Studio della Rivoluzione di due Corpi per Effetto Gravitazionale*

Ing. Guido Antonelli

28 luglio 2005

1 Introduzione

1.1 Obiettivo dello Studio

Questo studio si propone di analizzare il comportamento di due corpi celesti isolati ruotanti l'uno intorno all'altro sotto l'effetto della sola forza gravitazionale. Nella trattazione si farà riferimento per comodità al sistema Terra-Luna per il quale verranno alla fine calcolati i parametri caratteristici delle orbite.

1.2 Ipotesi semplificative

1. I due corpi sono perfettamente sferici ed omogenei e quindi agli effetti gravitazionali si considerano equivalenti a punti materiali, rappresentati dai loro centri geometrici, in cui sono concentrate le masse dei due corpi.

2. Le forze gravitazionali si trasmettono con velocità infinita.

3. Il sistema non risente dell'azione degli altri corpi celesti e quindi i due corpi rappresentano un sistema isolato per il quale devono valere le leggi di conservazione della quantità di moto e del momento della quantità di moto. In particolare la quantità di moto del sistema viene resa nulla scegliendo il centro di massa[1] del sistema coincidente con l'origine O di un sistema polare piano di riferimento[2]; tale riferimento è anche inerziale in quanto l'asse polare viene scelto in modo da mantenere nel tempo direzione invariata rispetto alle stelle fisse.

4. La rotazione dei due corpi intorno ai loro assi viene trascurata sia dal punto di vista dell'energia che del momento della quantità di moto associati a tale movimento. In accordo con questa ipotesi non si considera nessun effetto reciproco di marea tra i due corpi e di conseguenza nessun processo dissipativo.

5. L'energia totale del sistema, somma dell'energia cinetica di traslazione e dell'energia potenziale si mantiene costante in ogni istante in quanto il campo gravitazionale è irrotazionale e quindi il sistema risulta conservativo rispetto all'energia totale.

---

*Questo articolo è stato scritto con LaTeX [1].

[1] Molto spesso nei libri di fisica baricentro e centro di massa sono sinonimi. Preferisco utilizzare quest'ultimo termine perché il termine baricentro contiene implicitamente il riferimento ad un campo gravitazionale uniforme dove le masse hanno peso ($\beta\alpha\rho\acute{\upsilon}\varsigma$ = pesante) proporzionale alle masse stesse.

[2] Come si spiegherà più avanti il moto dei due corpi avviene su uno stesso piano.

2 Simbologia

I simboli adottati nella successiva trattazione sono così definiti:

Sistema Terra-Luna:

O = centro di massa del sistema Terra-Luna
θ = angolo di rotazione tra la congiungente Terra-Luna e l'asse polare di riferimento (rad)
ω = velocità angolare della congiungente Terra-Luna intorno a O (rad/s)
P = periodo di rivoluzione di ciascun corpo intorno a O (s)

Terra:

T = centro di massa della Terra
m_t = massa della Terra (kg)
r_t = distanza del centro T della Terra dal centro di massa O del sistema (m)
v_t = velocità della Terra lungo l'orbita (m/s)
c_t = doppio della velocità areale della Terra intorno a O (m^2/s)

Luna:

L = centro di massa della Luna
m_l = massa della Luna (kg)
r_l = distanza del centro L della Luna dal centro di massa O del sistema (m)
v_l = velocità della Luna lungo l'orbita (m/s)
c_l = doppio della velocità areale della Luna intorno a O (m^2/s)

Universo:

G = costante di gravitazione universale pari a $6.67 \cdot 10^{-11}\, m^3/(kg \cdot s^2)$

Tutte le rotazioni sono assunte positive se appaiono antiorarie per un osservatore posto al di sopra del piano su cui avviene il moto, negative in caso opposto.
Nel calcolo si utilizzano i seguenti parametri:

M = massa totale del sistema (kg):

$$M = m_t + m_l \tag{1}$$

m_r = massa ridotta del sistema (kg):

$$m_r = \frac{m_t\, m_l}{m_t + m_l} \tag{2}$$

r = distanza dei due corpi (m):

$$r = r_t + r_l \tag{3}$$

v = velocità scalare[3] relativa dei due corpi (m/s) :

$$v \,=\, v_t + v_l \tag{4}$$

c = doppio della velocità areale equivalente[4] intorno a O dei due corpi (m^2/s):

$$c \,=\, (\sqrt{c_t} + \sqrt{c_l})^2 \tag{5}$$

ω = velocità angolari assolute[5] della Terra e della Luna intorno a O (rad/s):

$$\omega \,=\, \dot{\theta} \tag{6}$$

Si pone inoltre per comodità :

$$\Sigma \,=\, G\,M \tag{7}$$

Valgono inoltre le seguenti relazioni, che seguono dalla definizione del centro di massa dei due corpi e dal principio di conservazione della quantità di moto:

$$r_t \,=\, \frac{m_l}{M}\,r \qquad r_l \,=\, \frac{m_t}{M}\,r \qquad\qquad v_t \,=\, \frac{m_l}{M}\,v \qquad v_l \,=\, \frac{m_t}{M}\,v \tag{8}$$

[3]Essendo nulla la quantità di moto, le velocità dei due corpi devono possedere sempre la stessa direzione e verso opposto pur non avendo mai la stessa retta d'azione se non in casi particolari. Pertanto per v si può scrivere una relazione scalare di somma, attribuendo sempre valori positivi alle velocità scalari dei due corpi.

[4]Le grandezze c_t, c_l e c devono avere sempre e comunque lo stesso segno in quanto le rotazioni dei due corpi intorno al centro di massa del sistema sono tra loro concordi; con la convenzione adottata, nel caso particolare del sistema Terra-Luna, tali grandezze sono positive in quanto entrambi i corpi nel loro moto *spaziano* aree positive. In caso opposto si dovrebbe tener conto del segno negativo modificando le formule ogni qualvolta si esegue l'estrazione di radice quadrata, con la conseguenza che in tutte le successive relazioni che esprimono la dipendenza dal tempo dell'angolo θ apparirebbe un cambiamento di segno.

[5]Queste velocità angolari coincidono tra loro e con la velocità angolare del segmento che unisce i centri di Terra e Luna, segmento che contiene sempre O al suo interno. Per le derivate rispetto al tempo si adotta la simbologia di Newton: $\frac{d\,y}{d\,t} = \dot{y}$, $\frac{d^2\,y}{d\,t^2} = \ddot{y}$.

3 Equazioni dell'equilibrio gravitazionale

Per ciascuno dei due corpi possiamo scrivere l'equazione fondamentale della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$ per le componenti radiali della forza e dell'accelerazione[6].
Si deve a questo punto osservare che la forza gravitazionale che un corpo esercita sull'altro è una forza di tipo radiale anche rispetto al centro di massa O, in quanto O per sua stessa natura si mantiene sempre sulla congiungente dei centri di massa dei due corpi.
Valgono quindi le seguenti relazioni:

$$-G\,\frac{m_t\,m_l}{r^2} \;=\; m_t\,(\ddot{r}_t - r_t\,\dot{\theta}^2) \tag{9}$$

$$-G\,\frac{m_t\,m_l}{r^2} \;=\; m_l\,(\ddot{r}_l - r_l\,\dot{\theta}^2) \tag{10}$$

Poiché le forze gravitazionali agenti su ciascuno dei due corpi passano sempre per lo stesso punto O, si dimostra facilmente che le traiettorie risultanti sono piane[7], mentre contemporaneamente saranno soddisfatte le relazioni che esprimono la costanza delle velocità areali[8] :

$$r_t^2\,\dot{\theta} \;=\; c_t \qquad\qquad r_l^2\,\dot{\theta} \;=\; c_l \tag{11}$$

Estraendo la radice, sommando e successivamente elevando al quadrato si ottiene:

$$r^2\,\dot{\theta} \;=\; c \tag{12}$$

dove c è definito dalla (5). I due parametri c_t e c_l sono costanti in quanto derivano dall'integrazione di a_θ che è nulla e di conseguenza anche c è costante.
Viceversa combinando le precedenti relazioni con le (8) si ottengono le seguenti relazioni:

$$c_t \;=\; c\left(\frac{m_l}{M}\right)^2 \qquad\qquad c_l \;=\; c\left(\frac{m_t}{M}\right)^2 \tag{13}$$

Tenendo conto delle relazioni precedenti si può eliminare la dipendenza esplicita dal tempo esprimendo l'accelerazione radiale in funzione dell'angolo θ mediante la formula di Binet[9] :

$$-G\,\frac{m_t\,m_l}{r^2} \;=\; -m_t\,\frac{c_t^2}{r_t^2}\left(\frac{d^2\,(1/r_t)}{d\,\theta^2} + \frac{1}{r_t}\right)$$

$$-G\,\frac{m_t\,m_l}{r^2} \;=\; -m_l\,\frac{c_l^2}{r_l^2}\left(\frac{d^2\,(1/r_l)}{d\,\theta^2} + \frac{1}{r_l}\right)$$

---

[6] Nelle coordinate cilindriche (r, θ, z) qui utilizzate l'accelerazione radiale ha la forma: $a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2$.

