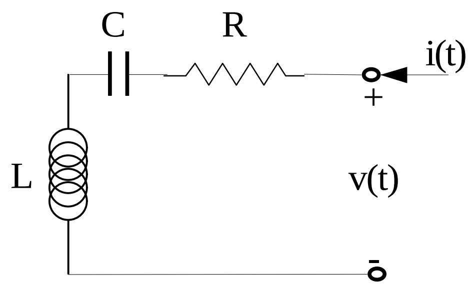
Appunti di Elettrotecnica
Analisi in regime sinusoidale (parte III)

Circuiti in regime sinusoidale con ω variabile

RISONANZA SERIE

Consideriamo un semplice monoporta costituito da un collegamento in serie tra un resistore, un induttore ed un condensatore (tutti a 2 terminali):



Supponiamo di alimentare il circuito mediante una tensione sinusoidale di ampiezza costante e pulsazione ω: avremo perciò una forma d'onda del tipo $v(t) = V_M \cos(\omega t)$ (dove ovviamente stiamo assumendo α_V=0) cui è associato il "solito" fasore $\overline{V} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} \langle 0°$.

Ci chiediamo, allora, come varia la corrente i(t) assorbita dal carico al variare della pulsazione ω dell'alimentazione.

Per prima cosa, determiniamo il fasore $\bar{I}$ associato alla corrente i(t) e l’angolo di sfasamento φ, che saranno ovviamente entrambi funzioni di ω: per un circuito RLC di questo tipo sappiamo che l’impedenza d’ingresso vale

$$\dot{z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

ed essa lega corrente e tensione mediante la relazione $\bar{V} = \dot{z}\bar{I}$. Abbiamo allora facilmente che

$$I(\omega) = \frac{V}{z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Vediamo di analizzare nel dettaglio le espressioni ottenute, cominciando dalla corrente.

La prima cosa che risulta evidente è che esiste un valore della pulsazione ω che annulla la reattanza all’impedenza, ossia che annulla il termine $\omega L - \frac{1}{\omega C}$. Si tratta precisamente del valore

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

che prende il nome di **pulsazione di risonanza**.

Il motivo del termine “risonanza” sarà chiaro tra un attimo. Ciò che importa dire per il momento è che, *se alimentiamo un circuito RLC serie mediante una alimentazione con pulsazione pari a* w_0*, il circuito si comporta semplicemente come un* <u>*circuito resistivo*</u>*, ossia come se né l’induttore né il condensatore fossero presenti.*

Dire che il circuito si comporta come un *circuito resistivo* equivale fondamentalmente a dire 3 cose:

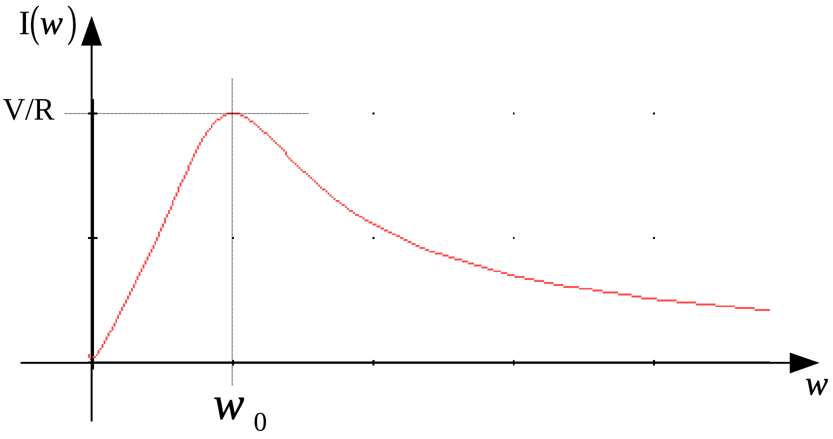
- z=R (la reattanza all’impedenza è nulla)
- φ=0 (tensione e corrente sono in fase)
- I=V/R (la corrente assume il suo valore massimo)

Oltre a questo, si osservano anche altre due cose a proposito del valore assunto dal valore efficace della corrente i(t) in funzione di ω: si ha infatti che

$$\text{se } \omega=0 \;\rightarrow\; I(0)=0$$
$$\text{se } \omega\rightarrow\infty \;\rightarrow\; I(\infty)\rightarrow 0$$

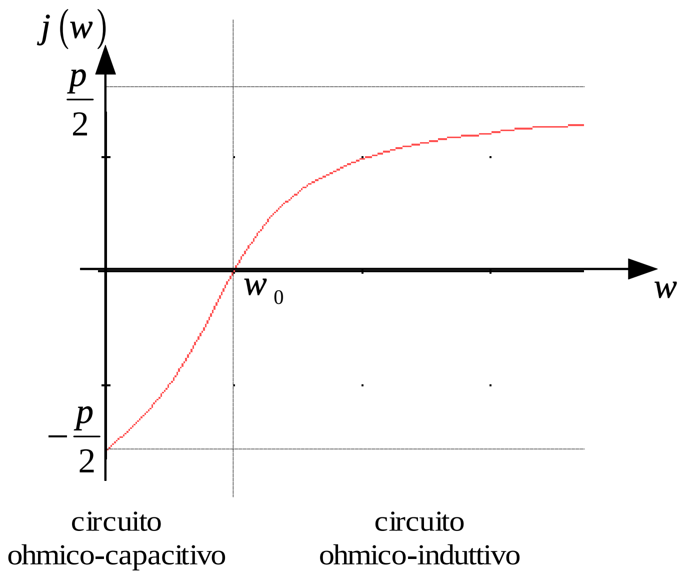
Quindi, se la pulsazione dell’alimentazione tende ad essere piccola, anche la corrente è piccola e lo stesso accade quando la pulsazione dell’alimentazione tende ad essere grande.

