Appunti di Elettrotecnica
Analisi in regime sinusoidale (parte II)

Analisi di circuiti elementari in regime sinusoidale

INTRODUZIONE

A chiarimento dei primi concetti fondamentali esposti a proposito dell'analisi dei circuiti in regime sinusoidale, consideriamo alcuni semplici circuiti per la soluzione dei quali è sufficiente l'applicazione della **legge di Ohm simbolica**.

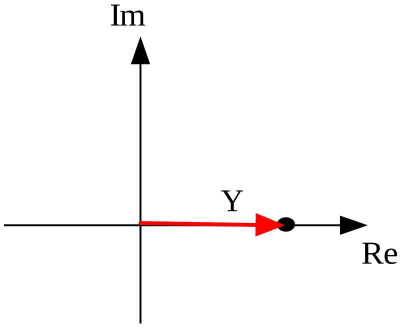
Prima di scendere nei dettagli, facciamo però qualche osservazione preliminare valida per tutti gli esempi: intanto, negli esempi supporremo sempre che il circuito in esame sia alimentato da una tensione sinusoidale del tipo

$$v(t) = V_m \cos(\omega t)$$

Come si osserva, è stata supposta nulla la fase iniziale α di tale tensione di alimentazione, il che implica che il fasore ad essa associata, avendo argomento nullo, diventi un numero reale: sarà infatti

$$\overline{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \langle 0°$$

Questo corrisponde a dire che, rappresentando questo fasore come vettore nel piano complesso, esso giacerà sull'asse reale:



N.B. Ricordiamo, a questo proposito, che un fasore, così come un qualsiasi numero complesso, può essere rappresentato, nel piano complesso, sia semplicemente come un punto sia anche come il vettore che individua tale punto. Nel caso lo si rappresenti come vettore, l'angolo che l'asse reale forma con esso è la fase α della grandezza sinusoidale considerata, mentre il modulo del vettore corrisponde al valore efficace della grandezza stessa.

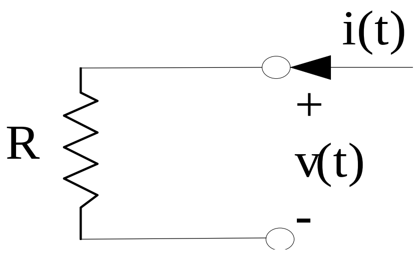
Questa ipotesi di α=0 non è restrittiva, in quanto equivale semplicemente a porre l'origine dei tempi t=0 nell'istante in cui la tensione raggiunge il suo valore massimo, il che è perfettamente lecito.

In particolare, questa scelta comporta un rilevante vantaggio nella rappresentazione degli altri eventuali fasori relativi al circuito: se il fasore della tensione presenta solo la parte reale e quindi è rappresentato graficamente da un vettore poggiato sull'asse reale nel piano complesso, nella rappresentazione vettoriale degli altri eventuali fasori si potrà tralasciare di indicare gli assi del piano complesso, mentre sarà sufficiente usare come riferimento per le fasi il fasore stesso della tensione.

D'altra parte, il fatto di tralasciare l'indicazione degli assi cartesiani è possibile in quanto a noi non interessa la posizione assoluta dei fasori rispetto all'asse reale, ma interessa solo la posizione reciproca dei fasori stessi, ossia di quanto siano sfasati tra loro.

RESISTORE A 2 TERMINALI

Consideriamo il seguente circuito elementare:



Supponiamo, come anticipato prima, che il circuito sia alimentato da una tensione sinusoidale $v(t) = V_m \cos(\omega t)$. Ci interessa conoscere la corrente assorbita dal circuito, ossia, in questo caso, la corrente che fluisce nel resistore R.

Il fatto che il circuito sia in regime sinusoidale ci consente di ragionare in termini simbolici, ossia in termini di fasori: il fasore associato alla tensione di alimentazione è

$$\overline{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \langle 0°$$

(dove ricordiamo che la quantità $V = V_m / \sqrt{2}$ è il valore efficace della grandezza alternata considerata), mentre questo associato alla corrente sarà