[7] Tale piano è determinato dalla retta congiungente i due corpi, lungo la quale agisce la forza gravitazionale, e dalla direzione comune delle loro velocità . Questo giustifica l'adozione da questo punto in avanti di coordinate polari piane (r, θ), assumendo che il moto dei due corpi si svolga sul piano $z = 0$.

[8] In coordinate polari l'accelerazione tangenziale ha la forma: $a_\theta = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}(r^2\,\dot{\theta})$ da cui, tenendo presente che tale accelerazione deve annullarsi in quanto la forza gravitazionale è priva di componente tangenziale ed r è sempre diverso da 0, si ricavano le citate relazioni. Il termine velocità areale dipende dal fatto che in coordinate polari l'elemento d'area è espresso dalla relazione $dA = \frac{1}{2}\,r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\,r^2\,\dot{\theta}\,dt$ allo stesso modo che l'elemento di lunghezza si esprime come $ds = v\,dt$; pertanto $r^2\,\dot{\theta}$ è il doppio della velocità areale.

[9] Per questa formula si può consultare un qualsiasi testo di meccanica razionale.

Le precedenti relazioni possono essere riscritte nel modo seguente:

$$G\,\frac{m_l\,r_t^2}{r^2\,c_t^2} \;=\; \frac{d^2\,(1/r_t)}{d\,\theta^2} + \frac{1}{r_t}$$

$$G\,\frac{m_t\,r_l^2}{r^2\,c_l^2} \;=\; \frac{d^2\,(1/r_l)}{d\,\theta^2} + \frac{1}{r_l}$$

A questo punto è possibile sommare membro a membro le due equazioni; tenuto conto della linearità della derivata si ottiene:

$$G\left(\frac{m_l\,r_t^2}{r^2\,c_t^2} + \frac{m_t\,r_l^2}{r^2\,c_l^2}\right) \;=\; \frac{d^2\,(1/r_t + 1/r_l)}{d\,\theta^2} + \frac{1}{r_t} + \frac{1}{r_l}$$

Si può quindi operare la seguente sostituzione:

$$\frac{1}{r_t} + \frac{1}{r_l} \;=\; \frac{M}{m_l\,r} + \frac{M}{m_t\,r} \;=\; \frac{M}{r}\left(\frac{1}{m_l} + \frac{1}{m_t}\right)$$

Con ulteriori passaggi tanto semplici quanto tediosi si perviene alla seguente equazione differenziale lineare nella sola incognita $1/r$:

$$\frac{d^2\,(1/r)}{d\,\theta^2} + \frac{1}{r} \;=\; \frac{\Sigma}{c^2} \tag{14}$$

L'equazione precedente semplifica il problema iniziale, in quanto trasforma un sistema di due equazioni differenziali in un'unica equazione dello stesso tipo, che definisce un'orbita virtuale associata alle orbite reali dei due corpi.
Definiamo ora il parametro p mediante la relazione:

$$p \;=\; \frac{c^2}{\Sigma} \;=\; \frac{r^4}{\Sigma}\,\dot{\theta}^2 \tag{15}$$

La soluzione finale della (14) sarà data dall'espressione:

$$\frac{1}{r} \;=\; \frac{1}{p} + A\,\cos\left(\theta - \theta_0\right)$$

dove si sono introdotte due costanti di integrazione A e θ_0 che possono essere supposte entrambe maggiori od uguali a zero senza alcuna limitazione.
Infine definito il parametro e mediante la relazione:

$$e \;=\; p\,A$$

ed imposto che la minima distanza dei corpi si abbia per $\theta = 0,$ si ottiene la relazione classica:

$$r(\theta) \;=\; \frac{p}{1 + e\,\cos\,\theta} \tag{16}$$

Si vede immediatamente che la (16) rappresenta l'equazione in coordinate polari (r, θ) di una conica[10] di parametro p ed eccentricità e e di questo tipo, in particolare ellissi, sono tutte le orbite descritte dai pianeti intorno al Sole, ancorché su piani non coincidenti tra di loro[11], come pure le orbite di tutte le comete periodiche.
In quanto precede abbiamo finora dimostrato che qualunque siano le masse dei due corpi la loro distanza r varia comunque secondo questa stessa legge anche se a rigore la (16) non corrisponde di fatto al moto di nessuno dei corpi.
Sostituendo p mediante la (15) si ottiene:

$$r = \left(\frac{\Sigma}{\dot{\theta}^2} \, (1 + e \, \cos \theta) \right)^{\frac{1}{3}}$$

Se l'eccentricità e è nulla, cioè le orbite sono circolari, la relazione precedente acquista la forma seguente:

$$r = \left(\frac{\Sigma}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

dove è evidenziata la relazione che lega il raggio di un'orbita circolare alla velocità angolare qui preferibilmente indicata con ω, dato che si tratta di una quantità costante.
Ad esempio assegnando ad ω il valore $2\pi/86\,400$ e a Σ il valore corrispondente alla massa terrestre si trova il raggio dell'orbita di un satellite geostazionario, che risulta pari a circa $42\,000$ km, corrispondente alla ben nota distanza di circa $36\,000$ km di un tale satellite dalla superficie terrestre sottostante.
E' ugualmente interessante la seguente formula, facilmente deducibile dalla (15) e dalla (16), che esprime la velocità angolare $\dot{\theta}$ in funzione dell'angolo θ:

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{\Sigma}}{p^{3/2}} \, (1 + e \, \cos \theta)^2 \tag{17}$$

A conclusione di questo paragrafo osserviamo che quanto finora detto non risulta più valido nel caso particolarissimo che i moti dei due corpi si svolgano lungo una stessa retta o segmento di retta, cioè quando tali corpi descrivano coniche degeneri; questo avverrebbe nel caso che all'istante iniziale le loro velocità fossero di segno opposto ma avessero la stessa retta di applicazione.
Ovviamente un caso di questo genere si concluderebbe o con l'urto tra i due corpi o con un allontanamento indefinito dei medesimi tra loro.
Questo caso particolare sarà trattato separatamente alla fine di questo lavoro, partendo dalle equazioni (9) e (10) e ponendo in esse $\dot{\theta} = 0$.

[10] Sono dette coniche le curve ottenute dall'intersezione di un cono circolare retto con un piano.
[11] Questo è rigorosamente vero solo nell'ipotesi che il Sole possa considerarsi di massa infinita rispetto alla massa di tutti i pianeti e che i pianeti stessi non si influenzino reciprocamente dal punto di vista gravitazionale.

4 Grandezze caratteristiche della conica

Come si è visto al paragrafo precedente, si è ricondotto il problema dei due corpi rotanti l'uno intorno all'altro al calcolo di una funzione equivalente che descrive la variazione della distanza tra i due corpi in funzione della anomalia θ. Il passaggio da questa funzione alle traiettorie effettive dei due corpi è comunque immediato in quanto le funzioni $r_t(\theta)$ e $r_l(\theta)$ sono legate ad $r(\theta)$ da semplici vincoli di proporzionalità rappresentati dalle (8).
Di conseguenza le traiettorie dei due corpi sono entrambe due coniche dotate di medesima eccentricità[12] ma con differenti valori del parametro p. Se però si vogliono scrivere le equazioni delle traiettorie per uno stesso valore dell'anomalia θ è necessario tenere presente che i due corpi si trovano da parti opposte rispetto all'origine O e quindi volendo assumere sempre positivi i raggi vettori r_t e r_l è necessario associare a ciascun corpo un diverso asse polare da cui contare gli angoli θ, ad esempio l'asse x per la Terra e l'asse $-x$ per la Luna. Con questa assunzione le equazioni delle traiettorie sono:

$$r_t(\theta) = \frac{p_t}{1 + e\,\cos\theta} \qquad\qquad r_l(\theta) = \frac{p_l}{1 + e\,\cos\theta}$$

dove p_t e p_l sono così definiti:

$$p_t = p\,\frac{m_l}{M} \qquad\qquad p_l = p\,\frac{m_t}{M}$$

Applicando le formule di trasformazione da coordinate polari a cartesiane la (16) si modifica nel modo seguente:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{p}{1 + e\,x/\sqrt{x^2 + y^2}}$$

assumendo quindi la forma di una curva algebrica di secondo ordine:

$$x^2\,(1 - e^2) + y^2 + 2\,p\,e\,x - p^2 = 0 \tag{18}$$

Con le posizioni $x = X - h$ e $y = Y$ è possibile eliminare il termine lineare in x, scegliendo per h il valore $h = p\,e/(1 - e^2)$.
Questa sostituzione, che è possibile in tutti i casi ad eccezione del caso $e = 1$, sposta l'origine del riferimento nel centro della conica e trasforma la (18) nel modo seguente:

$$X^2\,(1 - e^2) + Y^2 - \frac{p^2}{1 - e^2} = 0$$

Al variare dell'eccentricità tra 0 ed $+\infty$ si possono distinguere i seguenti casi:

1. Cerchio: $e = 0$

$$X^2 + Y^2 - p^2 = 0$$

La conica è una circonferenza di raggio p.

[12] Anche la funzione $\theta(t)$ sarà necessariamente la stessa per i due corpi altrimenti la congiungente i loro centri non conterrebbe più il punto O al suo interno.

2. Ellisse: $0 < e < 1$

$$X^2\,(1-e^2) + Y^2 - \frac{p^2}{1-e^2} \;=\; 0 \qquad (19)$$

La conica è un'ellisse in quanto i coefficienti di X^2 e di Y^2 hanno lo stesso segno. Per tale curva, che rappresenta il caso di maggior interesse in relazione all'oggetto di questo articolo, si definiscono le seguenti grandezze caratteristiche:

Distanza al perielio: $r_p \;=\; p/(1+e)$

Distanza all'afelio: $r_a \;=\; p/(1-e)$

Lunghezza semiasse maggiore: $a \;=\; p/(1-e^2)$

Lunghezza semiasse minore: $b \;=\; p/\sqrt{1-e^2}$

In coordinate cartesiane all'equazione (19) viene data solitamente la forma:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} \;=\; 1$$

che evidenzia i valori dei semiassi a e b.

3. Parabola: $e = 1$

Per questo caso partendo dalla (18) si ottiene:

$$y^2 + 2\,p\,x - p^2 \;=\; 0$$

Con le posizioni $x = X + h$ e $y = Y$ è possibile eliminare il termine costante, scegliendo per h il valore $h = p/2$:

$$Y^2 + 2\,p\,X \;=\; 0$$

La conica è una parabola ad asse orizzontale passante per l'origine con la concavità rivolta a sinistra. La distanza minima dal fuoco è data da: $r_p \;=\; p/2$.

4. Iperbole: $e > 1$

$$X^2\,(e^2-1) - Y^2 - \frac{p^2}{e^2-1} \;=\; 0 \qquad (20)$$

La conica è un'iperbole ad asse orizzontale in quanto i coefficienti di X^2 e di Y^2 hanno segno opposto. La distanza minima dal fuoco è data da: $r_p \;=\; p/(1+e)$.

In coordinate cartesiane all'equazione (20) viene data solitamente la forma:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} \;=\; 1$$

con $a = p/(e^2-1)$ e $b = p/\sqrt{e^2-1}$.

5 Integrazione dell'equazione temporale

Per il calcolo della dipendenza dal tempo dell'anomalia θ basta riscrivere la (17) nel modo seguente:

$$\frac{1}{(1+e\,\cos\theta)^2}\,\frac{d\theta}{dt} \;=\; \frac{\sqrt{\Sigma}}{p^{3/2}}$$

Questa equazione differenziale è del tipo a variabili separabili, per cui spostando dt a secondo membro ed anteponendo i segni di integrazione, si può scrivere:

$$\int_0^{\theta} \frac{d\,\theta}{(1+e\,\cos\theta)^2} \;=\; \int_0^{t} \frac{\sqrt{\Sigma}}{p^{3/2}}\;dt \;=\; \frac{\sqrt{\Sigma}}{p^{3/2}}\,t \tag{21}$$

Il calcolo dell'integrale a primo membro deve essere svolto separatamente per i casi più semplici del cerchio e della parabola (casi 1 e 3), mentre può essere trattato in modo unico per i casi più complessi dell'ellisse e dell'iperbole (casi 2 e 4).
Escludendo il caso 1, per tutti gli altri casi è opportuno effettuare il seguente cambiamento di variabile:

$$u \;=\; \tan(\,\frac{\theta}{2}\,) \tag{22}$$

da cui derivano le seguenti relazioni:

$$\theta \;=\; 2\,\arctan(u) \qquad\qquad d\,\theta \;=\; \frac{2}{1+u^2}\,du \qquad\qquad \cos\theta \;=\; \frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} \;=\; \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Per comodità del lettore riportiamo lo sviluppo dei calcoli per l'espressione integranda a primo membro:

$$\frac{d\,\theta}{(1+e\,\cos\theta)^2} \;=\; \frac{2/(1+u^2)\;du}{(1+e\,(1-u^2)/(1+u^2))^2} \;=\; \frac{2\,(1+u^2)\;du}{((1+u^2)+e\,(1-u^2))^2}$$

Riordinando l'espressione a denominatore, la relazione (21) assume quindi la forma:

$$\int_0^{u} \frac{2\,(1+u^2)\;du}{(u^2\,(1-e)+(1+e))^2} \;=\; \frac{\sqrt{\Sigma}}{p^{3/2}}\,t \tag{23}$$

5.1 Orbita circolare

I due corpi descrivono una circonferenza quando la conica possiede eccentricità nulla.
Con la posizione $e = 0$ la (21) diventa:

$$\int_0^{\theta} d\theta \;=\; \frac{\sqrt{\Sigma}}{p^{3/2}}\,t$$

La legge temporale e la traiettoria saranno quindi:

$$\theta(t) \;=\; \frac{\sqrt{\Sigma}}{p^{3/2}}\, t \qquad\qquad\qquad r(\theta) \;=\; p$$

Il parametro p, coincidente in questo caso con il raggio del cerchio, dovrà essere fornito come condizione aggiuntiva.
Poiché un cerchio può considerarsi come un'ellisse ad eccentricità nulla, gli assi maggiore e minore saranno in questo caso uguali tra loro e pari a p. Utilizzando l'asse maggiore a al posto di p, il periodo P, corrispondente al valore $\theta = 2\,\pi$, si ottiene dalla relazione:

$$2\,\pi \;=\; \frac{\sqrt{\Sigma}}{a^{3/2}}\, P$$

da cui si ricava:

$$P \;=\; 2\,\pi\, \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\Sigma}} \tag{24}$$

5.2 Orbita ellittica

I due corpi descrivono un'ellissi quando l'eccentricità rispetta la condizione $0 < e < 1$.
Riprendendo la (23) e ponendo:

$$\alpha^2 = \frac{1+e}{1-e} \qquad\qquad\qquad \alpha = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tag{25}$$

otteniamo la seguente espressione:

$$\frac{2}{(1-e)^2} \int_0^u \frac{(1+u^2)\; du}{(u^2+\alpha^2)^2} \;=\; \frac{\sqrt{\Sigma}}{p^{3/2}}\, t \tag{26}$$

Sviluppando i calcoli[13] si ottiene per la legge temporale la seguente espressione:

$$\frac{1-\alpha^2}{\alpha^3}\; \frac{\tan(\theta/2)\,/\,\alpha}{1+\big(\tan(\theta/2)\,/\,\alpha\big)^2} + \frac{1+\alpha^2}{\alpha^3} \arctan\big(\frac{\tan(\theta/2)}{\alpha}\big) \;=\; \frac{\sqrt{\Sigma}}{p^{3/2}}\,(1-e)^2\, t \tag{27}$$

mentre la traiettoria è espressa dalla solita relazione (16).
E' immediato verificare che per $e = 0$ si ha $\alpha = 1$ e la (27) si riduce immediatamente alle relazioni sopra viste per l'orbita circolare. Al contrario dalla (27) non è possibile ottenere le equazioni valide per la parabola perché per $e = 1$ il denominatore di α^2 si annullerebbe.
Nel caso in esame le formule risolutive contengono i due parametri incogniti p ed e, e quindi per definire la curva effettiva è necessario disporre di due condizioni aggiuntive.
La (27) si semplifica notevolmente esprimendo i due fattori $(1-\alpha^2)/\alpha^3$ e $(1+\alpha^2)/\alpha^3$ in funzione dell'eccentricità mediante la (25) e ricordando che il parametro p può essere espresso in funzione del semiasse maggiore dell'ellisse e dell'eccentricità come $p = a\,(1-e^2)$; con semplici passaggi algebrici si ottiene:

