Appunti di Elettrotecnica
Analisi in regime sinusoidale (parte I)

INTRODUZIONE SUL REGIME SINUSOIDALE

Sappiamo bene che, dato un circuito dinamico, lineare e tempo-invariante, una qualsiasi **risposta** (ossia una qualsiasi corrente o una tensione di lato) ad un ingresso può essere espressa come somma di un **termine transitorio** (che corrisponde all'integrale generale dell'equazione omogenea associata al circuito) e di un **termine a regime** (che corrisponde ad un integrale particolare dell'equazione differenziale completa associata al circuito). In particolare, sappiamo anche che, *se il circuito è lineare e tempo-invariante, l'integrale particolare ha un andamento dello stesso tipo dell'ingresso, o degli ingressi se sono più di uno e sono tutti uguali* (quando ci sono più ingressi diversi tra loro, è possibile applicare il teorema di **sovrapposizione degli effetti**).

Infine, sappiamo che, *se il circuito è anche asintoticamente stabile, ogni risposta del circuito a regime (ossia una volta esaurita la risposta transitoria) tende a seguire l'integrale particolare, assumendo perciò lo stesso andamento temporale degli ingressi presenti nel circuito.*

I circuiti che considereremo d'ora in poi avranno allora tutti le seguenti caratteristiche:

- saranno DINAMICI, ossia dotati di elementi conservativi quali *condensatori* ed *induttori*;
- saranno LINEARI, ossia dotati di elementi lineari, cioè elementi per i quali il legame tra la corrente e la tensione è lineare;
- saranno TEMPO-INVARIANTI, ossia dotati di elementi la cui caratteristica di funzionamento è costante nel tempo (*proprietà di tempo-invarianza*);
- saranno ASINTOTICAMENTE STABILI, il che significa che la risposta ai segnali mandati in ingresso si compone di un termine "a regime" e di un termine "transitorio", che si esaurisce dopo un più o meno lungo periodo di tempo (circa 4-5 costanti di tempo).

Per questo tipo di circuiti, in base a quanto detto prima, il comportamento a regime ha lo stesso andamento degli ingressi (anche solo uno) presenti nel circuito stesso. E' possibile avere, allora, fondamentalmente 4 tipi di "**regime**", intendendo con questo termine SOLO la fase successiva a quella transitoria:

- il regime più semplice è quello "**stazionario**", che prevede tensioni e correnti costanti nel tempo e che si ottiene quando anche gli ingressi al circuito sono tutti costanti;
- poi c'è il regime "**sinusoidale**", che prevede invece tensioni e correnti con andamento sinusoidale isofrequenziale e che si realizza quando sono gli ingressi ad essere sinusoidali e isofrequenziali;
- ancora, c'è il regime "**periodico**", che si realizza quando tutte le sorgenti sono periodiche di uguale periodo e prevede che anche le risposte siano periodiche con lo stesso periodo;
- infine, abbiamo il regime "**variabile**" che raggruppa tutti i casi non contemplati nei tre tipi precedenti.

Da notare 3 cose circa questi 4 regimi:

- intanto, il regime stazionario è un caso particolare di quello sinusoidale che si ottiene quando la pulsazione angolare $\omega=2\pi f$ (o, ciò che è lo stesso, la frequenza) è nulla;
- in secondo luogo, è bene sottolineare che il regime periodico non necessariamente è sinusoidale: un regime periodico prevede che le tensioni e/o le correnti di lato si ripetano uguali ogni intervallo di tempo pari al periodo, ma non necessariamente implica che l'andamento che si ripete sia quello sinusoidale; ad esempio, un ingresso periodico è rappresentato da un'onda quadra o da un'onda triangolare e nessuna di queste due forme d'onda è di tipo sinusoidale;
- infine, il regime periodico si può studiare, se vale il teorema di sovrapposizione, come somma di regimi sinusoidali.

Di qui, dunque, l'importanza dello studio dei circuiti in regime sinusoidale, che ci accingiamo a condurre.

Generalità sulle funzioni periodiche e sulle grandezze alternate

Cominciamo con 3 importanti definizioni:

Def. Una funzione y(t) si dice "**periodica di periodo T**" se soddisfa la condizione per cui

$$f(t) = f(t + nT) \qquad \forall \frac{t}{T} > 0 \quad \forall n \in N$$

ossia se essa si ripete uguale ogni intervallo di tempo pari al periodo T (che è un numero reale positivo).

Def. Data una funzione y(t) periodica di periodo T, si definisce "**valor medio**" di y(t) il numero

$$\bar{y} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y(t)dt$$

dove t_0 è un istante qualsiasi >0.

Def. Si definisce allora "**grandezza alternata**" una funzione periodica avente valor medio nullo.

E' evidente, da quest'ultima definizione, che non necessariamente una funzione periodica è una grandezza alternata: la condizione perché ciò accada è, appunto, che essa sia periodica e che il suo valore medio sia nullo.

Alla classe delle grandezze alternate appartengono le cosiddette "**funzioni sinusoidali**": una generica funzione sinusoidale si scrive nella forma

$$y(t) = y_M \cos(\omega t + \alpha)$$

dove la quantità $\omega = 2\pi f$ prende il nome di "**pulsazione angolare**" (dove f è la "**frequenza**") e dove α prende il nome di "**fase**".

E' facile verificare che il valor medio di questa funzione, che è evidentemente periodica di periodo 2π, è nullo: applicando semplicemente la definizione, abbiamo infatti che

$$\bar{y} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y_M \cos(\omega t + \alpha)dt = \frac{y_M}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}\cos(\omega t + \alpha)dt = \frac{y_M}{2\pi\omega}\left[\sin(\omega t + \alpha)\right]_0^{2\pi} = 0$$

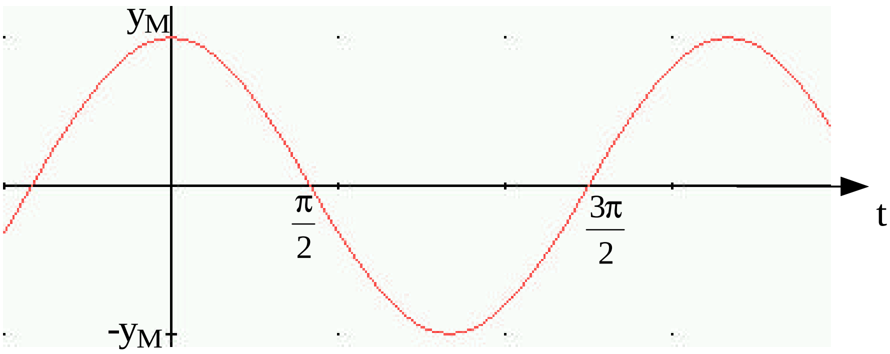
Vediamo adesso un'altra importante definizione, relativa alle grandezze alternate come quella appena considerata:

<u>Def.</u> Data una grandezza alternata y(t) di periodo T, si definisce "**valor medio in un semiperiodo con riferimento alla semionda positiva**" il numero

$$y_m = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+\frac{T}{2}} y(t)dt$$

Esempio

Per esempio, consideriamo una funzione del tipo $y(t) = y_M \cos(t)$, ossia una grandezza sinusoidale con fase nulla α=0 e di periodo 2π. Il suo grafico cartesiano è il seguente:



La "semionda positiva" cui fa riferimento la definizione è il tratto di curva compreso tra due successive intersezioni della curva con l'asse delle ascisse: per quella funzione, questo tratto ha evidentemente lunghezza pari a π.

Abbiamo allora che il valor medio, in un semiperiodo, con riferimento alla semionda positiva, della funzione considerata è

$$y_m = \frac{2}{2p}\int_{\frac{3}{2}p}^{\frac{5}{2}p} y_M \cos(t)dt = \frac{1}{p} y_M [\sin(t)]_{\frac{3}{2}p}^{\frac{5}{2}p} = \frac{2}{p} y_M$$

Diamo ancora altre due importanti definizioni sulle grandezze alternate:

<u>Def.</u> Data una grandezza alternata y(t) di periodo T, si definisce "**valore efficace**" il numero

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y^2(t)dt}$$

In generale, è evidente che questo valore efficace dipende dalle caratteristiche della grandezza alternata considerata. Nel caso particolare in cui y(t) sia una grandezza alternata sinusoidale, si ha che

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y_M^2 \cos^2(\omega t + \alpha)dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} y_M$$

Def. Data una grandezza alternata y(t) di periodo T, si definisce "**fattore di forma**" il rapporto tra il valore efficace ed il valor medio in un semiperiodo con riferimento alla semionda positiva:

$$K_f = \frac{Y}{y_m}$$

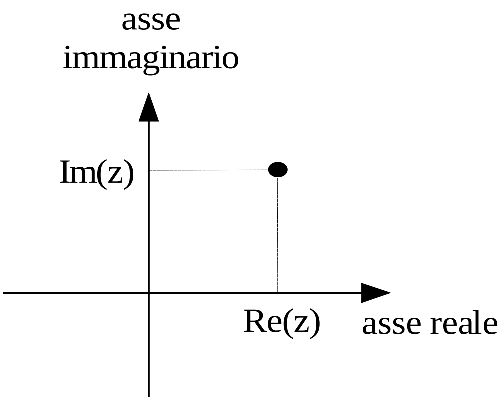
E' importante osservare che per tutte le grandezze alternate sinusoidali, il fattore di forma vale <u>1,11</u>.

RICHIAMI SUI NUMERI COMPLESSI

Un numero complesso z si esprime solitamente nella cosiddetta "**notazione cartesiana**", ossia

$$\boxed{z = x + jy}$$

dove x ed y sono due numeri reali quali che si chiamano rispettivamente "**parte reale**" di z e "**coefficiente della parte immaginaria**" di z. Considerando un piano cartesiano avente in ascisse (**asse reale**) i valori di x ed in ordinate (**asse immaginario**) i valori di y, ogni numero complesso z=x+jy è individuato in modo univoco dal punto P di coordinate (x,y):



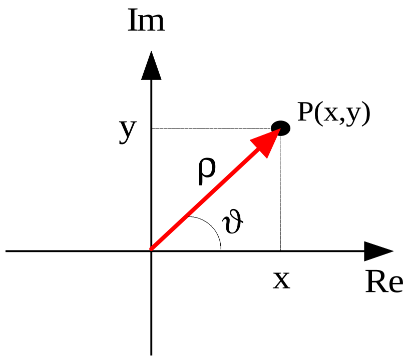
Quello appena riportato è il cosiddetto **piano complesso**.
Si chiama "**modulo**" di un numero complesso il numero reale

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

mentre si chiama "**argomento**" (o anche "**fase**") di un numero complesso il numero reale

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

In base a queste definizioni, si comprende facilmente quale sia il significato geometrico del modulo e della fase di un numero complesso: preso il vettore che unisce l'origine del piano complesso con il punto P individuato dalla coppia (x,y), il modulo di z=x+jy è la lunghezza del vettore, mentre la fase θ di z è l'angolo che l'asse x forma con il suddetto vettore:



Il modulo e l'argomento sono legati alla parte reale ed al coefficiente della parte immaginaria dalle seguenti due relazioni:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$$

Sostituendo queste espressioni di x ed y nella notazione cartesiana, si ottiene il numero z espresso nella forma

$$\boxed{z = \rho(\cos\vartheta + j\sin\vartheta)}$$

e questa è la cosiddetta "**notazione trigonometrica**" di un numero complesso.

Una formula importante relativa ai numeri complessi è la "**formula di Eulero**": dato un qualsiasi numero reale θ, questa formula afferma che

$$e^{j\vartheta} = \cos\vartheta + j\sin\vartheta$$

Usando questa formula è possibile rappresentare il numero complesso z in altri due modi molto importanti: il primo è la cosiddetta "**notazione polare**", ossia

$$\boxed{z = \rho e^{j\vartheta}}$$

dove θ si esprime in radianti, ossia multipli e sottomultipli di π.

Il secondo modo non è altro che una forma ancora più compatta della notazione polare: si chiama "**notazione di Steinmez**" e suggerisce di esprimere z nella forma

$$\boxed{z = \rho\langle\vartheta}$$

dove, però, a differenza di prima, il valore di θ si esprime in gradi.

Nel seguito noi useremo sempre questo tipo di notazione, per ovvie ragioni di comodità (specialmente quando di ha a che fare con somme e prodotti di numeri complessi).