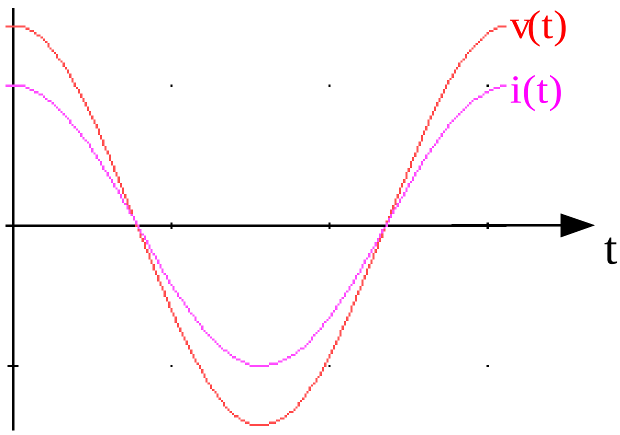
$$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{\dot{z}} = \frac{\frac{V_m}{\sqrt{2}} \langle 0°}{R \langle 0°} = \frac{V_m}{R\sqrt{2}} \langle 0°$$

Una volta individuato il fasore associato alla corrente assorbita dal circuito, possiamo ricavare l'espressione esplicita di questa corrente, che sarà

$$i(t)=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\bar{I}e^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\frac{V_m}{R\sqrt{2}}\langle 0°\left(\underbrace{1\langle \omega t}_{e^{j\omega t}}\right)\right]=\frac{V_m}{R}\cos(\omega t)=\frac{V_m}{R}\cos(\omega t)$$

Una osservazione importante è la seguente: si osserva infatti che la corrente assorbita dal circuito ha la stessa fase (=0°) della tensione di alimentazione. Questo ci consente di dire, quindi, in generale, che, *in un circuito puramente resistivo, la corrente assorbita è sempre in fase con la tensione di alimentazione.*

Da un punto di vista dell'andamento temporale di queste due grandezze, abbiamo cioè una situazione del tipo seguente:



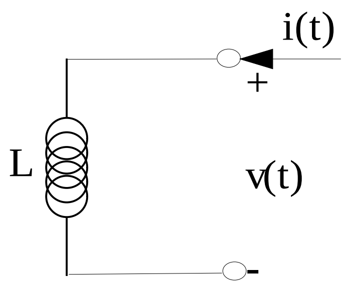
Se ci riferiamo, invece, alla rappresentazione dei rispettivi fasori nel piano di Gauss, abbiamo evidentemente due vettori sovrapposti (ma di diversa lunghezza) e paralleli all'asse orizzontale (cioè l'asse reale).

Un'altra osservazione da fare è la seguente: dalle formule ricavate prime, si nota che *la semi-ampiezza della corrente non dipende in alcun modo dalla pulsazione w della tensione di alimentazione.* Quale che sia il valore di ω, la semi-ampiezza della corrente risulta essere sempre V_m/R. Vedremo, invece, come questo risultato non valga per i circuiti seguenti.

N.B. Per "semiampiezza" di una grandezza alternata intenderemo sempre, salvo specifiche diverse, la distanza tra il valore medio (generalmente 0) della grandezza ed il picco superiore.

INDUTTORE A 2 TERMINALI

Consideriamo adesso quest'altro circuito elementare:



La tensione di alimentazione è sempre $v(t) = V_m \cos(\omega t)$ e vogliamo ancora una volta conoscere la corrente assorbita dal circuito, ossia, in questo caso, la corrente che fluisce nell'induttore.

Così come nel caso precedente, il fatto che il circuito sia in regime sinusoidale ci consente di ragionare in termini di fasori: il fasore associato alla tensione di alimentazione è

$$\overline{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \langle 0°$$

mentre questo associato alla corrente è

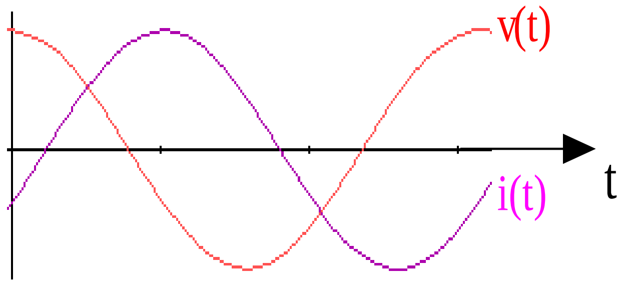
$$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{\dot{z}} = \frac{\frac{V_m}{\sqrt{2}}\langle 0°}{\omega L \langle 90°} = \frac{V_m}{\omega L \sqrt{2}} \langle -90°$$

Una volta individuato il fasore associato alla corrente assorbita dal circuito, l'espressione esplicita di questa corrente è

$$i(t) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\overline{I}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\frac{V_m}{\omega L\sqrt{2}}\rangle -90°\left(\underbrace{1\rangle \omega t}_{e^{j\omega t}}\right)\right] = \frac{V_m}{\omega L}\cos(\omega t - 90°)$$