[13] L'integrale in oggetto può spezzarsi in due integrali notevoli facilmente reperibili in letteratura [2].

$$-2\,e\;\frac{\tan(\theta/2)\,/\,\alpha}{1+\big(\tan(\theta/2)\,/\,\alpha\big)^2}+2\;\arctan\big(\frac{\tan(\theta/2)}{\alpha}\big)\;=\;\frac{\sqrt{\Sigma}}{a^{3/2}}\,t$$

E' interessante osservare come sia possibile semplificare ulteriormente quest'ultima relazione sostituendo in essa l'angolo θ con l'angolo ϕ così definito:

$$\tan\,(\phi/2)\;=\;\frac{\tan(\theta/2)}{\alpha}$$

Facendo quindi uso delle proprietà delle funzioni trigonometriche la (27) assume la seguente notevole forma:

$$t\;=\;\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\Sigma}}\,(\phi-e\,\sin\,\phi) \tag{28}$$

Si può facilmente dimostrare come la nuova variabile ϕ sopra definita coincida in questo caso con il parametro generalmente adottato nella rappresentazione cartesiana parametrica di un'ellisse di semiassi a e b con l'origine nel centro dell'ellisse stessa[14], descritta dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} x &= a\,\cos\phi \\ y &= b\,\sin\phi \end{aligned}$$

Come l'angolo θ, anche ϕ varia tra 0 a 2π quando il generico punto percorre l'intera ellisse. Di conseguenza per calcolare il periodo P è sufficiente porre nella (28) $\phi = 2\,\pi$:

$$P\;=\;2\,\pi\,\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\Sigma}}$$

ottenendo così la medesima formula (24) valida per la traiettoria circolare:
Allo stesso risultato si sarebbe potuto pervenire ponendo nella (27) $\theta\,=\,2\,\pi$ anche se a costo di qualche maggiore complicazione computazionale.

5.3 Orbita parabolica

I due corpi descrivono una parabola quando l'eccentricità assume valore 1.
Con la posizione $e = 1$ la (23) diventa:

$$\int_0^u \frac{(1+u^2)\,du}{2}\;=\;\frac{\sqrt{\Sigma}}{p^{3/2}}\,t$$

La legge temporale e la traiettoria sono quindi:

$$\frac{\tan(\theta/2)}{2}+\frac{\tan^3(\theta/2)}{6}\;=\;\frac{\sqrt{\Sigma}}{p^{3/2}}\,t \tag{29}$$

[14] Il parametro ϕ è generalmente indicato nei libri di testo con il nome di *anomalia eccentrica*, mentre all'angolo θ si riserva il nome di *anomalia vera*.

$$r(\theta) \;=\; \frac{p}{1+\cos\theta} \;=\; p\;\frac{1+\tan^2(\theta/2)}{2} \tag{30}$$

L'equazione (29), che è di terzo grado in $\tan(\theta/2)$, può essere risolta rispetto a tale variabile. L'unica radice reale dell'equazione è data da:

$$\tan(\theta/2) \;=\; \Big(C\,t + \sqrt{1+C^2\,t^2}\Big)^{1/3} + \Big(C\,t - \sqrt{1+C^2\,t^2}\Big)^{1/3} \qquad \text{con:}\quad C \;=\; 3\,\frac{\sqrt{\Sigma}}{p^{3/2}} \tag{31}$$

La funzione $\theta(t)$ avrà quindi la seguente espressione:

$$\theta(t) \;=\; 2\,\arctan\left(\Big(C\,t + \sqrt{1+C^2\,t^2}\Big)^{1/3} + \Big(C\,t - \sqrt{1+C^2\,t^2}\Big)^{1/3}\right)$$

Anche in questo caso è necessario assegnare una condizione che definisca il valore del parametro p, ad esempio attribuendo a p un valore pari a due volte la distanza minima, supposta nota, del corpo orbitante dal fuoco della parabola.

5.4 Orbita iperbolica

Nel caso in cui l'eccentricità sia maggiore di 1, l'orbita dei due corpi è costituita da un ramo di iperbole.
Per questo caso si può ottenere facilmente la formula risolutiva senza dover ripetere i calcoli fatti per l'ellisse. Si osserva infatti che la posizione (25) per α^2 non è più valida se vogliamo che α sia un numero reale, e assumeremo quindi:

$$\alpha^2 = \frac{e+1}{e-1} \qquad\qquad \alpha = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tag{32}$$

Questa nuova definizione di α^2 equivale a sostituire nella (26) il simbolo α con $i\alpha$ come è facile verificare[15]; la stessa sostituzione andrà quindi fatta nella formula finale (27), ottenendo così:

$$\frac{1+\alpha^2}{\alpha^3}\;\frac{\tan(\theta/2)\,/\,\alpha}{1-\big(\tan(\theta/2)\,/\,\alpha\big)^2} + \frac{\alpha^2-1}{i\,\alpha^3}\,\arctan\big(\frac{\tan(\theta/2)}{i\,\alpha}\big) \;=\; \frac{\sqrt{\Sigma}}{p^{3/2}}\,(e-1)^2\,t \tag{33}$$

Per coerenza formale si è poi preferito sostituire a secondo membro il fattore $(1-e)^2$ con $(e-1)^2$. L'unità immaginaria i dovrà comunque scomparire in quanto il problema in oggetto ha una soluzione reale; a questo scopo è sufficiente ricordare la seguente identità reperibile su tutti i libri di analisi matematica:

$$\frac{1}{i}\,\arctan\big(\,\frac{x}{i}\,\big) \;=\; \operatorname{arctanh}(-x) \;=\; -\operatorname{arctanh} x$$

La legge temporale $\theta(t)$ è quindi data in forma implicita dalla seguente espressione:

$$\frac{1+\alpha^2}{\alpha^3}\;\frac{\tan(\theta/2)\,/\,\alpha}{1-\big(\tan(\theta/2)\,/\,\alpha\big)^2} - \frac{\alpha^2-1}{\alpha^3}\,\operatorname{arctanh}\big(\frac{\tan(\theta/2)}{\alpha}\big) \;=\; \frac{\sqrt{\Sigma}}{p^{3/2}}\,(e-1)^2\,t \tag{34}$$

[15] Il simbolo i designa l'unità immaginaria $\sqrt{-1}$ e quindi: $i^2=-1,\;\; i^3=-i,\;\; i^4=1$.

mentre, come per l'ellisse, la traiettoria è descritta dalla (16) che qui riscriviamo:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Anche in questo caso le formule risolutive contengono i due parametri incogniti p ed e, e quindi per conoscere la curva effettiva è necessario disporre di due condizioni aggiuntive.
Dall'equazione della traiettoria si vede che r tende ad ∞ quando si annulla il denominatore, cioè per i valori θ_{lim} così determinati:

$$1 + e \cos \theta_{lim} = 0 \qquad\qquad \theta_{lim} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$$

Poiché questi valori di θ si raggiungono solo in corrispondenza a $t = \pm\infty$ il moto di un oggetto che descrive un ramo di iperbole non è ovviamente periodico. Le tangenti trigonometriche di questi angoli sono le pendenze dei due asintoti dell'iperbole.
Nel caso di traiettoria parabolica ($e = 1$), si otterrebbe correttamente il valore $\theta_{lim} = \pm\pi$, ma come è noto non esistono più gli asintoti.
Anche in questo caso, procedendo come per l'orbita ellittica, e definendo anche per l'iperbole una lunghezza a mediante la relazione $p = a\,(e^2 - 1)$, è possibile ottenere per la (33) un'espressione assai più semplice:

$$2\,e\,\frac{\tan(\theta/2)\,/\,\alpha}{1 - \left(\tan(\theta/2)\,/\,\alpha\right)^2} - 2\,\mathrm{arctanh}\left(\frac{\tan(\theta/2)}{\alpha}\right) = \frac{\sqrt{\Sigma}}{a^{3/2}}\,t$$

Infine in quest'ultima relazione appare naturale sostituire l'angolo θ con il parametro ϕ così definito:

$$\tanh(\phi/2) = \frac{\tan(\theta/2)}{\alpha}$$

Questa posizione è giustificata dal fatto che entrambe le funzioni sono monotone ed in particolare strettamente crescenti, ciascuna nell'ambito dei propri campi di definizione[16], alle estremità dei quali esse assumono identici valori, e cioè -1 e +1.
Utilizzando infine le proprietà delle funzioni iperboliche, la (33) assume la seguente notevole forma:

$$t = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\Sigma}}\,(e \sinh\phi - \phi) \tag{35}$$

Si può dimostrare che ϕ ed a si identificano in questo caso con i simboli qui di seguito adottati nella rappresentazione cartesiana classica di un'iperbole in forma parametrica:

$$x = a \cosh\phi$$
$$y = b \sinh\phi$$

In questa rappresentazione l'origine del riferimento è stata spostata dal fuoco, coincidente con il centro di massa del sistema, al centro di simmetria dell'iperbole considerata formata da entrambi i rami[17].