Sulla base di questi risultati, possiamo tracciare un grafico del valore efficace della corrente I(ω) in funzione di ω:



Si osserva, dunque, come il valore efficace della corrente parta dal valore nullo in corrispondenza di ω=0 (che corrisponde ad alimentare il circuito con una tensione continua), per crescere verso il valore di picco V/R , che si ottiene in corrispondenza di ω_0, e quindi decrescere nuovamente verso il valore nullo per $\omega \rightarrow \infty$.

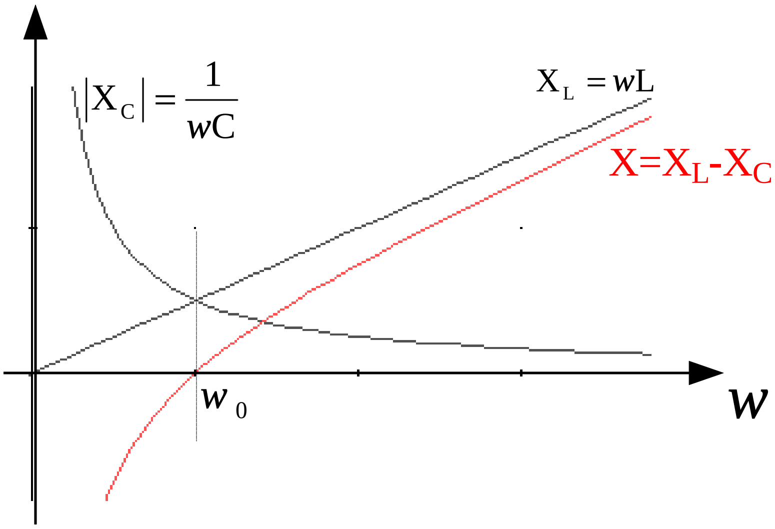
Il discorso non è molto diverso per quanto riguarda l'angolo di sfasamento φ, il cui andamento grafico è fatto nel modo seguente:



Il grafico parte dal valore $-\pi/2$ per ω=0; cresce fino a raggiungere il valore 0 in corrispondenza della pulsazione di risonanza, in accordo al fatto che, in questa condizione, il circuito è resistivo e quindi corrente e tensione sono in fase (ossia appunto φ=0); infine cresce ancora, tendendo in modo esponenziale al valore $+\pi/2$ al crescere di ω. Quindi, *l'angolo di sfasamento è una funzione crescente di w e si annulla in condizioni di risonanza.*

Nel primo tratto, dove l'angolo è negativo, il circuito si comporta dunque come un **circuito ohmico-capacitivo**, in quanto la reattanza capacitiva prevale su quella induttiva; quando l'angolo di sfasamento si annulla, si comporta da circuito solo **ohmico**; infine, nel tratto in cui l'angolo di sfasamento è positivo, il circuito risulta essere **ohmico-induttivo**, in quanto la reattanza induttiva prevale questa volta su quella capacitiva.

Questo fatto può essere visto in un diagramma in cui riportiamo, sempre al variare di ω, i valori di X_C, X_L e $X = X_L - X_C$:



Il grafico mostra chiaramente che, prima di w_0, la reattanza capacitiva è maggiore di quella induttiva, per cui la reattanza complessiva è negativa, mentre, dopo w_0, accade il contrario, per cui X è positiva. In w_0, le due reattanze sono identiche e quindi la reattanza complessiva X si annulla.

Fattore di qualità serie

Consideriamo sempre il circuito RLC serie esaminato prima e supponiamo che esso venga alimentato da una tensione avente pulsazione pari alla pulsazione di risonanza ω_0. Abbiamo visto che, in queste condizioni, l’impedenza del circuito vale semplicemente R (cioè il circuito si comporta in modo puramente resistivo) e che il fasore associato alla corrente i(t) è $\bar{I} = \frac{V}{R}\langle 0°$.

Questa è anche la corrente che scorre nel condensatore e nell’induttore, per cui possiamo calcolarci i fasori delle rispettive tensioni:

$$\bar{V}_C = \dot{z}_C \bar{I} = \frac{V}{w_0 RC}\langle -90°$$

$$\bar{V}_L = \dot{z}_L \bar{I} = \frac{w_0 VL}{R}\langle 90°$$

Tenendo conto che $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, le due tensioni risultano essere

$$\bar{V}_C = \dot{z}_C \bar{I} = \frac{V}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\langle -90°$$

$$\bar{V}_L = \dot{z}_L \bar{I} = \frac{V}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\langle 90°$$

Si osserva quindi che, *in condizioni di risonanza, le tensioni sul condensatore e sull’induttore risultano essere in opposizione di fase (cioè sfasate di 180°), ma con valori efficaci uguali.*

In altre parole, in condizioni di risonanza serie, la tensione di alimentazione si ritrova interamente ai capi della resistenza, mentre le tensioni ai capi del condensatore e dell’induttore sono uguali ed in opposizione di fase.

Prende allora il nome di **fattore di qualità serie** il rapporto tra il valore efficace della tensione ai capi del condensatore (o dell'induttore in base a quanto appena visto) e la tensione di alimentazione, quando il circuito è in condizioni di risonanza:

$$\boxed{Q = \frac{V_L}{V} = \frac{V_C}{V} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

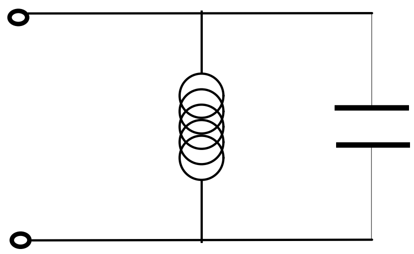
L'importanza ingegneristica di questo fattore Q è notevole e può essere spiegata nel modo seguente: dato sempre il circuito RLC serie visto prima, supponiamo di alimentarlo con una tensione sinusoidale avente valore efficace di 220V e frequenza angolare $\omega=\omega_0$; in base a quanto visto prima, la condizione di funzionamento del circuito (cioè la *risonanza serie*) è tale che ai capi della resistenza si localizzi una tensione con valore efficace di 220 e che le tensioni ai capi di C ed L siano uguali ed in opposizione di fase. Quanto vale il valore efficace della tensione ai capi di questi elementi? In base a come abbiamo definito Q, essa vale $V_L = V_C = QV$, ossia è pari a 220V moltiplicato per il fattore di qualità serie; è importante allora conoscere il valore di Q: per esempio, supponiamo che i valori di R,L e C siano tali che risulti Q=10; in questo caso, condensatore e induttore hanno ai loro capi una tensione di valore efficace pari a 2200V e, presumibilmente, si tratta di un valore che distrugge entrambi gli elementi.