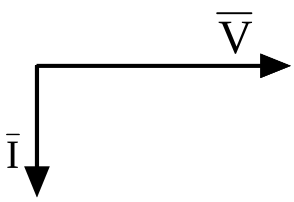
Questa relazione mostra evidentemente che la corrente assorbita dal circuito è sfasata di 90° in ritardo rispetto alla tensione di alimentazione. Questo ci consente di dire, quindi, in generale, che, *in un circuito puramente induttivo, la corrente assorbita è sempre sfasata di 90° in ritardo rispetto alla tensione di alimentazione.*

Da un punto di vista dell'andamento temporale di queste due grandezze, abbiamo cioè una situazione del tipo seguente:



Parlare di "*sfasamento in ritardo*" della corrente rispetto alla tensione significa dire che i valori che vengono assunti dalla tensione in corrispondenza di un certo angolo ωt, vengono raggiunti dalla corrente $\pi/2$ radianti dopo, ossia in corrispondenza dell'angolo $\omega t+\pi/2$.

Se ci riferiamo, invece, alla rappresentazione dei rispettivi fasori nel piano di Gauss, abbiamo evidentemente il fasore della tensione situato sull'asse reale ed il vettore della corrente ad esso ortogonale e diretto verso il basso:



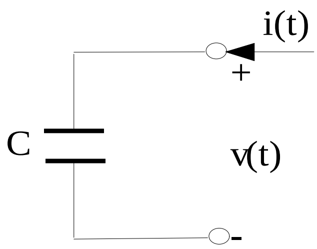
Possiamo esprimere il “ritardo” della corrente rispetto alla tensione dicendo che, *preso il fasore associato alla tensione, quello associato alla corrente deve ruotare di 90° in senso antiorario per sovrapporsi ad esso.*

Infine, facciamo osservare che, in questo caso, la semi-ampiezza della corrente dipende dal valore della pulsazione ω della tensione di alimentazione: in particolare, avendo trovato che questa semiampiezza vale $V_m/\omega L$, si deduce che *la semi-ampiezza della corrente diminuisce all’aumentare della pulsazione w.*

Questo risultato si differenzia dal caso visto prima del circuito puramente resistivo, dove invece la semi-ampiezza della corrente risultava costante.

CONDENSATORE A 2 TERMINALI

Consideriamo quest’altro circuito elementare:



La tensione di alimentazione è sempre $v(t) = V_m \cos(\omega t)$ e vogliamo sempre conoscere la corrente assorbita dal circuito.

Avendo a che fare con il solito regime sinusoidale, possiamo ragionare in termini di fasori: il fasore associato alla tensione di alimentazione è $\bar{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}\langle 0°$, mentre questo associato alla corrente è

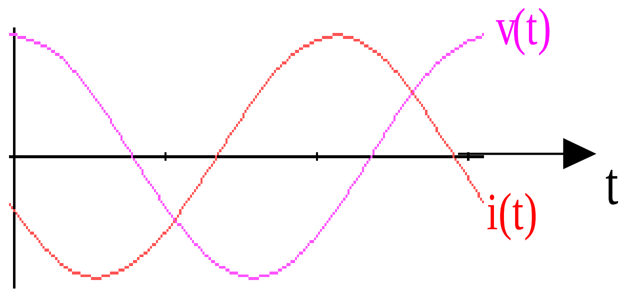
$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\dot{z}} = \frac{\frac{V_m}{\sqrt{2}}\langle 0°}{\frac{1}{wC}\langle -90°} = \frac{wCV_m}{\sqrt{2}}\langle 90°$$

A partire dal fasore $\bar{I}$ associato alla corrente possiamo ricavarci l’espressione esplicita di tale corrente:

$$i(t) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\bar{I}e^{jwt}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\frac{wCV_m}{\sqrt{2}}\langle 90°\left(\underbrace{1\langle wt}_{e^{jwt}}\right)\right] = wCV_m\cos(wt + 90°)$$

Questa relazione mostra che la corrente assorbita dal circuito è sfasata di 90° in anticipo rispetto alla tensione di alimentazione. Questo ci consente di dire, quindi, in generale, che, *in un circuito puramente capacitivo, la corrente assorbita è sempre sfasata di 90° in anticipo rispetto alla tensione di alimentazione.*

Da un punto di vista dell’andamento temporale di queste due grandezze, abbiamo cioè una situazione del tipo seguente:



Parlare di "*sfasamento in anticipo*" della corrente rispetto alla tensione significa dire che i valori che vengono assunti dalla tensione in corrispondenza di un certo angolo ωt, vengono raggiunti dalla corrente $\pi/2$ radianti prima, ossia in corrispondenza dell'angolo $\omega t-\pi/2$.