Potenza di un numero complesso

Per calcolare la potenza n° di un numero complesso basta usare la notazione di Steinmez e applicare la seguente regola:

$$\boxed{z^n = \rho^n\langle n\vartheta}$$

Proprietà dei numeri complessi
Dato un numero complesso z=x+jy, si ha che

$$\boxed{\mathrm{Re}(jz) = -\mathrm{Im}(z)}$$

I FASORI

Vediamo come è possibile legare le grandezze sinusoidali ai numeri complessi. Intanto, consideriamo una generica funzione sinusoidale

$$y(t) = y_M \cos(\omega t + \alpha)$$

dove

ω = pulsazione (radianti/secondo)
α = fase iniziale (radianti)
y_M = ampiezza

Sussiste la seguente IMPORTANTE relazione:

$$\boxed{y(t) = y_M \cos(\omega t + \alpha) = \mathrm{Re}\left[y_M e^{j(\omega t + \alpha)}\right]}$$

<u>Dimostrazione</u>
Riprendiamo la formula di Eulero: dato un generico numero reale x, essa dice che

$$e^{jx} = \cos x + j\sin x$$

Abbiamo qui una uguaglianza tra numeri complessi per cui possiamo tranquillamente affermare che

$$\begin{cases} \cos x = \mathrm{Re}(e^{jx}) \\ \sin x = \mathrm{Im}(e^{jx}) \end{cases}$$

Consideriamo in particolare la prima di queste due relazioni: se, al posto di x, noi poniamo il termine ($\omega t+\alpha$), quella relazione diventa

$$\cos(\omega t + \alpha) = \mathrm{Re}\left(e^{j(\omega t+\alpha)}\right)$$

Se adesso moltiplichiamo ambo i membri per y_M, abbiamo che

$$y_M \cos(\omega t + \alpha) = y_M \,\mathrm{Re}\left(e^{j(\omega t+\alpha)}\right)$$

Il termine y_M a secondo membro si può portare dentro le parentesi e la dimostrazione è completa.

A partire da questa relazione, possiamo introdurre il concetto di "**fasore**" associato ad una grandezza sinusoidale: sappiamo intanto che l'ampiezza y_M di una grandezza alternata sinusoidale è legata al valore efficace Y della stessa dalla relazione

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y^2(t)dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} y_M$$

dalla quale si ricava quindi che

$$\boxed{y_M = \sqrt{2}Y}$$

Sostituendo allora questa espressione nella relazione di prima abbiamo che

$$y(t) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}Ye^{j(\omega t+\alpha)}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}Ye^{j\alpha}e^{j\omega t}\right]$$

Ponendo adesso

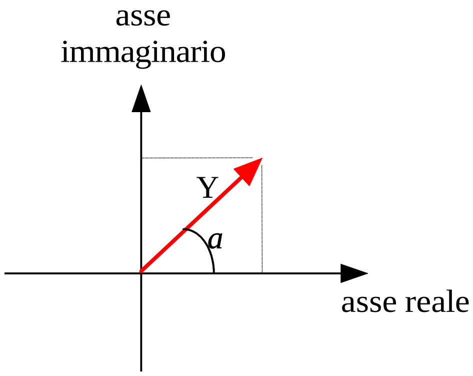
$$\overline{Y} = Ye^{j\alpha} \quad : \textbf{fasore} \text{ associato ad } y(t)$$

concludiamo che

$$\boxed{y(t) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\overline{Y}e^{j\omega t}\right]}$$

In pratica, questo "fasore" contiene in sé l'ampiezza della funzione y(t), in quanto ad essa è legato il valore efficace Y, e la fase iniziale α di y(t) stessa. Volendolo definire in modo rigoroso, diciamo che *il **fasore** associato ad una grandezza sinusoidale y(t) è quel numero complesso avente per modulo il valore efficace di y(t) e per argomento la fase di y(t).*

La cosa importante da ricordare è quindi che un fasore è un NUMERO COMPLESSO. E' possibile, però, oltre che conveniente, dare una rappresentazione vettoriale di un fasore: dato il piano complesso (o "**piano di Gauss**", avente l'asse reale sulle ascisse e l'asse complesso sulle ordinate), si tratta del vettore che parte dall'origine, forma con l'asse reale un angolo α ed ha modulo Y (cioè il valore efficace di y(t)).



Teoremi sui fasori

INTRODUZIONE

Consideriamo sempre la relazione che lega una grandezza sinusoidale y(t) al fasore $\overline{Y}$ ad essa associato:

$$y(t) = y_M \cos(\omega t + \alpha) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{Y} e^{j\omega t}\right]$$

dove ricordiamo che il fasore è $\overline{Y} = Y e^{j\alpha}$ ed anche che $Y = \frac{1}{\sqrt{2}} y_M$ è il valore efficace della grandezza stessa.

Vogliamo enunciare 5 teoremi che risulteranno fondamentali nell'analisi che andremo a fare più avanti sui circuiti in regime sinusoidale.

1° LEMMA: LINEARITÀ DELLA PARTE REALE DI UN NUMERO COMPLESSO

L'operatore Re(z) è un operatore lineare, ossia

$$\boxed{\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)}$$

Questo teorema dice dunque che, dati due numeri complessi qualsiasi (e quindi anche due fasori), la parte reale della loro somma è semplicemente pari alla somma delle rispettive parte reali.

<u>Dimostrazione</u>

Consideriamo due numeri complessi $z_1=x_1+jy_1$ e $z_2=x_2+jy_2$: si ha che

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\big((x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2)\big) = \mathrm{Re}\big((x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)\big) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$$

2° LEMMA: COMMUTATIVITÀ DELLA PARTE REALE RISPETTO ALLA DERIVATA TEMPORALE

L'operatore Re(z) è commutativo rispetto alla operazione derivazione nel tempo, ossia

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{Y} e^{j\omega t}\right]\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{d}{dt}\left[\sqrt{2}\,\overline{Y} e^{j\omega t}\right]\right)}$$

Questo teorema dice dunque semplicemente che la derivata temporale della parte reale di un numero complesso è pari alla parte reale della derivata dello stesso numero. In altre parole, l'operatore "derivata temporale" e l'operatore "parte reale" possono essere "scambiati", ossia è del tutto arbitrario applicare prima uno e poi l'altro, o viceversa, ad un numero complesso.