[16]Il campo di definizione di θ è $-|\theta_{lim}|$ e $+|\theta_{lim}|$ mentre ϕ è definito tra $-\infty$ e $+\infty$.
[17]Nelle ultime formule b è definito dalla relazione $b = a\sqrt{e^2 - 1}$.

6 Altri risultati

6.1 III legge di Keplero

La III legge di Keplero afferma che per i pianeti che ruotano intorno al Sole *i quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi dei grandi assi*. Questa legge è immediatamente verificata elevando al quadrato la (24) che vale tanto per le orbite circolari che per quelle ellittiche, come si è visto in precedenza:

$$P^2 = \frac{4\,\pi^2}{\Sigma}\,a^3 \tag{36}$$

In realtà questa legge è solo approssimata in quanto il sistema solare, formato dal Sole e dai suoi numerosi pianeti, obbedirebbe anche nell'ambito della meccanica newtoniana ad un sistema di equazioni assai più complesso se si tenesse conto dell'azione gravitazionale di tutti i corpi presenti. Tuttavia il fatto che il Sole abbia una massa circa 1000 volte maggiore di quella di tutti i pianeti messi insieme, rende plausibile considerare i pianeti di massa trascurabile rispetto al Sole e non tenere inoltre conto della loro reciproca influenza. Sotto queste ipotesi $\Sigma = kM$ è costante e quindi la III legge di Keplero risulta verificata.
Questa legge non ha significato per le orbite paraboliche ed iperboliche che sono orbite aperte e quindi prive di periodo.

6.2 Velocità orbitali

Le velocità dei due corpi sono definite dalle relazioni:

$$v_t \;=\; \sqrt{r_t^2\,\dot\theta^2 + \dot{r_t}^2} \qquad\qquad v_l \;=\; \sqrt{r_l^2\,\dot\theta^2 + \dot{r_l}^2} \tag{37}$$

Volendo esprimere queste velocità in funzione di p, e e θ è conveniente operare sulla velocità relativa v dei due corpi, definita dalla (4):

$$v \;=\; v_t \;+\; v_l \;=\; \sqrt{(\frac{m_l}{M})^2 r^2\,\dot\theta^2 + (\frac{m_l}{M})^2 \dot r^2} \;+\; \sqrt{(\frac{m_t}{M})^2 r^2\,\dot\theta^2 \;+\; (\frac{m_t}{M})^2\,\dot r^2}$$

Con semplici passaggi possiamo scrivere:

$$v \;=\; \sqrt{r^2\,\dot\theta^2 + \dot r^2} \;\;=\;\; \sqrt{r^2\,\dot\theta^2 + (\frac{d\,r}{d\,\theta})^2\,\dot\theta^2} \;\;=\;\; \dot\theta\,\sqrt{r^2 + (\frac{d\,r}{d\,\theta})^2}$$

Si tratta ora di effettuare nella relazione precedente le seguenti sostituzioni:

$$\dot\theta \;=\; \frac{\sqrt{\Sigma}}{p^{3/2}}\,(1 + e\,\cos\theta)^2 \qquad\qquad r \;=\; \frac{p}{1 + e\,\cos\theta} \qquad\qquad \frac{d\,r}{d\,\theta} \;=\; \frac{p\,e\,\sin\theta}{(1 + e\,\cos\theta)^2}$$

Si otterrà così per v la seguente espressione:

$$v \;=\; \frac{\sqrt{\Sigma}}{p^{3/2}}\,(1 + e\,\cos\theta)^2\,\sqrt{\frac{p^2}{(1 + e\,\cos\theta)^2} + \frac{p^2\,e^2\,\sin^2\theta}{(1 + e\,\cos\theta)^4}} \;=\; \sqrt{\frac{\Sigma}{p}}\,\sqrt{(1 + e\,\cos\theta)^2 + e^2\,\sin^2\theta}$$

ovvero:

$$v = \sqrt{\frac{\Sigma}{p}} \sqrt{1 + e^2 + 2\,e\,\cos\theta} \tag{38}$$

Nel caso di orbite ellittiche è conveniente sostituire il parametro p con il semiasse maggiore a scrivendo perciò:

$$v = \sqrt{\frac{\Sigma}{a}} \sqrt{\frac{1 + e^2 + 2\,e\,\cos\theta}{1 - e^2}}$$

Nel caso di orbita circolare ($e = 0$ e quindi $p = r$), si ottengono le seguenti semplici relazioni che legano le velocità ai raggi orbitali:

$$v = \sqrt{\frac{\Sigma}{r}} \qquad v_t = \frac{m_l}{M}\sqrt{\frac{\Sigma}{r}} \qquad v_l = \frac{m_t}{M}\sqrt{\frac{\Sigma}{r}} \tag{39}$$

6.3 Legge oraria

Nei paragrafi precedenti abbiamo indicato con il termine di legge temporale la relazione che legava, talvolta in modo solo implicito, l'anomalia θ al tempo t. Non sarebbe stato ugualmente impossibile scrivere un'analoga espressione per esprimere il raggio r in funzione del tempo, stante il fatto che la relazione (16) può essere invertita senza particolari difficoltà:

$$\theta = \arccos\left(\frac{p - r}{r\,e}\right)$$

Sostituendo quindi questa espressione di θ nella (27) e nella (34) otterremmo per l'ellisse e l'iperbole, sempre in forma rigorosamente implicita, la relazione cercata.
Mentre per il cerchio r non è funzione di t in quanto è costante nel tempo, per la parabola, a differenza di ellisse ed iperbole, risulta possibile scrivere la funzione $r(t)$ in forma esplicita sostituendo la (31) nella (30) e ottenendo così:

$$r(t) = \frac{p}{2}\left(1 + \left(\left(C\,t + \sqrt{1 + C^2\,t^2}\right)^{1/3} + \left(C\,t - \sqrt{1 + C^2\,t^2}\right)^{1/3}\right)^2\right) \qquad \text{con:} \quad C = 3\,\frac{\sqrt{\Sigma}}{p^{3/2}}$$

Vediamo ora se sia possibile scrivere anche per il fenomeno in istudio quella che in fisica si definisce più propriamente con il termine di legge oraria, cioè la relazione $s = s(t)$ che lega lo spazio percorso lungo la traiettoria al tempo impiegato a percorrerlo.
Tale relazione può essere scritta facilmente per l'orbita circolare, e solo formalmente per la parabola, mentre per ellisse ed iperbole non è possibile indicare neppure un'espressione analitica formale per tale legge[18]. Per rendersi conto di questo fatto basta provare a scrivere la funzione $s(t)$ applicando la definizione elementare $s = \int v\,dt$ dove v risulta espressa dalla (38) in generale e dalla (39) per l'orbita circolare.

[18] Anche la misura stessa della lunghezza dell'ellisse non è esprimibile elementarmente in quanto dà luogo a quello che in analisi è noto come integrale ellittico.

1. Cerchio: $e = 0$

$$s = \int_0^t \sqrt{\frac{\Sigma}{r}}\, dt = \sqrt{\frac{\Sigma}{r}}\; t$$

2. Ellisse: $0 < e < 1$ - Iperbole: $e > 1$

$$s = \int_0^t \sqrt{\frac{\Sigma}{p}}\, \sqrt{1 + e^2 + 2\, e\, \cos\theta}\; dt$$

In questa formula $\cos\theta$ dovrebbe essere sostituito dalla sua espressione in funzione di t, ma questo è purtroppo impossibile perché sia la (27) che la (34) non sono esplicitabili in alcun modo rispetto a θ.