Se ci riferiamo, invece, alla rappresentazione dei rispettivi fasori nel piano di Gauss, abbiamo evidentemente il fasore della tensione situato sull'asse reale ed il vettore della corrente ad esso ortogonale e diretto verso l'alto:

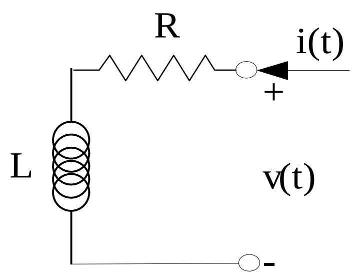
In questo caso, possiamo esprimere l' "anticipo" della corrente rispetto alla tensione dicendo che, *preso il fasore associato alla tensione, quello associato alla corrente deve ruotare di 90° in <u>senso orario</u> per sovrapporsi ad esso.*

Infine, facciamo osservare che, anche in questo caso, la semi-ampiezza della corrente dipende dal valore della pulsazione ω della tensione di alimentazione: in particolare, avendo trovato che questa semiampiezza vale ωCV_m, si deduce che *la semi-ampiezza della corrente aumenta all'aumentare della pulsazione w.*

RESISTORE E INDUTTORE COLLEGATI IN SERIE

Passiamo adesso a considerare circuiti elementari formati da collegamenti di due distinti elementi a due terminali scelti tra resistori, induttori e condensatori.

Cominciamo dal circuito seguente:



La tensione di alimentazione è sempre $v(t)=V_m\cos(\omega t)$ e vogliamo sempre conoscere la corrente assorbita dal circuito, che, in questo caso, è la corrente che fluisce nella serie tra resistore e induttore.

Possiamo come al solito ragionare in termini di fasori: il fasore associato alla tensione di alimentazione è $\overline{V}=\frac{V_m}{\sqrt{2}}\langle 0°$, mentre l'impedenza complessiva del circuito è la serie delle due impedenze, ossia

$$\dot{z}=R+j\omega L=\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\left\langle \mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R}\right.$$

Ponendo genericamente

$$\rho=\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$$
$$\theta=\mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R}$$

possiamo scrivere che l'impedenza complessiva è $\dot{z}=r\langle q$ e quindi che il fasore associato alla corrente è

$$\overline{I}=\frac{\overline{V}}{\dot{z}}=\frac{\frac{V_m}{\sqrt{2}}\langle 0°}{r\langle q}=\frac{V_m}{r\sqrt{2}}\langle -q°$$

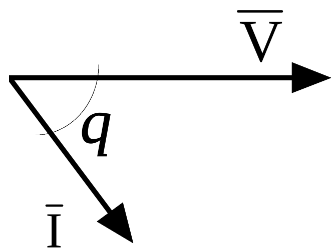
A partire dal fasore $\overline{I}$ associato alla corrente possiamo ricavarci l'espressione esplicita di tale corrente:

$$i(t)=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\overline{I}e^{jwt}\right]=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\frac{V_m}{r\sqrt{2}}\langle -q°(1\langle wt)\right]=\frac{V_m}{r}\cos(wt-q)$$

N.B. Ricordiamo che il valore di θ va espresso in <u>gradi</u> quando si usa la notazione di Steinmez, mentre va espresso in <u>radianti</u> quando si usa la notazione esplicita cos(ωt-θ).

Essendo θ un angolo positivo (in quanto l'argomento dell' "Arctg" è positivo), deduciamo che la corrente assorbita dal circuito è sfasata di 90° in ritardo rispetto alla tensione di alimentazione. Questo ci consente di dire, quindi, in generale, che, *in un circuito <u>ohmico-induttivo</u>, la corrente assorbita è sempre sfasata in ritardo rispetto alla tensione di alimentazione.* Questo fatto è chiaramente dovuto alla presenza dell'induttore.

Riferendoci alla rappresentazione dei rispettivi fasori nel piano di Gauss, abbiamo qualcosa del tipo seguente:



Naturalmente, abbiamo trovato la corrente nel circuito, quando invece potremmo essere interessanti alle tensioni ai capi dei due elementi: queste possono essere ricavate o in termini di fasori oppure direttamente a partire da i(t); in entrambi i casi, comunque, è sufficiente applicare le relazioni di lato: abbiamo così che

$$v_R(t) = Ri(t) = \frac{RV_m}{\rho\sqrt{2}}\cos(\omega t - \theta)$$
$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = -\frac{\omega L V_m}{\rho\sqrt{2}}\sin(\omega t - \theta)$$