Dimostrazione

Ci basta fare qualche calcolo: intanto, se $y(t)=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\overline{Y}e^{j\omega t}\right]$, la derivata prima di y(t) è

$$y'(t)=\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\overline{Y}e^{j\omega t}\right]\right)$$

Per questo calcolo, però, ci serviamo di y(t) espressa nella forma

$$y(t)=y_M\cos(\omega t+\alpha)$$

Si ha perciò che

$$y'(t)=-\omega y_M\sin(\omega t+\alpha)$$

Il seno ed il coseno sono legati dalla relazione sinθ= cos (θ+π/2), per cui

$$y'(t)=-\omega y_M\cos(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2})$$

In base a quanto già visto in precedenza, possiamo scrivere che

$$y'(t)=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\omega Ye^{j(\omega t+\alpha+\pi/2)}\right]=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\omega Ye^{(\omega t}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\alpha}\right]$$

Poiché $e^{j\frac{\pi}{2}}=j$, abbiamo quindi che

$$y'(t)=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\omega Yje^{(\omega t}e^{j\alpha}\right]=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}Y(j\omega)e^{(\omega t}e^{j\alpha}\right]=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}Y\frac{d}{dt}\left(e^{(\omega t}\right)e^{j\alpha}\right]$$

I termini che compaiono all'interno della parentesi quadra sono tutti costanti rispetto al tempo, eccetto quello che viene derivato: possiamo quindi scrivere che

$$y'(t)=\mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}Ye^{(\omega t}e^{j\alpha}\right)\right]$$

Dato infine che $\overline{Y}=Ye^{j\alpha}$, possiamo concludere che

$$y'(t)=\mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}\overline{Y}e^{(\omega t}\right)\right]$$

Uguagliando adesso questa espressione di y'(t) a quella trovata all'inizio della dimostrazione otteniamo proprio la tesi.

TEOREMA SULLE DERIVATE DI Y(t)

In base alla dimostrazione del 2° lemma si deduce che il fasore associato alla funzione y'(t) è

$$\overline{Y}'=j\omega\overline{Y}$$

Esiste allora la seguente relazione ricorsiva:

$$\boxed{\overline{Y}^{(n)} = (j\omega)^n \overline{Y}}$$

In pratica, quindi, all'operazione di derivazione (d/dt) nel dominio del tempo corrisponde, nel dominio dei fasori, una moltiplicazione per jω. Se l'ordine di derivazione è n (d^n/dt^n), allora, nel dominio dei fasori, bisogna moltiplicare per $(j\omega)^n$.

3° LEMMA: LEMMA DI UNICITÀ

Due funzioni sinusoidali isofrequenziali sono uguali se e soltanto se sono uguali i fasori che li rappresentano. Detto anche in altro modo, questo teorema afferma che esiste una corrispondenza biunivoca tra una funzione sinusoidale ed il suo fasore: <u>se noi abbiamo due fasori uguali, possiamo automaticamente dire che le corrispondenti funzioni sinusoidali sono uguali</u>.

Ricordiamo, inoltre, che due numeri complessi sono uguali tra loro se e solo se sono uguali le rispettive parti reali e i rispettivi coefficienti della parte immaginaria.

<u>Dimostrazione</u>

Cominciamo a dimostrare la prima implicazione, ossia che l'uguaglianza tra due fasori implica l'uguaglianza tra le corrispondenti funzioni sinusoidali.

Consideriamo perciò due generiche funzioni sinusoidali

$$y_1(t) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{Y}_1 e^{j\omega t}\right] \qquad\qquad y_2(t) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{Y}_2 e^{j\omega t}\right]$$

E' evidente che le espressioni di queste due funzioni differiscono solo per il fasore: allora, se sono uguali i fasori, è evidente che sono uguali anche le due funzioni.

Passiamo alla implicazione inversa, che è meno immediata: date le stesse due funzioni, supponiamo che esse siano uguali; questo implica che

$$\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{Y}_1 e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{Y}_2 e^{j\omega t}\right]$$

e questa relazione vale ∀t. In particolare, se noi prendiamo t=0, essa diventa

$$\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{Y}_1\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{Y}_2\right]$$

Abbiamo dimostrato che l'operatore parte reale è lineare, per cui possiamo portare fuori da entrambi i membri la radice di 2: quindi $\mathrm{Re}\left[\overline{Y}_1\right] = \mathrm{Re}\left[\overline{Y}_2\right]$.

Abbiamo così fatto vedere che i due numeri complessi (ossia i due fasori) hanno la stessa parte reale. Dobbiamo far vedere che hanno anche uguale il coefficiente della parte immaginaria. Partiamo ancora una volta dalla relazione

$$\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{Y}_1 e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{Y}_2 e^{j\omega t}\right]$$

Prendiamo questa volta t=π/2ω: essa diventa

$$\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{Y}_1 e^{j\frac{\pi}{2}}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{Y}_2 e^{j\frac{\pi}{2}}\right]$$

Dato che $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$, abbiamo allora che

$$\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\overline{Y}_1 j\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\overline{Y}_2 j\right]$$

Sempre in base alla linearità, possiamo eliminare la radice quadra di 2: quindi

$$\mathrm{Re}\left[\overline{Y}_1 j\right] = \mathrm{Re}\left[\overline{Y}_2 j\right]$$

A questo punto, ci ricordiamo di una proprietà dei numeri complessi: se z è un numero complesso, è evidente che

$$jz = j(x + jy) = ix - y$$

e quindi che

$$\mathrm{Re}(jz) = -y = -\mathrm{Im}(z)$$

Applicando questa proprietà alla relazione trovata prima, abbiamo che

$$-\mathrm{Im}\left[\overline{Y}_1\right] = -\mathrm{Im}\left[\overline{Y}_2\right]$$

da cui discende l'uguaglianza che cercavamo.

TEOREMA PRINCIPALE SUI FASORI

Se si sommano più funzioni sinusoidali isofrequenziali e le loro derivate, il risultato è una funzione ancora sinusoidale e ancora con la stessa frequenza.