Considerando che Q è inversamente proporzionale ad R e che, nella maggior parte dei circuiti, si tende a rendere R quanto più piccola è possibile, è chiara l'importanza che assume Q: dovendo decidere come alimentare il circuito, bisogna stare attenti alla pulsazione ω ed al valore di Q, in quanto, se la pulsazione è vicina o addirittura uguale a quella di risonanza e se Q è elevato, è molto probabile che le tensioni ai capi di C ed L siano tali di distruggere il circuito stesso.

D'altra parte, è anche possibile fare un discorso inverso a quello appena esposto: considerato sempre lo stesso circuito, supponiamo che esso venga alimentato dal solito segnale sinusoidale $v(t) = V_M \cos(\omega t)$; supponiamo anche che l'ampiezza V_M di questo segnale (o, ciò che è lo stesso, il suo valore efficace), sia particolarmente debole, per cui è nostra intenzione amplificarlo; per fare questo, possiamo sfruttare proprio il concetto di risonanza, in quanto abbiamo visto che quanto più la pulsazione di alimentazione si approssima alla pulsazione di risonanza, tanto più la tensione che possiamo raccogliere ai capi della resistenza R tende a crescere: considerando che la ω di alimentazione è fissa, l'unica cosa che possiamo fare è quella di variare la pulsazione di risonanza ω_0 del circuito in modo che si avvicini quanto più è possibile a ω; ovviamente, per variare ω_0, dobbiamo variare il valore di uno dei parametri del circuito, ossia di R,L o C; generalmente, si opera sul valore di C, che può essere modificato utilizzando i cosiddetti "condensatori a capacità variabile". Le variazioni di C provocano ovviamente variazioni di Q e potremo scegliere quel valore di C (e quindi di ω_0 e di Q) che ci fornisce l'amplificazione voluta del segnale in ingresso.

RISONANZA PARALLELO

Nei paragrafi precedenti abbiamo esaminato cosa succede alla corrente di un circuito RLC serie quando si fa variare la pulsazione ω della tensione sinusoidale di alimentazione. Qualcosa di simile vogliamo vedere adesso a proposito di un circuito monoporta costituito da un collegamento in parallelo di un induttore di induttanza L ed un condensatore di capacità C:



Supponiamo di alimentare il collegamento mediante una tensione sinusoidale, la cui forma d'onda sia $V(t) = V_M \cos(\omega t)$. Sappiamo ormai bene che la risposta del monoporta è una corrente in ingresso del tipo

$$I(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi)$$

dove φ è ancora una volta l'angolo di sfasamento, ossia l'argomento dell'impedenza totale del circuito considerato.

Così come abbiamo fatto per la risonanza serie, vogliamo esaminare l'andamento della corrente I(t) al variare della pulsazione ω con cui alimentiamo il circuito. E' abbastanza intuitivo comprendere come il ragionamento che ci accingiamo a fare sia semplicemente il "duale" di quello fatto per la risonanza serie.

Sappiamo intanto che corrente e tensione sono legate dalla legge $\overline{I} = \overline{V}\dot{y}$, dove $\dot{y}$ è l'ammettenza del circuito (pari al reciproco dell'impedenza). Tale ammettenza, per un collegamento in parallelo, è la somma delle ammettenze: le singole ammettenze sono

$$\dot{y}_L = \frac{1}{\dot{z}_L} = \frac{1}{j\omega L} = -\frac{j}{\omega L}$$

$$\dot{y}_C = \frac{1}{\dot{z}_C} = j\omega C$$

per cui l'ammettenza globale (detta anche "*ammettenza di porta*") è

$$\dot{y} = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Allora, la corrente è semplicemente

$$I(\omega) = V\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Questa funzione nella variabile ω ammette un minimo in corrispondenza del valore di ω tale che $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ e si tratta evidentemente del valore

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Questo valore della pulsazione ω prende il nome di **pulsazione di anti-risonanza**: l'uso del prefisso "anti" deriva dal fatto che, mentre, nella risonanza serie, la corrente che si ottiene per $\omega=\omega_0$ è la massima possibile, nella risonanza parallelo (o **antirisonanza**) esso è nulla, ossia assume il valore minimo:

$$I(\omega_0) = 0$$

Naturalmente, mentre è nulla la corrente in ingresso, non sono certamente nulle le correnti che attraversano i due elementi: si ha infatti che

$$\bar{I}_L = \bar{V}\dot{y}_L = -\bar{V}j\frac{1}{\omega_0 L} = -\bar{V}j\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\bar{I}_C = \bar{V}\dot{y}_C = \bar{V}j\omega_0 C = \bar{V}j\sqrt{\frac{C}{L}} = -\bar{I}_L$$

Come era prevedibile, si tratta di <u>corrente uguali ed opposte</u>, che è la condizione necessaria affinché la corrente complessiva sia nulla (come imposto dalla LKC). In pratica, alimentando il circuito con una tensione sinusoidale di pulsazione pari alla pulsazione di antirisonanza ω_0 , si realizza un **oscillatore puro**: *la corrente risulta ingabbiata tra il condensatore e l'induttore.*

