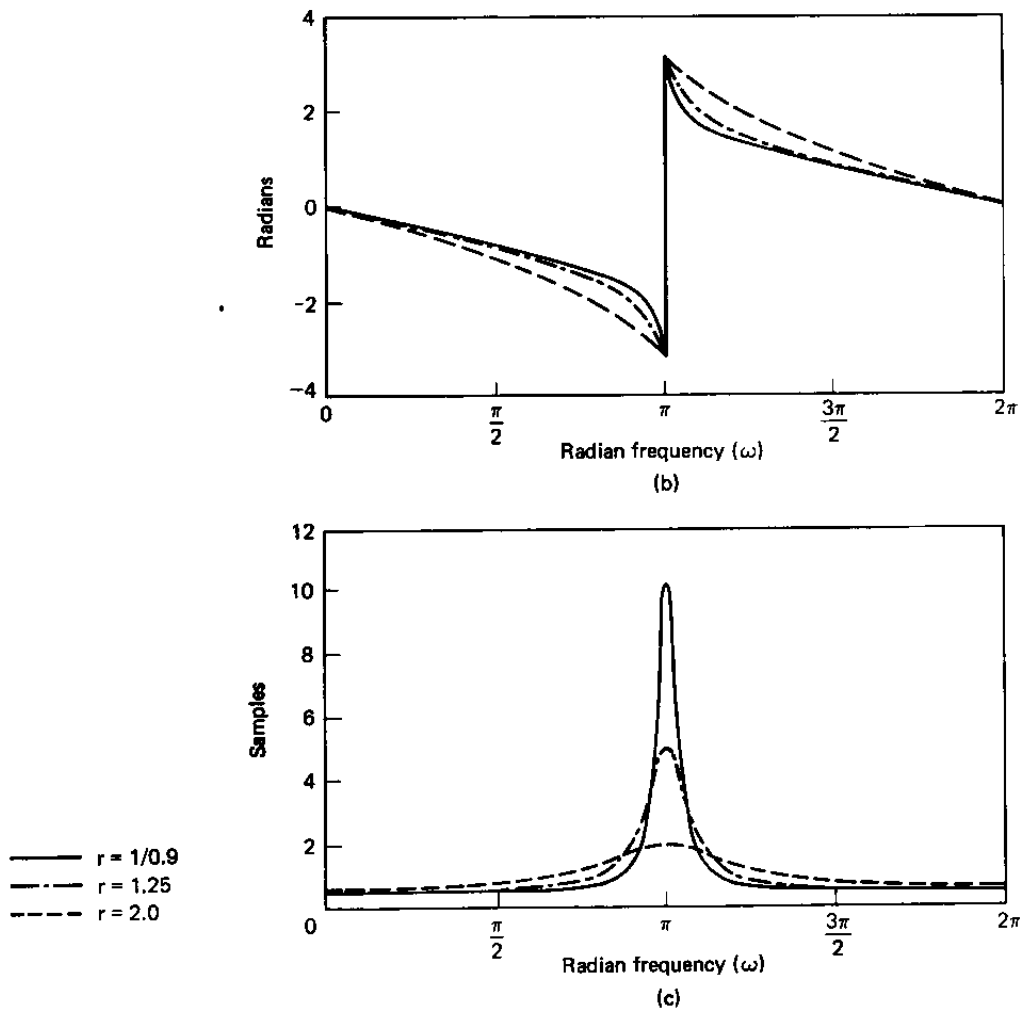


Figure 5.10 Frequency response for a single real zero outside the unit circle with $\theta = \pi$, $r = 1/0.9, 1.25, 2$. (a) Log magnitude. (b) Phase (principal value). (c) Group delay.

La funzione fase in Fig. 5.10(b) mostra una discontinuità di 2π radianti a $\omega = \theta$ per tutti i valori di $r > 1$. L'origine di questa discontinuità può essere vista dalla Fig. 5.11, la quale mostra i vettori per $\omega = (\pi - \epsilon)$ e $\omega = (\pi + \epsilon)$:

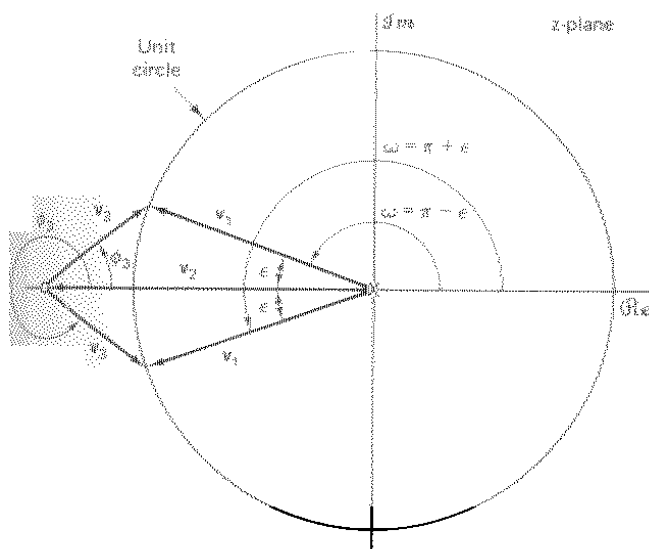


Figure 5.11 z -plane vectors for a single zero evaluated on the unit circle, with $\theta = \pi$, $r > 1$.

Notare che il vettore polo $\mathbf{v}_1$ ha un angolo ε che varia continuamente da $\omega=0$ a $\omega=2\pi$, L'angolo del vettore zero $\mathbf{v}_3$ è etichettato con ϕ_3 in Fig 5.11. Se questo angolo è misurato positivamente nella direzione antioraria, la Fig 5.11 mostra che ϕ_3 salta da zero a 2π radianti appena ω va da $(\pi-\varepsilon)$ a $(\pi+\varepsilon)$. Questo salto di 2π radianti è evidente in Fig 5.10(b). La discontinuità di 2π radianti può anche essere interpretata come una conseguenza del calcolo del valore principale della funzione fase. L'angolo ϕ_3 si può considerare positivo per $\omega=(\pi-\varepsilon)$ e negativo per $\omega=(\pi+\varepsilon)$. Con questa interpretazione l'angolo è continuo per $\omega = \theta$. Comunque, poiché l'angolo totale del fattore $1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}$ è minore di $-\pi$ radianti per $\omega=(\pi+\varepsilon)$, il valore principale apparirà come in Fig. 5.10(b).

Le curve della fase in Fig. 5.10(b) hanno tutte pendenze negative. Quindi la funzione del ritardo di gruppo per $r > 1$ è positiva per qualsiasi valore di ω . Ciò si può vedere, più semplicemente, considerando l'eq (5.67) per $r > 1$.

La precedente discussione e le Figure 5.5, 5.8. e 5.10 si riferiscono tutte ad un singolo fattore del tipo $1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}$. Se il fattore rappresenta uno zero di $H(z)$, allora le curve delle Figure 5.5, 5.8 e 5.10 contribuiranno alle funzioni di risposta in frequenza con segno algebrico positivo. Se il fattore rappresenta un polo di $H(z)$ allora tutti i contributi entreranno con segno opposto. Quindi il contributo di un polo in $z = re^{j\theta}$ sarà l'opposto delle curve nelle Figure 5.5 e 5.8. Invece di calare nei pressi dello zero (-: dB), la funzione modulo avrà un picco attorno alla frequenza $\omega=\theta$. La dipendenza da r sarà la stessa che per lo zero, cioè più r è vicino ad 1 e più alto sarà il contributo alla funzione modulo. Per i sistemi stabili e causali non ci saranno, ovviamente, poli fuori dal cerchio unitario, cioè r sarà minore di uno.

5.3.2 ESEMPI CON POLI E ZERI MULTIPLI

In questa sezione illustreremo l'uso dei risultati della Sezione 5.3.1 per determinare la risposta in frequenza dei sistemi con funzioni di rete razionali.

Example 5.7

Consideriamo il sistema del secondo ordine

$$H(z) = \frac{1}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})} = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (5.71)$$

L'equazione alle differenze soddisfatta dall'ingresso e dall'uscita del sistema è :

$$y[n] - 1 - 2r \cos \theta y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n]$$

Usando la tecnica dell'espansione in fratti semplici, la risposta impulsiva di un sistema causale con questa funzione di rete si ricava come

$$h[n] = \frac{r^n \sin[\theta(n+1)]}{\sin \theta} u[n] \quad (5.72)$$

La funzione di rete nella Eq. (5.71) ha un polo in $z = re^{j\theta}$ e nel punto coniugato $z = re^{-j\theta}$, e due zeri in $z = 0$. Il diagramma poli-zeri è mostrato in Fig. 5.12:

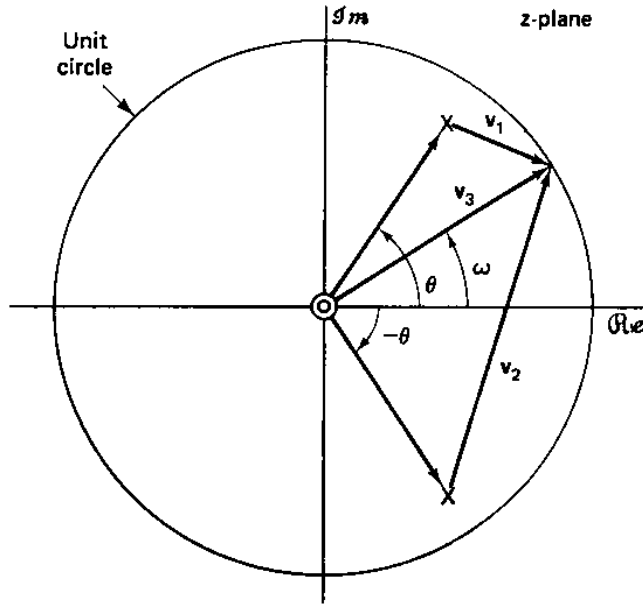


Figure 5.12 Pole-zero plot for Example 5.7.

Dalla nostra discussione nella Sezione 5.3.1, scriviamo che il modulo vale

$$20 \log_{10} |H(e^{j\omega})| = -10 \log_{10} [1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)] - 10 \log_{10} [1 + r^2 - 2r \cos(\omega + \theta)] \quad (5.73a)$$

Scriviamo inoltre che la fase è

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\arctan \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} - \arctan \frac{r \sin(\omega + \theta)}{1 - r \cos(\omega + \theta)} \quad (5.73b)$$

Scriviamo infine che il ritardo di gruppo è

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} - \frac{r^2 - r \cos(\omega + \theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega + \theta)} \quad (5.73c)$$

Queste funzioni sono disegnate in Fig. 5.13 per $r = 0.9$ e $\theta = \pi/4$:

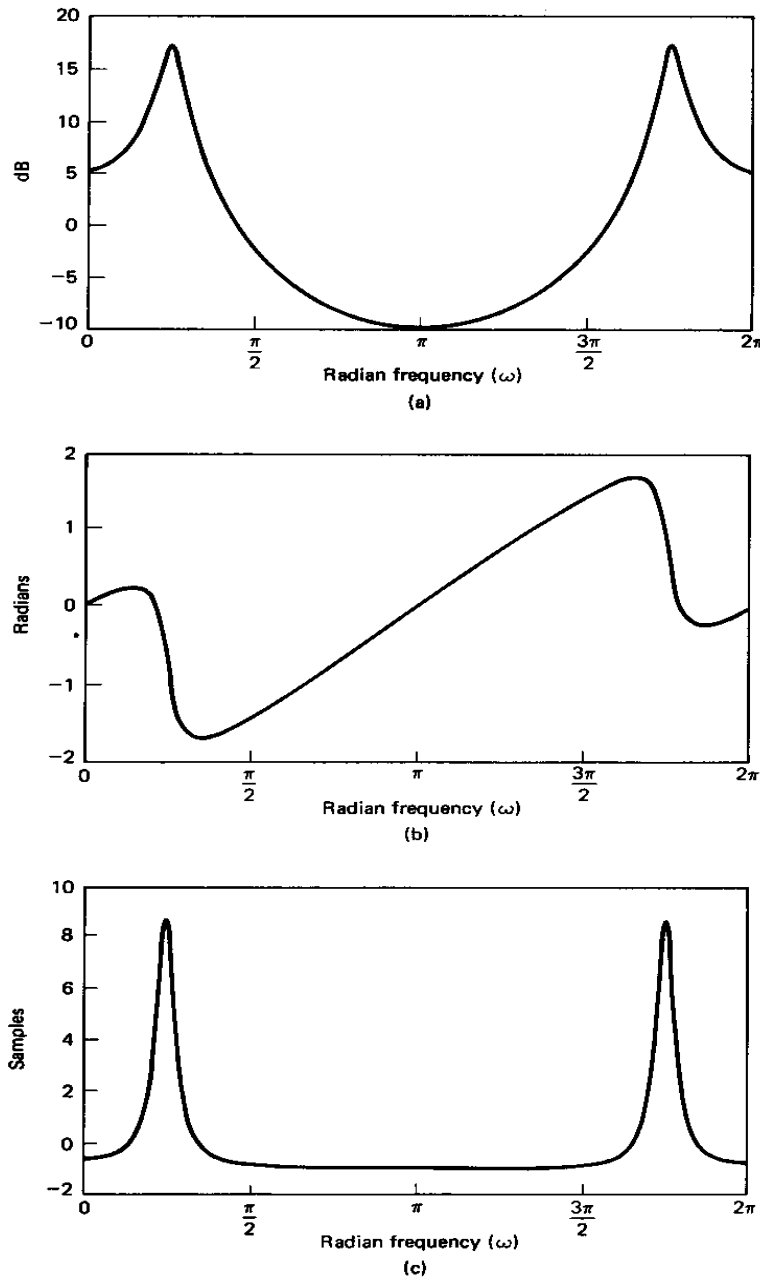


Figure 5.13 Frequency response for a complex-conjugate pair of poles as in Example 5.7, with $r = 0.9$, $\theta = \pi/4$. (a) Log magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.

La Figura 5.12 mostra i vettori polo e zero $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, e $\mathbf{v}_3$. La risposta in modulo è il prodotto delle lunghezze dei vettori zero (che in questo caso sono tutti unitari) diviso il prodotto delle lunghezze dei vettori polo. Quindi

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|\mathbf{v}_3|^2}{|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2|} = \frac{1}{|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2|} \quad (5.74)$$

Quando ω è circa uguale a θ , la lunghezza del vettore $\mathbf{v}_1 = e^{j\omega} - re^{j\theta}$ diventa piccola e cambia significativamente per ω che varia attorno a θ , mentre la lunghezza del vettore $\mathbf{v}_2 = e^{j\omega} - re^{-j\theta}$ cambia solo leggermente per ω che varia intorno a θ . Quindi il polo di angolo θ domina la risposta in frequenza intorno a $\omega = \theta$, come è evidente dalla Fig 5.13. Per simmetria, il polo con angolo $-\theta$ domina la risposta in frequenza intorno a $\omega = -\theta$.

Example 5.8

Consideriamo un sistema FIR la cui risposta impulsiva è

$$h[n] = \delta[n] - 2r \cos \theta \delta[n - 1] + r^2 \delta[n - 2]. \quad (5.75)$$

La corrispondente funzione di rete è

$$H(z) = 1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2} \quad (5.76)$$

Questa è l'inverso della funzione di rete nell'Esempio 5.7. Quindi i grafici della risposta in frequenza per i sistemi FIR sono semplicemente gli opposti (negativi) dei grafici di Fig 5.13. Notare che le posizioni del polo e dello zero sono scambiate nel passaggio all'inverso.

Example 5.9

Come esempio di una funzione di rete con entrambi i poli e gli zeri, consideriamo

$$H(z) = \frac{0.05634(1 + z^{-1})(1 - 1.0166z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 0.683z^{-1})(1 - 1.4461z^{-1} + 0.7957z^{-2})} \quad (5.77)$$

Gli zeri della funzione di rete si trovano in

Raggio	Angolo (rad)
1	π
1	$\pm 1.0376 (= 59.45^\circ)$

I poli si trovano in

Raggio	Angolo (rad)
0.683	0
0.892	$\pm 0.6257 (= 35.85^\circ)$

Il diagramma poli-zeri per questo sistema è mostrato in Fig 5.14:

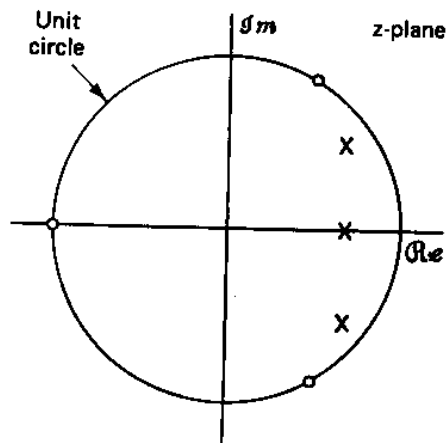


Figure 5.14 Pole-zero plot for the lowpass filter of Example 5.9.

La Figura 5.15 mostra il modulo logaritmico, la fase e il ritardo di gruppo per il sistema.