Dimostrazione

Consideriamo 3 diverse funzioni sinusoidali:

$$y(t) = y_M \cos(\omega t + \alpha_1) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\overline{Y}e^{j\omega t}\right]$$
$$x(t) = x_M \cos(\omega t + \alpha_2) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\overline{X}e^{j\omega t}\right]$$
$$z(t) = z_M \cos(\omega t + \alpha_3) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\overline{Z}e^{j\omega t}\right]$$

Sommiamo le prime 2 e la derivata della 3° e vediamo cosa ne viene fuori:

$$s(t) = x(t) + y(t) + z'(t) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\overline{X}e^{j\omega t}\right] + \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\overline{Y}e^{j\omega t}\right] + \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\overline{Z}(j\omega)e^{j\omega t}\right] =$$
$$= \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\left(\overline{X} + \overline{Y} + (j\omega)\overline{Z}\right)e^{j\omega t}\right]$$

E' evidente che questa funzione s(t) è a sua volta una funzione sinusoidale con la stessa frequenze delle altre 3. Il fasore ad essa associato è

$$S = \overline{X} + \overline{Y} + (j\omega)\overline{Z}$$

Metodo dei fasori per l'analisi dei circuiti in regime sinusoidale

INTRODUZIONE

Possiamo adesso cominciare lo studio vero e proprio dei circuiti in regime sinusoidale. Abbiamo già detto all'inizio che, *nell'ipotesi che il nostro circuito sia lineare, tempo-invariante e asintoticamente stabile e nell'ipotesi che tutti gli ingressi siano sinusoidali isofrequenziali, si può ritenere che, A REGIME, tutte le tensioni e le correnti di lato abbiano un andamento sinusoidale nel tempo con la stessa pulsazione angolare degli ingressi.*

Come vedremo meglio negli esempi, questo significa che la ricerca delle risposte a regime del circuito in esame (cioè le correnti e le tensioni di lato), che sappiamo essere sinusoidali e con una pulsazione ω nota e pari a quella dell'ingresso, si riduce alla determinazione dei corrispondenti fasori, ossia dei rispettivi valori efficaci e delle rispettive fasi.

Il vantaggio fondamentale di usare i fasori sta nel fatto che ci si trova a risolvere delle equazioni algebriche e non più differenziali. Il cosiddetto "**metodo simbolico**", o "**metodo dei fasori**", consente infatti di ricondursi a tali equazioni algebriche, risolte le quali è immediato il passaggio alle funzioni sinusoidali ricercate.

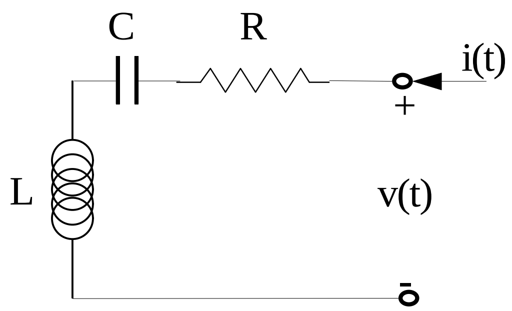
In linea di massima, questo metodo simbolico si compone dei seguenti passi:

1. per prima cosa vanno ricavate le normali relazioni fornite dalla applicazione delle relazioni di lato e delle leggi di Kirchoff;
2. queste relazioni vanno poi poste sotto forma di fasori: ciò significa che esse devono diventare "simboliche", per cui questo secondo passo potrebbe essere indicato come quello di trasformazione delle equazioni differenziali in equazioni simboliche;
3. a questo punto, va risolto il sistema di equazioni algebriche ottenute al passo precedente; la soluzione di tale sistema consiste nella determinazione dei fasori associati alle grandezze cui si è interessati;
4. infine, l'ultimo passo è l' "antitrasformazione" delle soluzioni simboliche, ossia il passaggio dai fasori alle grandezze sinusoidali.

Come faremo vedere presto, i passi 2 e 4, ossia il passaggio verso e dai fasori, sono decisamente immediati, per cui i passi più laboriosi continuano ad essere la ricerca delle relazioni da utilizzare e la risoluzione del sistema di equazioni (algebriche).

LEGGE DI OHM SIMBOLICA

Consideriamo un semplice **circuito monoporta** costituito da un resistore, un induttore ed un condensatore (ovviamente tutti lineari e tempo-invarianti) collegati in serie (il tipico circuito RLC serie):



Alimentiamo il monoporta con una tensione la cui forma d'onda sia

$$v_S(t) = V_{SM}\cos(\omega t + \alpha_V)$$

Si tratta quindi di una tensione sinusoidale con pulsazione ω e fase α_V. Vogliamo determinare la corrente i(t) in ingresso e a regime in queste condizioni.

Sappiamo bene che il circuito in questione è lineare tempo-invariante, per cui la risposta a regime segue l'ingresso; quindi, all'ingresso sinusoidale $v_S(t)$ corrisponderà una corrente sinusoidale i(t) avente la stessa frequenza: si tratterà cioè di una corrente con una forma d'onda del tipo

$$i_{reg}(t) = I_M\cos(\omega t + \alpha_I)$$

Determinare questa funzione significa, in definitiva, determinare i valori di I_M e di α_I .

Cominciamo a risolvere il circuito nel modo tradizionale, ossia applicando le leggi di Kirchoff e considerando successivamente le relazioni di lato:

$$\text{LKC} \longrightarrow i(t) = i_R(t) = i_L(t) = i_C(t)$$

$$\text{LKT} \longrightarrow v_S(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(T)dT$$

Per arrivare ad una equazione differenziale del tipo da noi conosciuto ci basta derivare rispetto al tempo (in modo da eliminare l'integrale): si ottiene in tal modo

$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C}i = \frac{dv_S}{dt}$$

(dove abbiamo per comodità omesso la dipendenza di i e di v_S dal tempo t).

Questa è una equazione differenziale del 2° ordine nella incognita i(t): sappiamo ormai bene come risolvere l'omogenea associata per trovare la risposta transitoria e come determinare <u>algebricamente</u> la risposta a regime, ossia un integrale particolare dell'equazione stessa. Al contrario, proviamo a trovare questa risposta di regime usando i concetti finora esposti circa i fasori.