Naturalmente, ciò è possibile solo <u>ritenendo ideali l'induttore ed il condensatore</u> e, soprattutto, quando mancano elementi dissipativi. Al contrario, nella realtà, l'induttore e il condensatore presentano una certa dissipazione di potenza: per tenere conto di questa dissipazione e vedere come cambiano le cose, possiamo inserire in parallelo anche un resistore di ammettenza generica

$$\dot{y}_R = \frac{1}{\dot{z}_R} = G$$

L'ammettenza di porta diventa allora

$$\dot{y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

e quindi la corrente, in termini di fasori, è

$$\bar{I} = \bar{V}\dot{y} = GV + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)V$$

Per una pulsazione pari a ω_0, la parte immaginaria si annulla e otteniamo perciò $\bar{I} = G\bar{V}$. Quindi, anche in condizioni di anti-risonanza, la corrente in ingresso al circuito non è più nulla. Le correnti nell'induttore e nel condensatore continuano ad essere le stesse di prima, ossia uguali ed opposte, per cui è come se tutta la corrente in ingresso passi per il resistore e dissipi energia.

Possiamo cioè dire che, *anche in presenza di fenomeni dissipativi, è realmente possibile realizzare un fenomeno periodico nel parallelo tra condensatore e induttore.* Tuttavia, mentre nel caso ideale questo era possibile senza alcun apporto energetico dall'esterno, nel caso reale è necessario fornire energia dall'esterno, proprio in modo da compensare gli effetti dissipativi sul resistore.

Fattore di qualità parallelo

Così come, nel caso del circuito RLC serie, in condizioni di risonanza, avevamo la tensione sul condensatore e quella sull'induttore con valori efficaci uguali, ma in opposizione di fase, abbiamo poco fa visto che lo stesso accade nel circuito RLC parallelo, in condizioni di antirisonanza, per quanto riguarda le correnti nel condensatore e nell'induttore:

$$\bar{I}_L = \bar{V}\dot{y}_L = -\bar{V}j\frac{1}{\omega_0 L} = -\bar{V}j\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\bar{I}_C = \bar{V}\dot{y}_C = \bar{V}j\omega_0 C = \bar{V}j\sqrt{\frac{C}{L}} = -\bar{I}_L$$

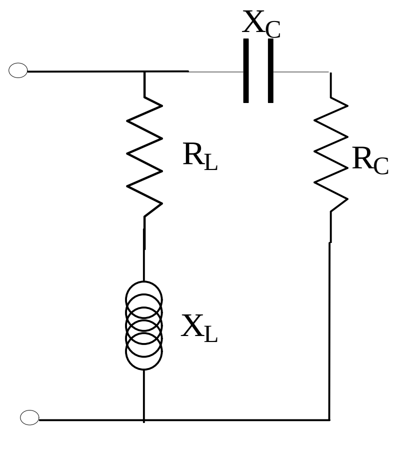
Prende allora il nome di **fattore di qualità parallelo** il rapporto tra la corrente nel condensatore (o dell'induttore in base a quanto appena visto) e la corrente in ingresso al circuito, quando il circuito è in condizioni di anti-risonanza:

$$\boxed{Q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I} = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

E' immediato verificare che questo fattore di qualità parallelo è pari esattamente al reciproco del fattore di qualità serie trovato prima.

Esempio

Sia dato il circuito illustrato nella figura seguente:



Determinare la pulsazione di antirisonanza.

Risoluzione

Il *procedimento generale* per il calcolo della pulsazione di antirisonanza di un circuito è il seguente:

- in primo luogo, si calcola la suscettanza del circuito, ossia il coefficiente della parte immaginaria dell'ammettenza del circuito;

- in secondo luogo, si trova il valore di ω che annulla tale suscettanza.

Applichiamo allora questo metodo al nostro caso. Cominciamo a calcolare l'impedenza del circuito:

$$\dot{z} = \dot{z}_1 // \dot{z}_2 = \frac{\dot{z}_1 \dot{z}_2}{\dot{z}_1 + \dot{z}_2} = \frac{(R_C - jX_C)(R_L + jX_L)}{R_C + R_L + j(X_L - X_C)}$$

Il reciproco di questa quantità è l'ammettenza del circuito:

$$\dot{y} = \frac{R_C + R_L + j(X_L - X_C)}{(R_C - jX_C)(R_L + jX_L)}$$

Di questa quantità ci serve individuare il coefficiente della parte immaginaria, per cui dobbiamo fare qualche calcolo:

$$\dot{y} = \frac{[R_C + R_L + j(X_L - X_C)](R_C + jX_C)}{(R_C^2 + X_C^2)(R_L + jX_L)} = \frac{[R_C + R_L + j(X_L - X_C)](R_C + jX_C)(R_L - jX_L)}{(R_C^2 + X_C^2)(R_L^2 + X_L^2)} =$$

$$= \frac{[R_C + R_L + j(X_L - X_C)](R_L R_C + X_C X_L + j(R_L X_C - R_C X_L))}{(R_C^2 + X_C^2)(R_L^2 + X_L^2)}$$

Da qui si osserva in modo abbastanza veloce che la suscettanza vale

$$\frac{(R_C + R_L)(R_L R_C + X_C X_L) - (X_L - X_C)(R_L X_C - R_C X_L)}{(R_C^2 + X_C^2)(R_L^2 + X_L^2)}$$

Essa sarà allora nulla quando è nullo il numeratore:

$$(R_C + R_L)(R_L R_C + X_C X_L) = (X_L - X_C)(R_L X_C - R_C X_L) = 0$$

Sostituendo i valori di X_C ed X_L e facendo qualche passaggio, otteniamo l'equazione

$$(R_C + R_L)\left(R_L R_C + \frac{L}{C}\right) = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\left(\frac{R_L}{\omega C} - \omega R_C L\right)$$