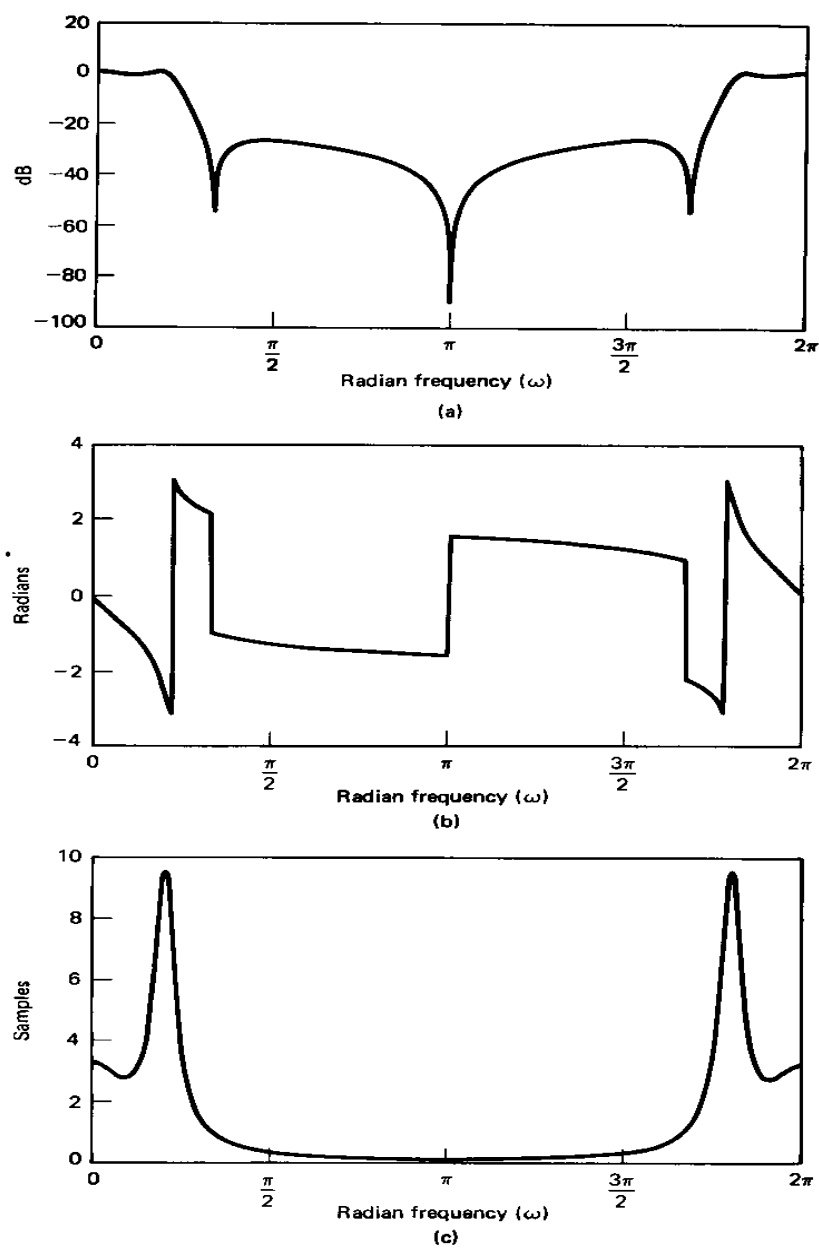


Figure 5.15 Frequency response for the lowpass filter of Example 5.9. (a) Log magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.

L' effetto degli zeri che si trovano sul cerchio unitario in $\omega=\pm 1.0376$ e π è chiaramente evidente. Comunque, i poli sono posizionati in modo che più che incrementare per frequenze vicine ai loro angoli, il modulo logaritmico totale rimane prossimo ai 0 dB per una banda che oscilla da $\omega=0$ a $\omega=0.2\pi$ (e, per simmetria, da $\omega=1.8\pi$ a $\omega=2\pi$), e poi cala rapidamente e rimane al di sotto dei -25 dB da circa $\omega=0.3\pi$ a 1.7π .

Questo sistema è un filtro passa-basso disegnato con un metodo di approssimazione che sarà descritto nel Capitolo 7. L' esempio suggerisce che le approssimazioni alle risposte dei filtri selettivi in frequenza possono essere ottenute usando poli per innalzare il modulo della risposta e gli zeri per eliminarla.

In questo esempio noi vediamo entrambi i tipi di discontinuità nella curva delle fasi raffigurata.

In ω circa uguale a 0.22π c' è una discontinuità di 2π dovuta all' uso del valore principale nel calcolo del grafico. In $\omega=\pm 1.0376$ e $\omega=\pi$, le discontinuità di π sono dovute agli zeri sul cerchio unitario.

Autore: **MASSIMILIANO ZANCHIELLO**

e-mail: ta003191@libero.it

sito personale: <http://digilander.iol.it/frabrunel>