Si nota subito che la tensione sul resistore è sfasata in ritardo di θ° rispetto alla tensione di alimentazione (ed era logico che fosse così, in quanto la tensione ai capi del resistore è sempre in fase con la corrente e abbiamo trovato prima che la corrente era in ritardo di θ°), mentre la tensione ai capi dell'induttore è in anticipo di 90°-θ° rispetto alla tensione (è sufficiente considerare che la corrente nell'induttore è sfasata di θ° in ritardo rispetto alla tensione di alimentazione e che la tensione ai capi dell'induttore è sfasata di 90° in anticipo rispetto alla corrente nell'induttore stesso). Ovviamente, se θ°>90°, la tensione sull'induttore è in anticipo, mentre, se θ°<90, essa è in ritardo.

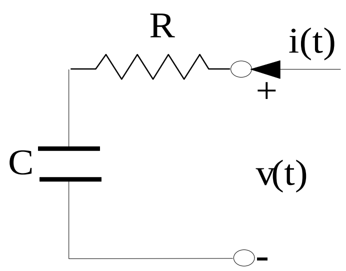
Osserviamo anche un'altra cosa: considerata l'espressione della corrente, se sostituiamo a ρ la sua espressione, troviamo che

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\cos(\omega t - \theta)$$

e questa relazione mostra che, così come nel caso del circuito puramente induttivo, la semi-ampiezza della corrente diminuisce all'aumentare della pulsazione ω (anche se non più in modo proporzionale).

RESISTORE E CONDENSATORE COLLEGATI IN SERIE

Consideriamo adesso il circuito seguente:



La tensione di alimentazione è ancora una volta $v(t) = V_m\cos(\omega t)$ e vogliamo conoscere la corrente assorbita dal circuito, che, in questo caso, è la corrente che fluisce nella serie tra resistore e condensatore.

Possiamo sempre ragionare in termini di fasori: il fasore associato alla tensione di alimentazione è $\overline{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}\langle 0°$, mentre l'impedenza complessiva del circuito è la serie delle due impedenze, ossia

$$\dot{z} = R - j\frac{1}{wC} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{w^2C^2}}\left\langle \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{wRC}\right)\right.$$

Ponendo genericamente

$$\rho = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \qquad\qquad \theta = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\omega RC}\right)$$

possiamo scrivere che l'impedenza complessiva è $\dot{z} = r\langle q$ e quindi che il fasore associato alla corrente è

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\dot{z}} = \frac{\frac{V_m}{\sqrt{2}}\langle 0°}{r\langle q} = \frac{V_m}{r\sqrt{2}}\langle -q°$$

A partire dal fasore $\bar{I}$ associato alla corrente possiamo ricavarci l'espressione esplicita di tale corrente:

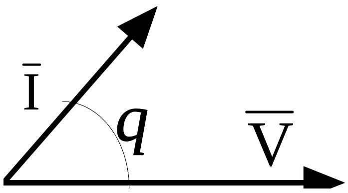
$$i(t) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\bar{I}e^{jwt}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\frac{V_m}{r\sqrt{2}}\langle -q°(1\langle wt)\right] = \frac{V_m}{r}\cos(wt - q)$$

Essendo questa volta θ un angolo negativo (in quanto l'argomento dell' "Arctg" è negativo), possiamo anche scrivere la corrente nella forma

$$i(t) = \frac{V_m}{\rho}\cos(\omega t + |\theta|)$$

e questa relazione mostra ancora più chiaramente che la corrente assorbita dal circuito è sfasata di θ° in anticipo rispetto alla tensione di alimentazione. Questo ci consente di dire, quindi, in generale, che, *in un circuito ohmico-capacitivo, la corrente assorbita è sempre sfasata in anticipo rispetto alla tensione di alimentazione.*

Riferendoci alla rappresentazione dei rispettivi fasori nel piano di Gauss, abbiamo qualcosa del tipo seguente:



Naturalmente, possiamo anche in questo caso trovare le tensioni sul resistore e sul condensatore. In particolare, mentre nel caso del circuito ohmico-induttivo abbiamo utilizzato l'espressione di i(t), in questo caso, almeno per determinare la tensione sul condensatore, è conveniente riferirsi ai fasori, onde evitare la risoluzione di un integrale. Abbiamo dunque quanto segue:

- per quanto riguarda il resistore, abbiamo semplicemente che

$$v_R(t) = Ri(t) = \frac{RV_m}{\rho\sqrt{2}}\cos(\omega t - \theta)$$

- per quanto riguarda, invece, il condensatore, abbiamo che il fasore associato alla tensione ai suoi capi è

$$\overline{V}_C = \dot{z}_C \bar{I} = \left(-j\frac{1}{wC}\right)\bar{I} = \frac{\frac{V_m}{r\sqrt{2}}\langle -q^\circ}{\frac{1}{wC}\langle -90^\circ} = \frac{wCV_m}{r\sqrt{2}}\langle 90^\circ - q^\circ$$

per cui l'espressione esplicita di tale tensione è

$$v_C(t) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\overline{V}_C e^{jwt}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\left(\frac{wCV_m}{r\sqrt{2}}\langle 90^\circ - q^\circ\right)(1\langle wt)\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{wCV_m}{r}\langle wt + 90^\circ - q^\circ\right] =$$
$$= \frac{wCV_m}{r}\cos(wt + 90^\circ - q^\circ)$$

Si nota subito che, mentre la tensione sul resistore è, come sempre, sfasata in ritardo di θ° rispetto alla tensione di alimentazione, mentre la tensione ai capi del condensatore è dell'induttore è in anticipo di 90°-θ° rispetto alla tensione. Ovviamente, se θ°>90°, la tensione sull'induttore è in ritardo, mentre, se θ°<90, essa è in anticipo.

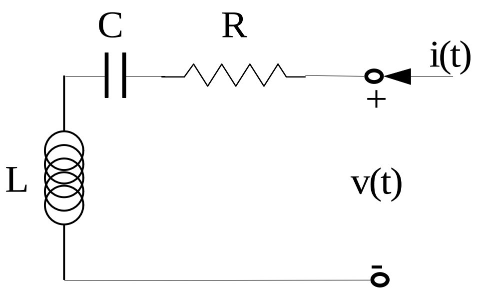
Osserviamo anche un'altra cosa: considerata l'espressione della corrente, se sostituiamo a ρ la sua espressione, troviamo che

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}\cos(\omega t - \theta)$$

e questa relazione mostra che, così come nel caso del circuito puramente capacitivo, la semi-ampiezza della corrente aumenta all'aumentare della pulsazione ω (anche se non più in modo proporzionale).

RESISTORE, INDUTTORE E CONDENSATORE COLLEGATI IN SERIE

L'ultimo caso di circuito elementare che prendiamo in esame è il seguente:



La tensione di alimentazione è ancora una volta $v(t) = V_m \cos(\omega t)$ e vogliamo conoscere la corrente assorbita dal circuito.

Sappiamo già che l'impedenza complessiva del circuito, somma delle tre impedenze, è

$$\dot{z} = \mathrm{R} + j\left(w\mathrm{L} - \frac{1}{w\mathrm{C}}\right) = \underbrace{\sqrt{\mathrm{R}^2 + \left(w\mathrm{L} - \frac{1}{w\mathrm{C}}\right)^2}}_{r} \Bigg\langle \underbrace{\mathrm{arctg}\left(\frac{w\mathrm{L} - \frac{1}{w\mathrm{C}}}{\mathrm{R}}\right)}_{q}$$

e che, quindi, il fasore associato alla corrente risulta essere

$$\bar{\mathrm{I}} = \frac{\bar{\mathrm{V}}}{\dot{z}} = \frac{\mathrm{V_M}}{r\sqrt{2}} \langle -q°$$

Noto il fasore associato alla corrente, possiamo calcolarci l'espressione esplicita di tale corrente:

$$\mathrm{i(t)} = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\bar{\mathrm{I}}e^{jwt}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\frac{\mathrm{V_m}}{r\sqrt{2}}\langle -q°(1\langle wt)\right] = \frac{\mathrm{V_m}}{r}\cos(wt - q)$$

E' chiaro che, questa volta, non possiamo dire nulla, a priori, circa lo sfasamento della corrente rispetto alla tensione; i casi possibili sono infatti 3:

- il primo caso è quello in cui $w\mathrm{L} = \frac{1}{w\mathrm{C}}$: in questa situazione, la reattanza del circuito è nulla, per cui è nullo anche lo sfasamento della corrente rispetto alla tensione: si parla, in questo caso, di circuito in condizioni di "*risonanza serie*", ma è una condizione che sarà esaminata in seguito, per cui ci limitiamo a dire che, in questo caso, essendo la corrente in fase con la tensione, *il circuito ha natura resistiva*;

- il secondo caso è quello in cui $w\mathrm{L} > \frac{1}{w\mathrm{C}}$: in questa situazione, la reattanza del circuito è positiva, per cui è positivo il valore di θ°: di conseguenza, la corrente risulta in ritardo di θ° rispetto alla tensione; ciò significa che *il circuito è di natura induttiva*, ossia che la reattanza induttiva prevale su quella capacitiva;

- il terzo ed ultimo caso è quello in cui $w\mathrm{L} < \frac{1}{w\mathrm{C}}$: in questa situazione, la reattanza del circuito è negativa, per cui è negativo il valore di θ°: di conseguenza, la corrente risulta in anticipo di θ° rispetto alla tensione, il che significa che *il circuito è di natura capacitiva*, ossia che la reattanza capacitiva prevale su quella induttiva.