da cui, riarrangiando in modo da ottenere una equazione in ω, otteniamo

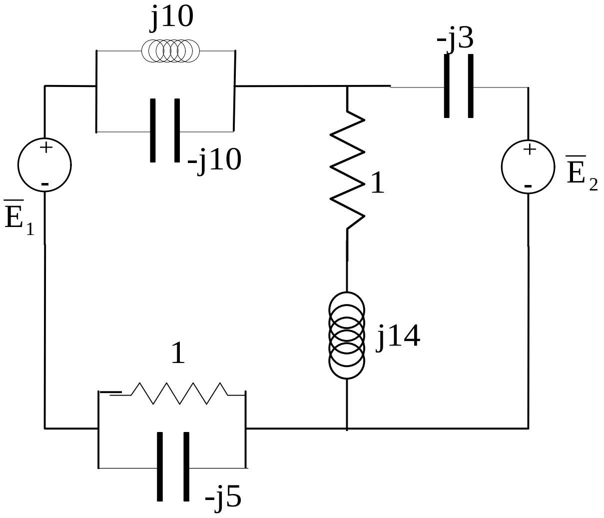
$$(R_C L^2 C^2)\omega^4 + (R_L R_C^2 + R_L^2 R_C)C^2 \omega^2 + R_L = 0$$

Risolvendo questa equazione e scartando le soluzioni prive di significato fisico, si trova che

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L - CR_L^2}{L - CR_C^2}}$$

Esempio

Si consideri il circuito in regime sinusoidale illustrato nella figura seguente:



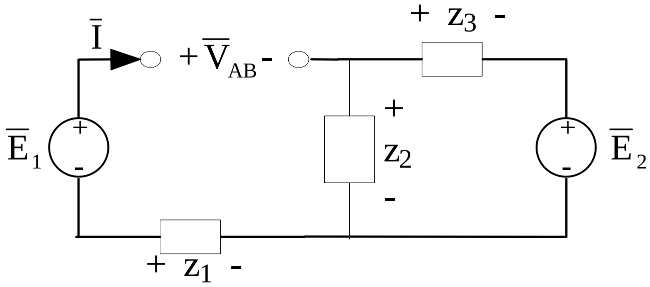
Determinare la tensione V_{AB} sapendo che $\overline{E}_1 = 100\langle -30°$, $\overline{E}_2 = 100\langle 0°$.

<u>Risoluzione</u>

Essendo il circuito in regime sinusoidale, ci conviene, per prima cosa, passare alla rappresentazione in termini di fasori e di impedenze:

- l'impedenza associata al parallelo RC è $\dot{z}_1 = R - jX_C = 1 - j5$
- l'impedenza associata alla serie RL è $\dot{z}_2 = R + jX_L = 1 + j4$
- l'impedenza associata al condensatore in serie a E_2 è $\dot{z}_3 = -jX_C = -j3$
- infine, l'impedenza associata al parallelo LC è $\dot{z}_4 = jX_L - jX_C = 0$: il fatto che questa impedenza sia risultata nulla indica che questo parallelo si trova in condizioni di antirisonanza, ossia in condizioni tali che la corrente fluisce ininterrottamente da C ad L e viceversa, senza mai fluire all'esterno; questo comporta, da un punto di vista circuitale, che il parallelo possa essere sostituito con un circuito aperto, visto che la corrente indicata con $\overline{I}$ risulta essere nulla.

Il circuito da analizzare è dunque il seguente:



Applicando la LKT, abbiamo evidentemente che

$$\overline{V}_{AB} = \overline{E}_1 + \overline{V}_{z1} - \overline{V}_{z2}$$

Tuttavia, avendo detto che $\overline{I} = 0$, è chiaro che nella impedenza z_1 non scorre corrente, per cui non c'è caduta di tensione su di essa e quindi

$$\overline{V}_{AB} = \overline{E}_1 - \overline{V}_{z2}$$

Tutto sta dunque a calcolare $\overline{V}_{z2}$: ma il calcolo è immediato, in quanto, non fluendo corrente nel ramo contenente il generatore di tensione e l'impedenza z_1, le impedenze z_3 e z_2 sono in serie, per cui basta applicare il partitore di tensione per scrivere che

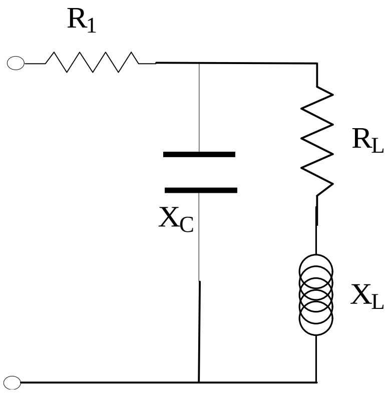
$$\overline{V}_{z2} = \frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_2 + \dot{z}_3}\overline{E}_2$$

Abbiamo dunque che

$$\overline{V}_{AB} = \overline{E}_1 - \frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_2 + \dot{z}_3}\overline{E}_2 = \ldots = -163.4 - j200 \quad (V)$$

Esempio

Sia dato il circuito in regime sinusoidale illustrato nella figura seguente:



Sapendo che $\overline{V} = 110.4\langle 0°$*, determinare il valore della corrente di ingresso quando il circuito è in condizione di risonanza parallelo.*

Risoluzione

La prima cosa da fare è calcolare l'impedenza del circuito:

$$\dot{z} = R_1 + \left(-jX_C // R_2 + jX_L\right) = R_1 + \frac{(-jX_C)(R_2 + jX_L)}{R_2 + j(X_L - X_C)} = R_1 + \frac{(X_C X_L - jX_C R_2)}{R_2 + j(X_L - X_C)}$$

Sostituendo i valori numerici, si ha che

$$\dot{z} = 10 + (5 - j5)$$

Nota l'impedenza di ingresso, andiamo a calcolare l'ammettenza di ingresso, ossia il suo reciproco:

$$\dot{y} = \frac{1}{15 - j5} = \frac{15 + j5}{225 + 25} = \frac{3 + j}{45 + 5} = \frac{3}{50} + j\frac{1}{45 + 5}$$