3. Parabola: $e = 1$

$$s = \int_0^t \sqrt{\frac{2\,\Sigma}{p}}\, \sqrt{1 + \cos\theta}\; dt = \sqrt{\frac{2\,\Sigma}{p}} \int_0^t \sqrt{\frac{2}{1 + \tan^2(\theta/2)}}\; dt$$

A questo punto sostituendo $\tan(\theta/2)$ mediante la (31) si ottiene una funzione nella sola variabile t, la cui integrazione fornisce la legge oraria in forma esplicita. Sfortunatamente i margini di questi fogli non hanno spazio sufficiente a contenere lo sviluppo dei calcoli[19]...

6.4 Energia del sistema

L'energia totale dei due corpi, somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale gravitazionale, si può così esprimere:

$$E_t = E_c + E_p = \frac{1}{2}\, m_t\, v_t^2 + \frac{1}{2}\, m_l\, v_l^2 - G\, \frac{m_t\, m_l}{r}$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica E_c, tenendo conto della (38) possiamo scrivere:

$$E_c = \frac{1}{2}\, m_t\, \frac{m_l^2}{M^2}\, v^2 + \frac{1}{2}\, m_l\, \frac{m_t^2}{M^2}\, v^2 = \frac{1}{2}\, \frac{m_t\, m_l}{M}\, v^2 = \frac{1}{2}\, m_r\, v^2 = \frac{1}{2}\, m_r\, \frac{\Sigma}{p}\, (1 + e^2 + 2\, e\, \cos\theta)$$

mentre per quanto riguarda l'energia potenziale E_p, sostituendo r mediante la (16), abbiamo:

$$E_p = -\,G\, \frac{m_t\, m_l}{r} = -\frac{m_t\, m_l}{M} \cdot \frac{kM}{r} = -m_r\, \frac{\Sigma}{r} = -m_r\, \frac{\Sigma}{p}\, (1 + e\, \cos\theta)$$

In conclusione l'energia totale E_p è data da:

$$E_t = E_c + E_p = \frac{1}{2}\, m_r\, \frac{\Sigma}{p}\, (1 + e^2 + 2\, e\, \cos\theta) - m_r\, \frac{\Sigma}{p}\, (1 + e\, \cos\theta) = -\frac{1}{2}\, m_r\, \frac{\Sigma}{p}\, (1 - e^2)$$

[19] Come disse un certo Fermat a proposito del suo ultimo teorema.

Questa relazione evidenzia il fatto che l'energia totale è invariante rispetto al tempo e che il campo gravitazionale è di conseguenza irrotazionale.
Viceversa, supponendo valida la conclusione precedente, si sarebbe potuta trovare più facilmente l'ultima relazione valutando l'energia totale in un punto particolare dell'orbita, ad esempio quello di massima vicinanza al centro di massa O, che si ottiene ponendo $\theta = 0$.
Mediante le espressioni precedenti possiamo riscrivere la legge di conservazione dell'energia nel modo seguente:

$$-\frac{1}{2}\, m_r\, \frac{\Sigma}{p}\,(1 - e^2) \;=\; -m_r\,\frac{\Sigma}{r} + \frac{1}{2}\, m_r\, v^2$$

Quest'ultima relazione ci permette di ottenere facilmente l'espressione del modulo della velocità in funzione della coordinata radiale r:

$$v \;=\; \sqrt{\Sigma\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{p}\,(1 - e^2)\right)}$$

Nel caso di orbite chiuse, ricordando che il semiasse maggiore è dato da $a = p/(1 - e^2)$, si trova il seguente importantissimo risultato:

$$E_t \;=\; -\frac{1}{2}\, m_r\, \frac{\Sigma}{a} \;=\; -\frac{1}{2}\, G\, \frac{m_t\, m_l}{a}$$

L'energia totale di una qualsiasi orbita chiusa dipende unicamente dalla lunghezza del semiasse maggiore della conica associata ed è indipendente dall'eccentricità e.
Anche l'espressione del modulo della velocità risulta particolarmente semplice ed espressiva:

$$v \;=\; \sqrt{\Sigma\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

6.5 Momento della quantità di moto del sistema

Il momento della quantità di moto del sistema rispetto al centro di massa O, somma dei momenti delle quantità di moto di ciascuno dei due corpi, è un vettore sempre normale al piano orbitale.
Indicando con $\vec{Q}$ tale grandezza, si può scrivere la seguente relazione:

$$\vec{Q} \;=\; m_t\, \vec{r_t} \wedge \vec{v_t} + m_l\, \vec{r_l} \wedge \vec{v_l}$$

Tenendo conto delle (8) l'espressione precedente diventa semplicemente:

$$\vec{Q} \;=\; m_t\, \frac{m_l^2}{M^2}\, \vec{r} \wedge \vec{v} + m_l\, \frac{m_t^2}{M^2}\, \vec{r} \wedge \vec{v} = \frac{m_t\, m_l}{M^2}\,(m_l + m_t)\, \vec{r} \wedge \vec{v} \;=\; m_r\, \vec{r} \wedge \vec{v}$$

Nelle formule precedenti è stato necessario mantenere il formalismo vettoriale in quanto le velocità non sono di norma perpendicolari ai raggi vettori, ma, essendo il sistema isolato, il momento della quantità di moto si conserverà invariato nel tempo e quindi potrà calcolarsi in qualsiasi istante arbitrario, ovvero in qualsiasi configurazione del sistema.
Conviene pertanto considerare la situazione al punto di massima vicinanza al centro di massa O, che si ottiene ponendo $\theta = 0$, dove la perpendicolarità delle velocità rispetto ai raggi vettori permette di ritornare all'uso di grandezze puramente scalari.

Essendo tale distanza è pari a $p/(1+e)$ e la corrispondente velocità ottenibile dalla (38) pari a $\sqrt{\Sigma/p}\cdot(1+e)$, si può scrivere:

$$Q \,=\, m_r\,\frac{p}{1+e}\,\sqrt{\frac{\Sigma}{p}}\,(1+e) \,=\, m_r\,\sqrt{\Sigma\,p}$$

Questa relazione[20] evidenzia il fatto che il momento della quantità di moto del sistema dipende dalle masse dei due corpi, dalla costante universale di gravitazione e dal parametro p della conica associata. Nel caso di orbite chiuse, ricordando l'espressione del semiasse maggiore in funzione di p ed e, si otterrebbe:

$$Q \,=\, m_r\,\sqrt{\Sigma\,a\,(1-e^2)}$$

Per quest'ultima formula si può osservare che mentre l'energia totale di una qualsiasi orbita chiusa dipende unicamente dalla lunghezza del semiasse maggiore, al contrario il momento della quantità di moto dipende anche dall'eccentricità di tale orbita.

6.6 Distanza media

Nel caso di orbita ellittica può aver significato calcolare la distanza media tra i due corpi. Non esiste tuttavia una definizione univoca di questa grandezza potendosi legittimamente assumersi una qualsiasi delle seguenti definizioni[21]:

1. Media pesata rispetto all'anomalia θ:

$$r_m \,=\, \frac{\int_0^\pi r\,d\theta}{\int_0^\pi d\theta} \,=\, \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{p\,d\theta}{1+e\,\cos\theta}$$

2. Media pesata rispetto al tempo t (vedi relazione (17)):

$$r'_m \,=\, \frac{\int_0^{P/2} r\,dt}{\int_0^{P/2} dt} \,=\, \frac{2}{P}\int_0^\pi \frac{p}{1+e\,\cos\theta}\,\frac{d\theta}{\dot\theta} \,=\, \frac{2}{P}\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}\,\frac{p^{5/2}\,d\theta}{(1+e\,\cos\theta)^3}$$

3. Media pesata rispetto all'ascissa curvilinea s:

$$r''_m \,=\, \frac{\int_0^{L/2} r\,ds}{\int_0^{L/2} ds} \,=\, \frac{2}{L}\int_0^{L/2} \frac{p\,ds}{1+e\,\cos\theta}$$

Tralasciando l'ultimo caso che non sembra essere risolubile in forma analitica, in quanto già la stessa lunghezza L dell'ellisse non è esprimibile mediante funzioni elementari, si vede facilmente che i primi due casi si riconducono all'integrazione di una funzione del tipo:

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(1+e\,\cos\theta)^n}$$

[20] Allo stesso risultato si poteva anche pervenire in modo più semplice osservando che la componente tangenziale della velocità $\vec{v}$, normale al raggio vettore $\vec{r}$, è data da $r\dot\theta$ e quindi per la (12) e la (15) il modulo del vettore $\vec{Q}$ vale:

$$Q \,=\, |\,m_r\,\vec{r}\wedge\vec{v}\,| \,=\, m_r\,r^2\dot\theta \,=\, m_r\,c \,=\, m_r\,\sqrt{\Sigma\,p}$$

[21] Nelle formule che seguono l'integrazione viene sempre estesa a metà ellisse per evidenti motivi di simmetria.

con $n = 1$ ed $n = 3$ per il primo ed il secondo caso rispettivamente.
In modo analogo a quanto fatto in precedenza al capitolo 5 per il calcolo della relazione tra anomalia θ e tempo t, questo integrale si risolve con la sostituzione di variabile $u = tan(\theta/2)$ dando origine al seguente integrale di funzione razionale:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(1 + e\ \cos\ \theta)^n} = \frac{2}{(1-e)^n} \int_0^{+\infty} \frac{(1+u^2)^{n-1}}{(u^2+\alpha^2)^n}\ du$$

Nell'ultima espressione si è anche tenuto conto della posizione (25) che definisce il parametro α^2 dato che la conica in questione è un'ellisse.
Eseguendo il calcolo dell'integrale per i due valori di n, si ottiene[22]:

1. Media pesata rispetto all'anomalia θ $(n = 1)$:

$$r_m = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = b$$

2. Media pesata rispetto al tempo t $(n = 3)$:

$$r'_m = \frac{p}{1-e^2}\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) = \frac{b}{\sqrt{1-e^2}}\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) \approx b\,(1 + e^2)$$

L'ultima approssimazione si ottiene prendendo lo sviluppo in serie di Taylor della radice quadrata a denominatore e trascurando i termini con potenze di e superiori a 2.
Come si vede la scelta della formula influisce sensibilmente sul risultato nel caso che l'orbita sia molto ellittica.

[22]Gli integrali in oggetto si scompongono in integrali notevoli tutti facilmente reperibili in letteratura [2].

7 Applicazione dei risultati al sistema Terra-Luna

I dati fisici e orbitali del sistema Terra-Luna, desunti dalla letteratura, sono i seguenti:

m_t = massa della Terra = $5.977 \cdot 10^{24}\ kg$
m_l = massa della Luna = $7.35 \cdot 10^{22}\ kg$
P = periodo orbitale siderale = $27^d\ 07^h\ 43^m\ 11^s\ =\ 2\,360\,591\ s$
e = eccentricità dell'orbita = 0.055
G = costante di gravitazione universale = $6.67 \cdot 10^{-11}\ m^3/(kg \cdot s^2)$

Da questi valori sono stati calcolati i seguenti parametri:

$M\ =\ m_t + m_l$ = massa totale del sistema = $6.0505 \cdot 10^{24}\ kg$
m_t/M = rapporto tra massa della Terra e massa totale = 0.987852
m_l/M = rapporto tra massa della Luna e massa totale = 0.0121478
$m_r\ =\ m_t\, m_l/M$ = massa ridotta del sistema = $7.26071 \cdot 10^{22}\ kg$
$\Sigma\ =\ G\,M\ =\ 4.03568 \cdot 10^{14}\ m^3/s^2$
$\bar{\omega}\ =\ 2\,\pi/P$ = velocità angolare media = $2.66170 \cdot 10^{-6}\ rad/s$

Per ottenere i parametri orbitali riportati in Tabella 1 sono state applicate le seguenti formule:

$$a = \left(\frac{P\,\sqrt{\Sigma}}{2\,\pi}\right)^{2/3} \quad ; \quad a_t = \frac{m_l}{M}\,a \quad ; \quad a_l = \frac{m_t}{M}\,a \qquad\qquad b = a\,\sqrt{1-e^2} \quad ; \quad b_t = \frac{m_l}{M}\,b \quad ; \quad b_l = \frac{m_t}{M}\,b$$

$$r_a = a\,(1+e) \quad ; \quad r_{at} = \frac{m_l}{M}\,r_a \quad ; \quad r_{al} = \frac{m_t}{M}\,r_a \qquad\qquad r_p = a\,(1-e) \quad ; \quad r_{pt} = \frac{m_l}{M}\,r_p \quad ; \quad r_{pl} = \frac{m_t}{M}\,r_p$$

$$p = a\,(1-e^2) \quad ; \quad p_t = \frac{m_l}{M}\,p \quad ; \quad p_l = \frac{m_t}{M}\,p \qquad\qquad c = \sqrt{p\,\Sigma} \quad ; \quad c_t = \left(\frac{m_l}{M}\right)^2 c \quad ; \quad c_l = \left(\frac{m_t}{M}\right)^2 c$$

I valori trovati sono in relativo accordo con quelli reperibili in letteratura.

Parametro	Sistema	Terra	Luna
Semiasse maggiore (km)	384 769	4 674	380 095
Semiasse minore (km)	384 186	4 667	379 519
Distanza all'apogeo (km)	405 931	4 931	401 000
Distanza al perigeo (km)	363 606	4 417	359 189
Parametro della conica (km)	383 605	4 660	378 945
Velocità areale x 2 (km^2/s)	393 460	58.062	383 959

Table 1: Parametri orbitali del sistema Terra-Luna

8 Degenerazione della conica: traiettoria nulla e rettilinea

Al termine del terzo paragrafo avevamo fatto notare la possibilità che la traiettoria dei due corpi degenerasse in una retta od in un segmento di retta, qualora all'istante iniziale le loro velocità fossero di segno opposto, ma avessero la stessa retta di applicazione[23].
E' ovvio che in questo caso, poiché il centro di massa O si trova anch'esso su tale retta, l'anomalia θ si manterrà costante e di conseguenza si avrà $\dot{\theta} = 0$.
Un'equazione sarà quindi data da $\theta = 0$ potendosi assumere l'asse polare coincidente con la retta su cui si svolge il moto.
Riscriviamo perciò le equazioni (9) e (10) sotto questa ipotesi:

$$-G\,\frac{m_t\,m_l}{r^2} = m_t\,\ddot{r}_t \tag{40}$$

$$-G\,\frac{m_t\,m_l}{r^2} = m_l\,\ddot{r}_l \tag{41}$$

Dividendo rispettivamente le due equazioni per m_t ed m_l, quindi sommando membro a membro e tenendo presente la (1), la (3) e la (7), nonché la linearità dell'operatore di derivazione, otteniamo la seguente equazione nella variabile r:

$$\ddot{r} + \frac{\Sigma}{r^2} = 0 \tag{42}$$

Benché apparentemente l'equazione sia semplice, essa non è lineare in quanto la variabile incognita appare a potenza -2.
E' conveniente a questo punto introdurre la seguente posizione:

$$q = \dot{r} \qquad \text{da cui:} \qquad \ddot{r} = \dot{q} = \frac{dq}{dr}\,\dot{r} = \frac{dq}{dr}\,q \tag{43}$$

Effettuando questa sostituzione l'equazione diventa del tipo a variabili separabili:

$$\frac{dq}{dr}\,q + \frac{\Sigma}{r^2} = 0 \tag{44}$$

Con semplici passaggi si ottiene la soluzione per la variabile q, cioè per $\dot{r}$:

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2\,\Sigma}{r} + \frac{2\,E_t}{m_r}} \tag{45}$$

avendo indicato con $2\,E_t/m_r$ la costante di integrazione.
Si deve a questo punto osservare come la presenza del doppio segno ci costringerebbe a risolvere l'equazione spezzando il campo di integrazione in intervalli per i quali vale l'uno o l'altro dei due segni; questa scelta non rappresenta comunque un problema complesso perché il moto dei due corpi è simmetrico rispetto al centro di massa O e facilmente intuibile e quindi la (45) verrà risolta per un intervallo in cui valga il segno positivo davanti al radicale lasciando al lettore l'estensione al caso del segno negativo; nel far questo si deve anche tener conto che la variabile r viene assunta sempre positiva, essendo interpretata come distanza tra i due corpi.

[23] Naturalmente in quanto segue prescindiamo dal fatto che i due corpi, anche se supposti puntiformi, si urtino qualora la loro distanza si annulli.