Intanto, possiamo associare alle due grandezze sinusoidali con cui abbiamo a che fare i corrispondenti fasori: le relazioni che esprimono il passaggio dalle grandezze sinusoidali ai corrispondenti fasori sono

$$v_S(t) = V_{SM}\cos(\omega t + \alpha_V) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{V}_S e^{j\omega t}\right]$$
$$i_{reg}(t) = I_M\cos(\omega t + \alpha_I) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{I} e^{j\omega t}\right]$$

dove

$$\overline{V}_S = V_S\langle\alpha_V = \frac{V_{SM}}{\sqrt{2}}\langle\alpha_V \qquad \text{fasore associato alla tensione}$$
$$\overline{I} = I\langle\alpha_I = \frac{I_M}{\sqrt{2}}\langle\alpha_I \qquad \text{fasore associato alla corrente}$$

Determinare la corrente $i_{reg}(t)$ significa dunque determinare il fasore ad essa associato. Per farlo, sostituiamo, nella equazione differenziale, le espressioni di $i_{reg}(t)$ e $v_S(t)$ in termini di fasori: otteniamo

$$R\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{I}e^{j\omega t}\right]\right) + L\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{I}e^{j\omega t}\right]\right) + \frac{1}{C}\left(\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{I}e^{j\omega t}\right]\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{V}_S e^{j\omega t}\right]\right)$$

Cominciamo dal calcolare le derivate:

$$R\left(\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}(j\omega)\overline{I}e^{j\omega t}\right]\right) + L\left(\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}(j\omega)^2\overline{I}e^{j\omega t}\right]\right) + \frac{1}{C}\left(\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\overline{I}e^{j\omega t}\right]\right) = \left(\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}(j\omega)\overline{V}_S e^{j\omega t}\right]\right)$$

Adesso, in base alla linearità dell'operatore parte reale, possiamo eliminare da entrambi i membri la radice quadrata di 2: quindi

$$R\cdot\mathrm{Re}\left[(j\omega)\overline{I}e^{j\omega t}\right] + L\cdot\mathrm{Re}\left[(j\omega)^2\overline{I}e^{j\omega t}\right] + \frac{1}{C}\cdot\mathrm{Re}\left[\overline{I}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[(j\omega)\overline{V}_S e^{j\omega t}\right]$$

Ancora, in base alla linearità possiamo ridurre questa uguaglianza come l'uguaglianza di 2 parti reali: quindi abbiamo che

$$\mathrm{Re}\left[\left(j\omega R + (j\omega)^2 L + \frac{1}{C}\right)\overline{I}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[(j\omega)\overline{V}_S e^{j\omega t}\right]$$

Questa uguaglianza diventa allora l'uguaglianza tra gli argomenti, ossia

$$\left(j\omega R + (j\omega)^2 L + \frac{1}{C}\right)\overline{I}e^{j\omega t} = (j\omega)\overline{V}_S e^{j\omega t}$$

da cui quindi scriviamo che

$$\left(j\omega R + (j\omega)^2 L + \frac{1}{C}\right)\overline{I} = (j\omega)\overline{V}_S$$

Portando adesso il termine $j\omega$ dal secondo al primo membro abbiamo che

$$\boxed{\overline{V}_S = \left(R + (j\omega)L + \frac{1}{j\omega C}\right)\overline{I}}$$

Siamo dunque arrivati al risultato del 2° passo del metodo simbolico: abbiamo infatti ottenuto una equazione algebrica dove l'unica incognita, facilmente ricavabile, è il fasore associato alla corrente.

Solitamente, il termine tra parentesi tonda si scrive come

$$\boxed{\dot{z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

e prende il nome di "**impedenza di ingresso**" del circuito.

L'IMPEDENZA D'INGRESSO

Facciamo qualche osservazione su questa "**impedenza di ingresso**". Si tratta evidentemente di un numero complesso (ma NON di un fasore, in quanto non è associata ad alcuna forma d'onda) del quale possiamo perciò calcolare modulo e argomento:

$$|\dot{z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \vartheta = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

La parte reale dell'impedenza di ingresso (che, nel nostro esempio, è semplicemente R) prende il nome di "**resistenza all'impedenza**"; il coefficiente della parte immaginaria dell'impedenza di ingresso prende invece il nome di "**reattanza dell'impedenza**". Spesso si pone semplicemente

$$\begin{cases} R = \mathrm{Re}(\dot{z}) \\ x = \mathrm{Im}(\dot{z}) \end{cases}$$

(dove R non va confusa con la resistenza del nostro esempio).

Quando l'impedenza di ingresso risulta non nulla, si definisce "**ammettenza**" il suo reciproco: quindi

$$\dot{y} = \frac{1}{\dot{z}} = \text{ammettenza}$$

Naturalmente, anche l'ammettenza è un numero complesso, fornito cioè di parte reale e parte immaginaria: solitamente si usa la simbologia

$$\dot{y} = G + jB$$

dove G (=parte reale) prende il nome di "**conduttanza**" e B (=coefficiente della parte immaginaria) prende il nome di "**suscettanza**".

Da notare, che *mentre l'ammettenza è il reciproco dell'impedenza, la conduttanza G e la suscettanza B non sono i reciproci, rispettivamente, della parte reale e coefficiente immaginario dell'impedenza.*

Al contrario, è facile verificare che

$$G = \frac{R}{R^2 + x^2}$$

$$B = \frac{-x}{R^2 + x^2}$$

In conclusione, ricordiamo che anche l'impedenza si misura in ohm come la resistenza.

L'impedenza di ingresso ci consente di scrivere la relazione trovata prima tra i fasori della corrente e della tensione nella forma compatta

$$\boxed{\overline{V}_S = \dot{z}\overline{I}}$$

e questa prende il nome di "**legge di Ohm simbolica**" in quanto è abbastanza evidente l'analogia formale con la legge di Ohm V=RI "classica".

A partire da questa legge, diventa immediata la determinazione del fasore associato alla corrente I(t): infatti si ha che

$$\overline{I} = \frac{\overline{V}_S}{\dot{z}} = \frac{V_S \langle \alpha_V}{|\dot{z}| \langle \vartheta} = \frac{V_S}{|\dot{z}|} \langle (\alpha_V - \vartheta) = \frac{V_{SM}}{|\dot{z}|\sqrt{2}} \langle (\alpha_V - \vartheta)$$

Noto il fasore associato ad $I_{reg}(t)$ possiamo scrivere che

$$I_{reg}(t) = \frac{V_{SM}}{|\dot{z}|\sqrt{2}} \cos(\omega t + \alpha_V - \vartheta)$$

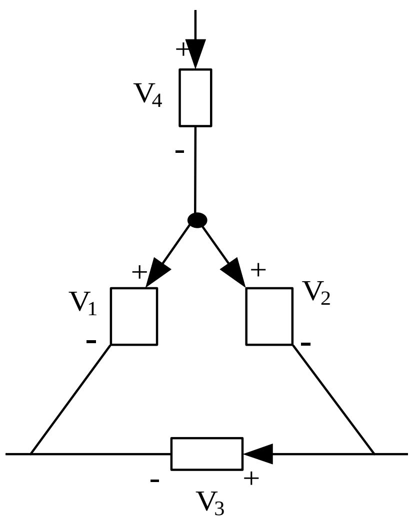
dove ricordiamo che α_V e θ vanno espressi in radianti.