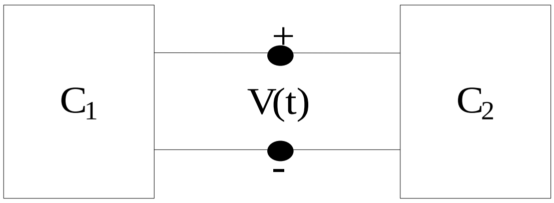
A questo punto, chiedere che il circuito sia in condizioni di risonanza parallelo equivale a chiedere se sia nulla la parte immaginaria di tale ammettenza, per cui la corrente in ingresso, in questa condizione di funzionamento, semplicemente

$$\overline{I} = \dot{y}_R \overline{V} = \frac{3}{50}\overline{V} = 6.624\langle 0°$$

Concetti di equivalenza per circuiti in regime sinusoidale

INTRODUZIONE

I teoremi di Thevenin e Norton visti per i **circuiti resistivi lineari** con ingressi in continua si estendono in maniera ovvia anche ai **circuiti in regime sinusoidale**. L'unica sostanziale differenza è la seguente: sia C_2 il generico circuito monoporta che stiamo studiando e che vogliamo sostituire con un circuito equivalente secondo Thevenin o secondo Norton; sia invece C_1 un qualsiasi circuito collegato a C_2:

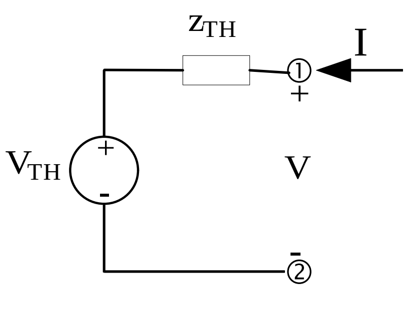


Mentre nel caso dei circuiti resistivi non è stata fatta alcuna ipotesi sul circuito di alimentazione C_1, in questo caso, *se supponiamo che C_2 sia in regime sinusoidale, necessariamente deve essere tale anche il circuito C_1, il che implica che esso debba essere lineare, tempo-invariante e asintoticamente stabile.*

TEOREMA DI THEVENIN PER CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE

Sia dato un circuito monoporta in regime sinusoidale (quindi anche lineare, tempo-invariante, asintoticamente stabile e con tutte le sorgenti iso-frequenziali). Supponiamo che esso ammetta soluzione unica e sia "ben definito", ossia tale che nessun elemento del circuito sia accoppiato a variabili esterne al circuito stesso.

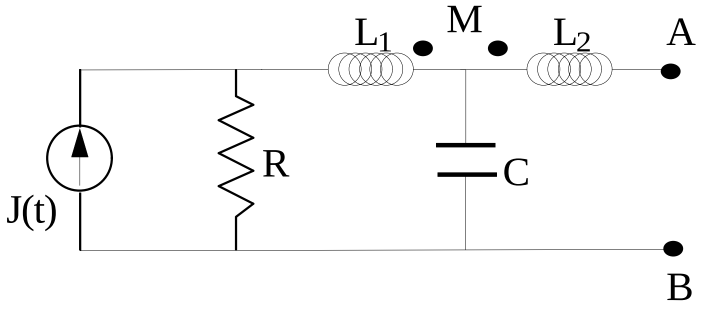
Sotto queste ipotesi, il circuito in questione può essere sostituito dal seguente circuito equivalente:



dove la tensione V_{TH} è la tensione alla porta del circuito quando quest'ultimo è in condizioni di circuito aperto (ossia la cosiddetta "*tensione a vuoto*"), mentre z_{TH} è l' "*impedenza in ingresso*" del circuito quando il circuito è stato "passivato", ossia quando gli eventuali generatori di corrente del circuito sono stati sostituiti da circuiti aperti e i generatori di tensione sono stati sostituiti con cortocircuiti.

ESEMPIO

Determinare il circuito equivalente di Thevenin alla porta A-B del circuito in figura:



dove J(t)=10cos(wt) con w=1 rad/sec, R=1ohm, L_1=2H, L_2=1H, C=0.5F e M=1H

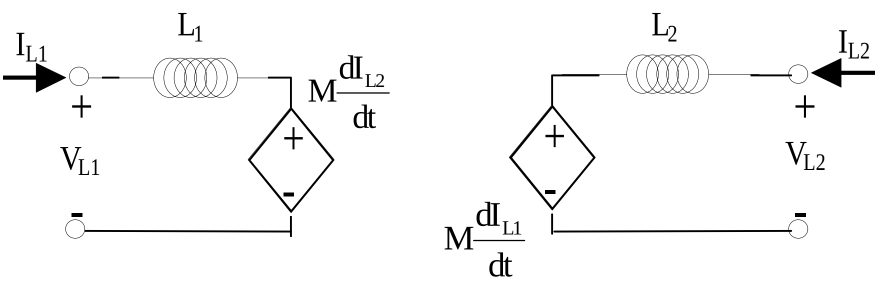
Risoluzione

Abbiamo dunque un circuito in regime sinusoidale del quale dobbiamo trovare l'equivalente di Thevenin alla porta.

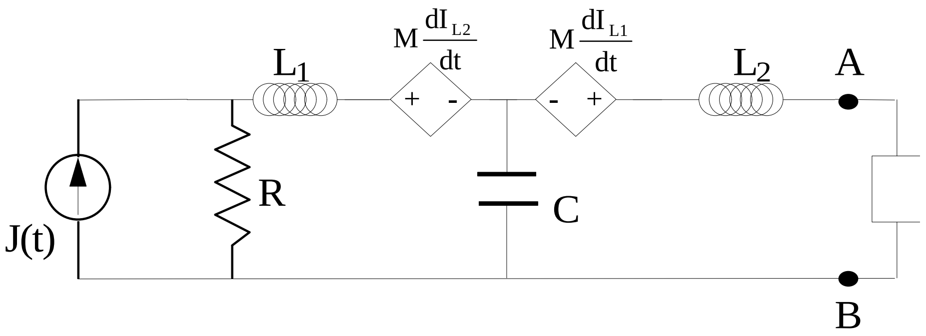
La prima cosa da fare, a prescindere dal tipo di regime in cui si trova il circuito, è sostituire i due induttori accoppiati con una opportuna rappresentazione equivalente: sapendo che la caratteristica tensione-corrente di un **induttore biporta** è data dalle equazioni

$$\begin{cases} V_{L1} = L_1 \dfrac{dI_{L1}}{dt} + M\dfrac{dI_{L2}}{dt} \\ V_{L2} = M\dfrac{dI_{L1}}{dt} + L_2\dfrac{dI_{L2}}{dt} \end{cases}$$