Possiamo infine trovare le tensioni ai capi dei tre elementi:

- per quanto riguarda il resistore, abbiamo semplicemente che

$$\mathrm{v_R(t)} = \mathrm{Ri(t)} = \frac{\mathrm{RV_m}}{\rho\sqrt{2}}\cos(\omega t - \theta)$$

- per quanto riguarda, invece, il condensatore, abbiamo che il fasore associato alla tensione ai suoi capi è

$$\overline{V}_C = \dot{z}_C \overline{I} = \left(-j\frac{1}{wC}\right)\overline{I} = \frac{\frac{V_m}{r\sqrt{2}}\langle -q°}{\frac{1}{wC}\langle -90°} = \frac{wCV_m}{r\sqrt{2}}\langle 90° - q°$$

per cui l’espressione esplicita di tale tensione è

$$v_C(t) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\overline{V}_C e^{jwt}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\left(\frac{wCV_m}{r\sqrt{2}}\langle 90° - q°\right)(1\langle wt)\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{wCV_m}{r}\langle wt + 90° - q°\right] =$$
$$= \frac{wCV_m}{r}\cos(wt + 90° - q°)$$

- per quanto riguarda, infine, l’induttore, abbiamo che il fasore associato alla tensione ai suoi capi è

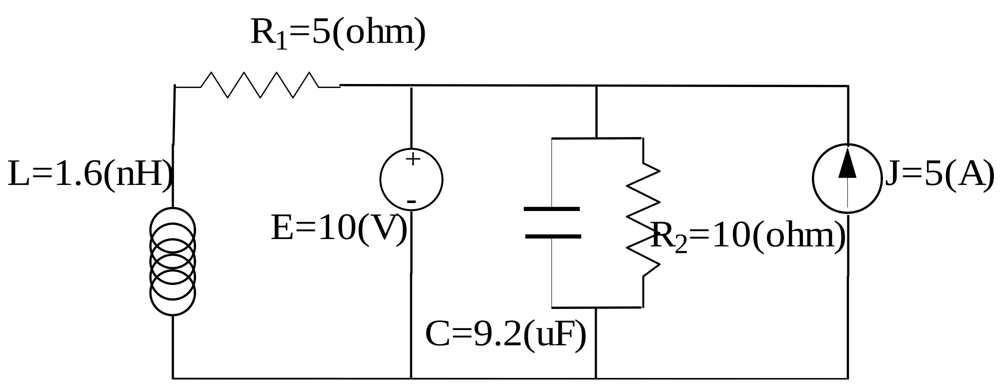
$$\overline{V}_L = \dot{z}_L \overline{I} = (jwL)\overline{I} = \frac{\frac{V_m}{r\sqrt{2}}\langle -q°}{wL\langle 90°} = \frac{V_m}{rwL\sqrt{2}}\langle -q° - 90°$$

per cui l’espressione esplicita di tale tensione è

$$v_L(t) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\overline{V}_L e^{jwt}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\left(\frac{V_m}{rwL\sqrt{2}}\langle -q° - 90°\right)(1\langle wt)\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{V_m}{rwL}\langle wt - 90° - q°\right] =$$
$$= \frac{V_m}{rwL}\cos(wt - 90° - q°)$$

ESEMPIO: CIRCUITO RLC COMPLESSO

Sia dato il circuito in regime sinusoidale illustrato nella figura seguente:



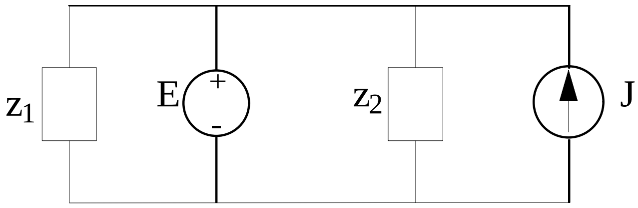
Determinare la corrente che circola nel generatore di tensione, assumendo w=100p.