In definitiva, in questo procedimento abbiamo dimostrato quanto segue: *noto il fasore associato alla tensione di alimentazione e nota l'impedenza d'ingresso del circuito, il fasore associato alla corrente corrispondente (intesa come la corrente nelle condizioni di regime) si ottiene semplicemente come rapporto tra il fasore della tensione e l'impedenza stessa.*

Questo per dire che non è quindi necessario tutto il procedimento algebrico di sostituzione dell'integrale particolare nell'equazione differenziale di partenza.

LE LEGGI DI KIRCHOFF IN TERMINI DI FASORI

Consideriamo una porzione generica di un altrettanto generico circuito:



Abbiamo dunque 4 bipoli, dei quali, come al solito, non ci interessa la natura, collegati tra loro in un certo modo. Nella porzione di circuito considerata è evidente la presenza di almeno un nodo: in particolare, la LKC applicata al nodo evidenziato in figura (prendendo positive le correnti uscenti) ci dice che

$$I_1(t) + I_3(t) - I_4(t) = 0$$

Nell’ipotesi che il circuito in esame sia in regime sinusoidale, è chiaro che tutte e tre queste correnti hanno forma d’onda sinusoidale (e siano isofrequenziali), per cui possiamo rappresentare ciascuna di esse mediante i corrispondenti fasori: quella relazione diventa perciò

$$\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\bar{I}_1 e^{j\omega t}\right] + \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\bar{I}_3 e^{j\omega t}\right] - \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\bar{I}_4 e^{j\omega t}\right] = 0$$

Applicando i lemmi visti in precedenza, questa equazione può essere semplificata: in particolare, in base alla linearità dell’operatore parte reale, questa relazione diventa

$$\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\bar{I}_1 e^{j\omega t} + \sqrt{2}\bar{I}_3 e^{j\omega t} + \sqrt{2}\bar{I}_4 e^{j\omega t}\right] = 0$$

Da qui possiamo eliminare la radice di 2 e concludere che

$$\boxed{\bar{I}_1 + \bar{I}_3 - \bar{I}_4 = 0}$$

Abbiamo cioè concluso che *la LKC si può scrivere indifferentemente in termini di intensità di corrente oppure in termini di fasori associati alla corrente* e questo per qualsiasi nodo di un qualsiasi circuito, ovviamente in regime sinusoidale.

Questo risultato ne comporta un altro altrettanto importante, che andiamo perciò ad enunciare.

Fissato un certo nodo del circuito, o meglio del grafo associato al circuito, noi sappiamo di poter trovare la cosiddetta “*matrice di incidenza ridotta*” relativa a quel nodo: si tratta della matrice che tiene conto, per ciascun nodo del circuito tranne quello di riferimento, di quali lati toccano quel nodo e del verso della corrente che li attraversa.

Abbiamo in precedenza trovato anche che la stessa LKC si può scrivere, in termini della matrice di incidenza ridotta A, nella forma

$$AI = 0$$

dove I è il vettore delle correnti di lato. Allora, l’equivalenza prima trovata tra le correnti ed i fasori ad esse associati ci consente di scrivere quella stessa relazione nella forma

$$\boxed{A\bar{I} = 0}$$

dove $\bar{I} = \left[\bar{I}_1, \bar{I}_2, \ldots\right]$ è questa volta il vettore dei fasori associati alle correnti.

Ancora, è ovvio che lo stesso discorso fatto per la LKC può essere fatto anche per la LKT: per esempio, data la porzione di circuito di prima, essa contiene evidentemente una maglia e precisamente quella costituita dai lati 1,2 e 3; applicando la LKT a tale maglia (con il verso orario preso come positivo) abbiamo che

$$-V_1(t) - V_2(t) + V_3(t) = 0$$

che diventa poi

$$V_1(t) + V_2(t) - V_3(t) = 0$$

Se il circuito è in regime sinusoidale, anche le tensioni di lato hanno andamento sinusoidale e possiamo perciò ripetere lo stesso discorso fatto prima per le correnti: sostituendo le rispettive espressioni in termini di fasori e applicando i lemmi dimostrati in precedenza, è immediato concludere che quella relazione equivale a

$$\boxed{\overline{V}_1 + \overline{V}_2 - \overline{V}_3 = 0}$$

Concludiamo quindi anche qui che *la LKT si può scrivere indifferentemente in termini di tensioni di lato oppure in termini di fasori associati alla tensione* e questo per qualsiasi maglia di un qualsiasi circuito.

COLLEGAMENTI IN SERIE

Consideriamo un generico circuito monoporta costituito da un collegamento in serie di N elementi a 2 terminali non meglio identificati. Supponiamo di alimentare il monoporta mediante una tensione sinusoidale rappresentata dal fasore $\overline{V}$. Abbiamo in precedenza visto come un qualsiasi circuito monoporta, per cui anche un semplice elemento a 2 terminali, sia caratterizzato da una propria impedenza d'ingresso $\dot{z}$, la quale tiene conto della natura del circuito o dell'elemento stesso in quanto lega la tensione e la corrente ai suoi terminali: noi abbiamo qui N elementi a 2 terminali diversi, a ciascuno dei quali possiamo associare una impedenza; siano allora $\dot{z}_1, \dot{z}_2, \ldots, \dot{z}_N$ le impedenze corrispondenti a tali N elementi.