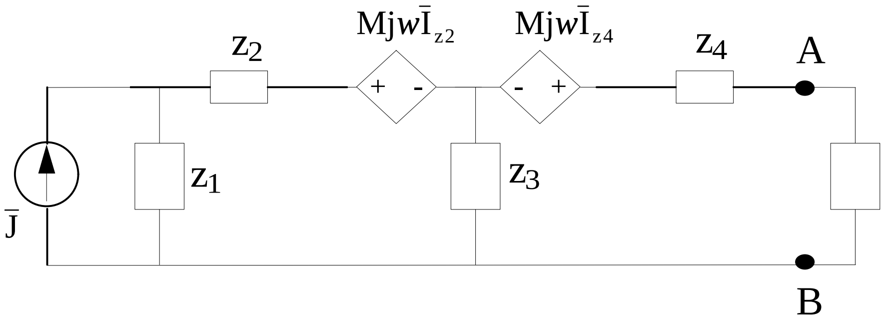
è chiaro che l'induttore biporta può essere sostituito da un circuito biporta equivalente fatto nel modo seguente:



Sostituendo questa configurazione nel circuito, otteniamo quanto segue:



Questo è dunque il circuito del quale dobbiamo trovare l'equivalente di Thevenin. Per fare questo, cominciamo a passare alla *notazione simbolica*, ossia ai fasori e alle impedenze:

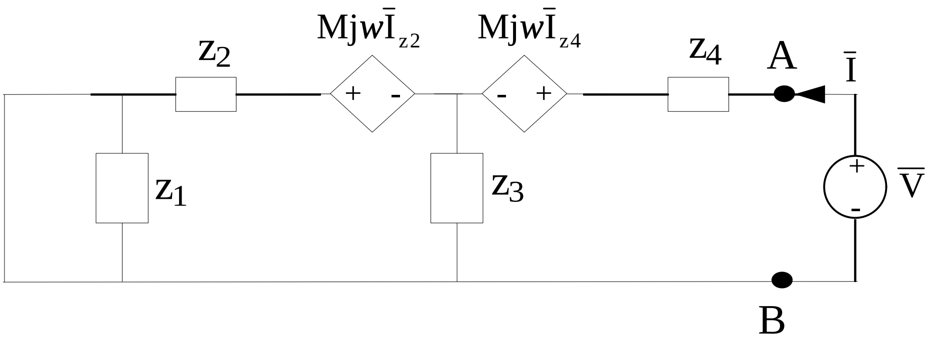


In questo circuito, abbiamo fatto le seguenti posizioni:

$$\bar{J} = \frac{10}{\sqrt{2}}\langle 0°$$
$$\dot{z}_1 = R = R\langle 0°$$
$$\dot{z}_2 = jwL_1 = wL_1\langle 90°$$
$$\dot{z}_3 = -\frac{j}{wC} = \frac{1}{wC}\langle -90°$$
$$\dot{z}_4 = jwL_2 = wL_2\langle 90°$$

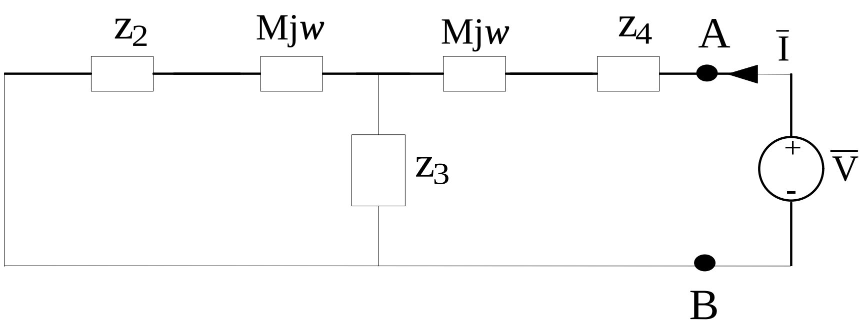
A questo punto, possiamo trovare l'equivalente di Thevenin, cominciando dall'impedenza z_{TH}: dobbiamo passivare il generatore di corrente $\bar{J}$ porre in ingresso alla porta AB un generatore di tensione $\bar{V}$, calcolare la corrente $\bar{I}$ in ingresso dal morsetto A e infine calcolare $\dot{z}_{TH} = \bar{V}/\bar{I}$.

Il circuito su cui ragionare è dunque il seguente:



Intanto è evidente che la z_1 viene cortocircuitata, per cui è come se non ci fosse.