Risoluzione

La prima cosa che possiamo fare è rappresentare il circuito in termini di impedenze e di fasori:

- il fasore associato alla forma d'onda del generatore di tensione è $\overline{E} = E\langle 0° = 10\langle 0°$, mentre quello associato alla forma d'onda della corrente è $\overline{J} = J\langle 0° = 5\langle 0°$;
- l'impedenza corrispondente alla serie tra induttore e resistore è $\dot{z}_1 = R_1 + jwL$;
- l'impedenza corrispondente al parallelo tra resistore e condensatore è infine $\dot{z}_2 = R_2 - j\frac{1}{wC}$;

Il circuito da analizzare è dunque il seguente:



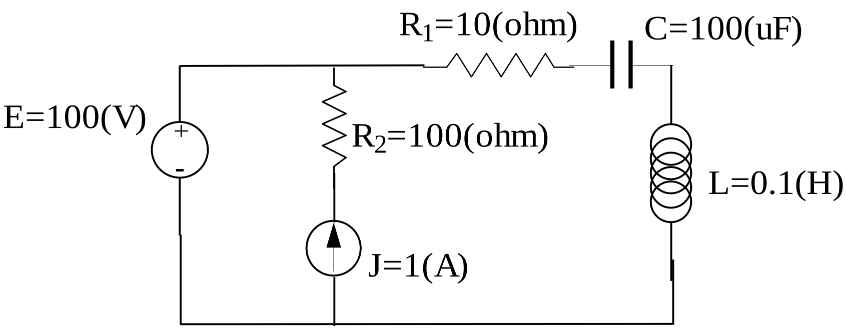
Si osserva che le due impedenze e il generatore di tensione sono in parallelo e sono alimentate dal generatore di corrente: applicando allora la LKC e le rispettive relazioni di lato, possiamo scrivere che

$$\overline{I}_E = \overline{J} - \overline{I}_{z1} - \overline{I}_{z2} = \overline{J} - \frac{\overline{V}_{z1}}{\dot{z}_1} - \frac{\overline{V}_{z2}}{\dot{z}_2} = \overline{J} - \overline{E}\left(\frac{1}{\dot{z}_1} + \frac{1}{\dot{z}_2}\right)$$

Facendo i conti, si trova che $\overline{I}_E = \overline{J} - \overline{I}_{z1} - \overline{I}_{z2} = 5 - 2 + j0.2 - 1 - j0.01 = 2 + j0.19 \quad (A)$.

ESEMPIO: CIRCUITO RLC COMPLESSO

Sia dato il circuito in regime sinusoidale illustrato nella figura seguente:



Calcolare la tensione ai capi del condensatore e la corrente che fluisce nel generatore di tensione, assumendo la tensione del generatore di tensione come riferimento.

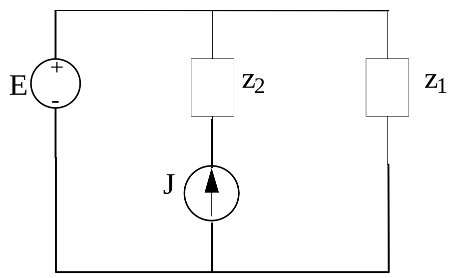
Risoluzione

Anche in questo caso, la prima cosa che possiamo fare è rappresentare il circuito in termini di impedenze e di fasori:

- il fasore associato alla forma d'onda del generatore di tensione è $\overline{E} = E\langle 0° = 100\langle 0°$, mentre quello associato alla forma d'onda della corrente è $\overline{J} = J\langle 0° = 1\langle 0°$;

- l'impedenza corrispondente alla serie tra induttore, resistore e condensatore è $\dot{z}_1 = R_1 + j\left(wL - \frac{1}{wC}\right)$;
- l'impedenza corrispondente al solo resistore R_2 è infine $\dot{z}_2 = R_2$.

Il circuito da analizzare è dunque il seguente:



La corrente che scorre nell'impedenza z_1 è $\bar{I}_{z1} = \frac{\bar{E}}{\dot{z}_1}$. Ma questa è anche la corrente che scorre nel resistore, per cui la tensione ai capi di questo elemento è

$$\bar{V}_C = \dot{z}_C \bar{I}_{z1} = \dot{z}_C \frac{\bar{E}}{\dot{z}_1} = \left(-j\frac{1}{\omega C}\right)\frac{E\rangle 0°}{R_1 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\frac{E}{\omega C}\rangle -90°}{R_1 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Per quanto riguarda, invece, la corrente che scorre nel generatore di tensione, possiamo semplicemente applicare la LKC e scrivere che

$$\bar{I}_E = \bar{J} - \bar{I}_{z2} = \bar{J} - \frac{\bar{V}_{z2}}{\dot{z}_2} = \bar{J} - \frac{\bar{E}}{\dot{z}_2}$$

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1