Proprio queste impedenze ci consentono di scrivere le relazioni di lato di tutti gli elementi del circuito: infatti, tali relazioni sono semplicemente

$$\begin{cases} \overline{V}_1 = \dot{z}_1 \overline{I}_1 \\ \overline{V}_2 = \dot{z}_2 \overline{I}_2 \\ \ldots \\ \overline{V}_N = \dot{z}_N \overline{I}_N \end{cases}$$

Possiamo poi applicare le leggi di Kirchoff: trattandosi di un collegamento in serie abbiamo l'uguaglianza delle correnti e la ripartizione delle tensioni, per cui

$$\text{LKC} \longrightarrow \overline{I} = \overline{I}_1 = \overline{I}_2 = \ldots = \overline{I}_N$$
$$\text{LKT} \longrightarrow \overline{V} = \overline{V}_1 + \ldots \overline{V}_N$$

Possiamo riassumere le relazioni di lato e le leggi di Kirchoff nel modo seguente:

$$\boxed{\begin{cases} \overline{V} = \dot{z}\overline{I} \\ \dot{z} = \sum_{k=1}^{N} \dot{z}_k \end{cases}}$$

Si nota, quindi, che si continua ad utilizzare lo stesso formalismo usato in passato senza i fasori: prima parlavamo di somma delle resistenze R, adesso parliamo di somma delle impedenze.

Naturalmente, vale anche la "*regola del partitore di tensione*": è immediato, infatti, trovare che la tensione ai capi del j° elemento è data da

$$\boxed{\overline{V}_J = \frac{\dot{z}_J}{\sum_{k=1}^{N} \dot{z}_k} \overline{V}}$$

COLLEGAMENTI IN PARALLELO

E' facile intuire come il discorso fatto per un collegamento in serie di N elementi a 2 terminali sia del tutto analogo a quello da fare per un collegamento in parallelo di altri N elementi: se indichiamo infatti con $\dot{y}_1, \dot{y}_2, \ldots, \dot{y}_N$ le ammettenze degli N elementi (ossia i reciproci delle impedenze) e alimentiamo il circuito con un generatore di corrente sinusoidale rappresentata dal fasore $\overline{I}$, è facile trovare, usando sempre relazioni di lato e leggi di Kirchoff, che valgono le relazioni

$$\boxed{\begin{cases} \overline{I} = \dot{y}\overline{V} \\ \dot{y} = \sum_{k=1}^{N} \dot{y}_k \end{cases}}$$

come anche, per il partitore di corrente, vale la relazione

$$\boxed{\overline{I}_J = \frac{\dot{y}_J}{\sum_{k=1}^{N} \dot{y}_k} \dot{I}}$$

TRASFORMAZIONE TRIANGOLO-STELLA E STELLA-TRIANGOLO

Quanto detto nei paragrafi precedenti trova una prima immediata applicazione nelle formule per le trasformazioni triangolo-stella e stella-triangolo: anzi, mentre noi ci siamo in precedenza limitati a considerare questo tipo di trasformazioni solo per resistori, l'uso dei fasori ci consente di estenderle a elementi qualsiasi a 2 terminali, in quanto questa volta facciamo riferimento all'impedenza (e all'ammettenza) e non più alla resistenza (e alla conduttanza). Le relazioni che avevamo trovato in passato erano le seguenti:

$$\text{triangolo - stella} \longrightarrow \begin{cases} R_{10} = \dfrac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_{20} = \dfrac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_{30} = \dfrac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{cases}$$

$$\text{stella - triangolo} \longrightarrow \begin{cases} G_{12} = \dfrac{G_{10}G_{20}}{G_{10}+G_{20}+G_{30}} \\ G_{23} = \dfrac{G_{20}G_{30}}{G_{10}+G_{20}+G_{30}} \\ G_{30} = \dfrac{G_{10}G_{30}}{G_{10}+G_{20}+G_{30}} \end{cases}$$

In termini di impedenze e ammettenze per elementi biporta generici esse diventano le seguenti:

$$\text{triangolo - stella} \longrightarrow \begin{cases} \dot{z}_{10} = \dfrac{\dot{z}_{12}\dot{z}_{31}}{\dot{z}_{12}+\dot{z}_{23}+\dot{z}_{31}} \\ \dot{z}_{20} = \dfrac{\dot{z}_{12}\dot{z}_{23}}{\dot{z}_{12}+\dot{z}_{23}+\dot{z}_{31}} \\ \dot{z}_{30} = \dfrac{\dot{z}_{31}\dot{z}_{23}}{\dot{z}_{12}+\dot{z}_{23}+\dot{z}_{31}} \end{cases}$$

$$\text{stella - triangolo} \longrightarrow \begin{cases} \dot{y}_{12} = \dfrac{\dot{y}_{10}\dot{y}_{20}}{\dot{y}_{10}+\dot{y}_{20}+\dot{y}_{30}} \\ \dot{y}_{23} = \dfrac{\dot{y}_{20}\dot{y}_{30}}{\dot{y}_{10}+\dot{y}_{20}+\dot{y}_{30}} \\ \dot{y}_{30} = \dfrac{\dot{y}_{10}\dot{y}_{30}}{\dot{y}_{10}+\dot{y}_{20}+\dot{y}_{30}} \end{cases}$$

ELEMENTI BIPORTA: INDUTTORE

La seconda applicazione dei concetti visti poco fa riguarda gli **elementi biporta**, ossia quegli elementi dotati di 2 coppie di terminali e quindi caratterizzati da 2 coppie tensione-corrente, una in ingresso ed una in uscita.

Considerando, ad esempio, un **induttore biporta**, sappiamo che le equazioni di funzionamento sono

$$\begin{cases} V_1 = L_1 \dfrac{dI_1}{dt} + M \dfrac{dI_2}{dt} \\ V_2 = M \dfrac{dI_1}{dt} + L_2 \dfrac{dI_2}{dt} \end{cases}$$

Sostituendo alle tensioni ed alle correnti i rispettivi fasori associati e ricordandoci che la derivata prima di un fasore è pari al prodotto del fasore stesso per il fattore (jω), quelle due equazioni, espresse in funzione appunto dei fasori, diventano le seguenti:

$$\boxed{\begin{cases} \overline{V}_1 = j\omega L_1 \overline{I}_1 + j\omega M \overline{I}_2 \\ \overline{V}_2 = j\omega M \overline{I}_1 + j\omega L_2 \overline{I}_2 \end{cases}}$$

E' ovvio che lo stesso discorso si applica in modo analogo alle equazioni di funzionamento di tutti gli altri elementi biporta da noi studiati in passato

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1