Inoltre, i due generatori pilotati di tensione sono pilotati dalla corrente che fluisce attraverso di essi, per cui sono equivalenti semplicemente a due impedenze, entrambe di valore jωM:

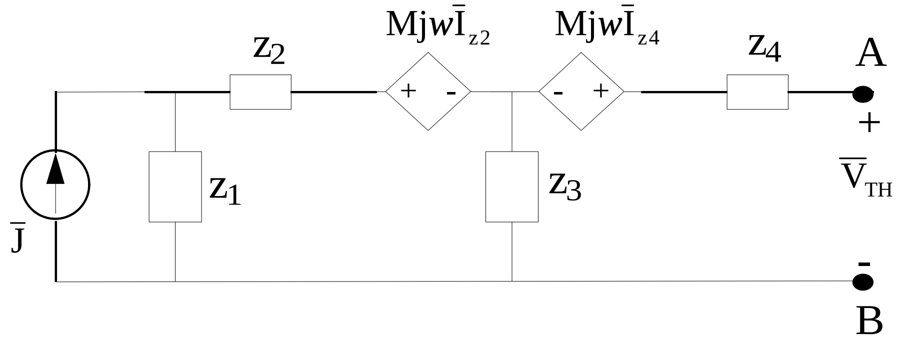


E' chiaro allora che l'impedenza di ingresso di questo circuito può essere ottenuta osservando il modo in cui sono collegate le impedenze presenti:

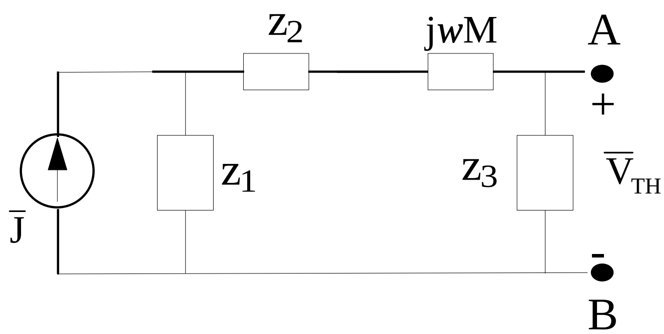
$$\dot{z} = \left(\dot{z}_4 + jwM, \left(\dot{z}_3, \dot{z}_2 + jwM\right)_{\text{PARALLELO}}\right)_{\text{PARALLELO}} = \left(\dot{z}_4 + jwM, \frac{\dot{z}_3\left(\dot{z}_2 + jwM\right)}{\dot{z}_3 + \dot{z}_2 + jwM}\right)_{\text{PARALLELO}} =$$

$$= \frac{\left(\dot{z}_4 + jwM\right)\left(\dfrac{\dot{z}_3\left(\dot{z}_2 + jwM\right)}{\dot{z}_3 + \dot{z}_2 + jwM}\right)}{\left(\dot{z}_4 + jwM\right) + \left(\dfrac{\dot{z}_3\left(\dot{z}_2 + jwM\right)}{\dot{z}_3 + \dot{z}_2 + jwM}\right)}$$

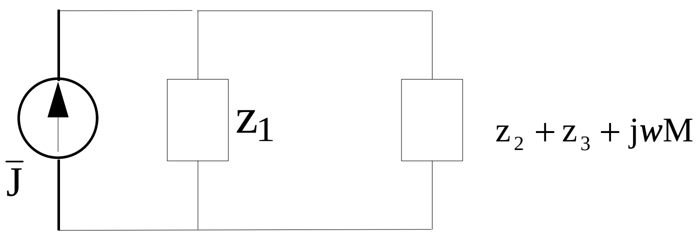
Passiamo adesso al calcolo della tensione $\overline{V}_{TH}$, che è la tensione alla porta del circuito quando la porta stessa è a vuoto (o in condizioni di circuito aperto), ossia quando la corrente che fluisce è nulla. Il circuito su cui ragionare ora è quindi il seguente:



Intanto, così come abbiamo fatto prima, i due generatori pilotati possono essere semplicemente sostituiti da due impedenze di valore jωM. Inoltre, il fatto che la porta del circuito sia a vuoto, implica che il ramo contenente z_4 e una delle impedenze jωM non sia percorso da corrente, per cui il circuito equivale anche al seguente:



L'ultima semplificazione che possiamo fare è sostituire le tre impedenze in serie con una sola impedenza di valore pari alla somma:



Così facendo, abbiamo in verità perso la tensione $\overline{V}_{TH}$ che a noi interessa, che era quella ai capi dell’impedenza z_3, ma in compenso abbiamo semplificato i calcoli: infatti, applicando il partitore di corrente al circuito che abbiamo ottenuto, abbiamo che la corrente che scorre nella serie tra z_3, z_2 e $j\omega M$ è

$$\overline{I}_S = \frac{\dot{z}_1\left(\dot{z}_2 + \dot{z}_3 + jwM\right)}{\dot{z}_1 + \dot{z}_2 + \dot{z}_3 + jwM}\overline{J}$$

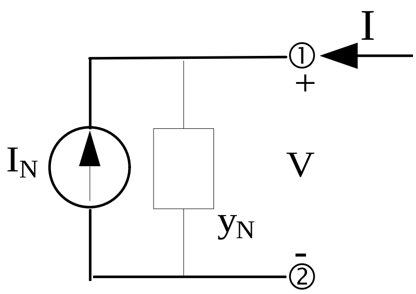
e quindi la tensione ai capi di z_3 è

$$\overline{V}_{TH} = \dot{z}_3\overline{I}_S = \frac{\dot{z}_1\dot{z}_3\left(\dot{z}_2 + \dot{z}_3 + jwM\right)}{\dot{z}_1 + \dot{z}_2 + \dot{z}_3 + jwM}\overline{J}$$

TEOREMA DI NORTON

Sia dato un circuito monoporta in regime sinusoidale (quindi anche lineare, tempo-invariante, asintoticamente stabile e con tutte le sorgenti iso-frequenziali). Supponiamo che esso ammetta soluzione unica e sia “ben definito”, ossia tale che nessun elemento del circuito sia accoppiato a variabili esterne al circuito stesso.

Sotto queste ipotesi, il circuito in questione può essere sostituito dal seguente circuito equivalente:



dove la corrente I_N è la cosiddetta “*corrente di cortocircuito*”, ossia la corrente che va dal morsetto 1 al morsetto 2 quando vengono cortocircuitati, mentre G_N è l’ “*ammettenza di porta*” quando il circuito stesso è stato “passivato” (ossia quando gli eventuali generatori di corrente del circuito sono stati sostituiti da circuiti aperti e i generatori di tensione sono stati sostituiti con cortocircuiti).

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1