L'espressione scelta per la costante di integrazione non è casuale: infatti l'ultima relazione scritta può dedursi in modo assai più semplice tenendo conto che l'energia totale del sistema si conserva, poiché il campo gravitazionale è irrotazionale e quindi conservativo per l'energia.
Avremmo quindi potuto scrivere direttamente:

$$E_t \;=\; \frac{1}{2}\, m_t\, \dot{r_t}^{\,2} + \frac{1}{2}\, m_l\, \dot{r_l}^{\,2} \,-\, G\, \frac{m_t\, m_l}{r}$$

Con semplici passaggi e ricordando le (8) e la (2) si ritrova la relazione (45). Di seguito esamineremo le diverse possibili soluzioni della (45) assumendo il segno positivo davanti al segno di radice, cioè studiando la fase in cui i due corpi si allontanano tra loro e la loro distanza r è funzione crescente del tempo.

8.1 Traiettoria nulla

La condizione $E_t = -\infty$ implica che sia sempre $r = 0$ cioè che i due corpi, supposti puntiformi, siano fermi e a contatto tra loro. Solo in questo modo l'espressione sotto radice nella (45) può essere resa nulla.

8.2 Traiettoria rettilinea finita

Si verifica questa situazione se l'energia totale del sistema è negativa ($E_t < 0$); in questo caso è conveniente porre:

$$\frac{2\, E_t}{m_r} \;=\; -\frac{2\,\Sigma}{r_a} \tag{46}$$

dove si è appositamente usato il simbolo r_a per la corrispondenza di tale quantità con la distanza all'afelio per l'orbita ellittica.
Integrando l'equazione differenziale nell'ipotesi che sia $r = 0$ per $t = 0$ possiamo scrivere:

$$\int_0^r \frac{\sqrt{r}\; dr}{\sqrt{r_a - r}} \;=\; \sqrt{\frac{2\,\Sigma}{r_a}}\; t \tag{47}$$

La soluzione finale è data da:

$$r_a\, \arcsin \sqrt{\frac{r}{r_a}} \,-\, \sqrt{r\,(r_a - r)} \;=\; \sqrt{\frac{2\,\Sigma}{r_a}}\; t \tag{48}$$

La variabile r deve soddisfare alla limitazione $0 \leq r \leq r_a$ se si vuole restare necessariamente nel campo reale[24]; di conseguenza il fenomeno è oscillatorio e periodico non smorzato in quanto deve conservarsi l'energia totale.
Il moto di ciascuno dei due corpi è anch'esso oscillatorio periodico intorno al centro di massa O del sistema. Ad ogni oscillazione completa i due corpi verrebbero a trovarsi 2 volte nella stessa posizione, e quindi nella realtà il caso considerato terminerebbe con l'urto tra i due corpi e la loro distruzione.
Per il periodo P osserviamo che la funzione $\arcsin()$ è inversa di una funzione di periodo $2\,\pi$.
Si ha quindi:

$$2\,\pi\, r_a \;=\; \sqrt{\frac{2\,\Sigma}{r_a}}\; P$$

[24]Poiché il fenomeno è reale, la soluzione deve essere reale.

da cui si ricava:

$$P \,=\, \sqrt{2}\,\pi\,\frac{r_a^{3/2}}{\Sigma} \tag{49}$$

Se vogliamo paragonare questa formula con quella valida per le orbite circolari ed ellittiche dobbiamo porre $r_a = 2\,a$ ottenendo così per P l'espressione:

$$P \,=\, 4\,\pi\,\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\Sigma}}$$

Confrontando questa relazione con la (24) notiamo che in questo caso il periodo risulta doppio. Ciò è dovuto al fatto che un'oscillazione completa del sistema corrisponde a percorrere 2 volte un'orbita circolare od ellittica. Anche in questo caso per orbite di questo tipo varrebbe la III legge di Keplero; infatti elevando al quadrato si ottiene:

$$P^2 \,=\, \frac{2\,\pi^2}{\Sigma}\,r_a^3 \,=\, \frac{16\,\pi^2}{\Sigma}\,a^3$$

formula che differisce tuttavia dalla (36) per un fattore 4.

8.3 Traiettoria rettilinea infinita

In questo caso, per analogia con le orbite parabolica ed iperbolica, si distinguono due ulteriori possibilità in base al valore dell'energia totale:

1. Energia totale nulla ($E_t = 0$): la (45) diventa:

$$\frac{dr}{dt} \,=\, \pm\sqrt{\frac{2\,\Sigma}{r}}$$

   Separando le variabili ed integrando si ottiene:

$$\frac{2}{3}\,r^{\frac{3}{2}} \,=\, \pm\sqrt{2\,\Sigma}\;t$$

   e infine esplicitando la funzione e tenendo presente che r è sempre positivo:

$$r(t) \,=\, \left(\frac{9\,\Sigma}{2}\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} \tag{50}$$

   I due corpi si allontanano indefinitamente ma con velocità tendende a zero per $t \to +\infty$.

2. Energia totale positiva ($E_t > 0$): per analogia con la (46) è conveniente porre:

$$\frac{2\,E_t}{m_r} \,=\, \frac{2\,\Sigma}{r_a} \tag{51}$$

   Per integrare l'equazione differenziale nell'ipotesi che sia $r = 0$ per $t = 0$ possiamo scrivere:

$$\int_0^r \frac{\sqrt{r}\,dr}{\sqrt{r_a + r}} = \sqrt{\frac{2\,\Sigma}{r_a}}\,t \tag{52}$$

La soluzione finale è data da:

$$\sqrt{r\,(r_a + r)} - r_a\,\ln\left(\sqrt{r} + \sqrt{r_a + r}\,\right) = \sqrt{\frac{2\,\Sigma}{r_a}}\,t \tag{53}$$

Anche in questo caso i corpi si allontanano indefinitamente ma con velocità finita e non nulla per $t \to +\infty$. Tale velocità si ottiene immediatamente dalla (45) eseguendo il limite:

$$v = \sqrt{\frac{2\,\Sigma}{r_a}}$$

8.4 Un problema di discontinuità

Nel caso della traiettoria rettilinea finita si era notato che la formula che esprimeva il periodo del moto conteneva un fattore di proporzionalità doppio della formula corrispondente per il cerchio e per l'ellisse.
Per comprendere meglio questo fenomeno immaginiamo di studiare il moto dei due corpi partendo dalla seguente situazione iniziale: i due corpi si trovano a distanza r_0 e al primo corpo, considerato di massa trascurabile rispetto al secondo, viene impressa una velocità v_0 perpendicolare alla congiungente i centri di massa dei due corpi.
Si deve innanzitutto osservare che la condizione iniziale corrisponde in ogni caso ad una posizione in cui i due corpi si vengono a trovare sempre e comunque sull'asse focale della conica, in quanto la congiungente i centri di massa dei corpi formano angolo retto con la tangente alla traiettoria[25] descritta dall'unico corpo in movimento. In funzione della velocità iniziale che imprimiamo al primo corpo possiamo distinguere i seguenti casi:

1. $0 < v_0 < \sqrt{\Sigma/r_0}$ In questo caso la posizione iniziale coincide con l'afelio di un'ellisse ed il semiasse maggiore a varia tra i limiti: $r_0/2 < a < r_0$.
2. $v_0 = \sqrt{\Sigma/r_0}$ L'orbita è una circonferenza di raggio r_0.
3. $\sqrt{\Sigma/r_0} < v_0 < \sqrt{2\,\Sigma/r_0}$ In questo caso la posizione iniziale coincide con il perielio di un'ellisse e per il semiasse maggiore vale la condizione $a > r_0$.
4. $v_0 = \sqrt{2\,\Sigma/r_0}$ L'orbita è una parabola e la velocità v_0 è la velocità di fuga.
5. $v_0 > \sqrt{2\,\Sigma/r_0}$ L'orbita è un'iperbole ed il corpo in movimento ne percorre un ramo a partire dal vertice.

Sembrerebbe quindi che al variare con continuità della velocità iniziale anche la curva descritta vari con la stessa continuità, ed ugualmente il periodo orbitale, che limitatamente ai primi tre casi è proporzionale alla potenza $3/2$ del semiasse maggiore, presenti lo stesso carattere di continuità.
Ma che cosa succede se la velocità iniziale tendesse a 0 fino ad annullarsi?
In questo caso il moto diventerebbe rettilineo finito ed il corpo in moto inizierebbe ad oscillare ma con periodo di oscillazione doppio rispetto al periodo che avrebbe per velocità piccolissime ma

[25] La tangente alla traiettoria ha sempre in ogni istante la direzione della velocità. Il centro di massa del corpo maggiore è anche centro di massa del sistema e fuoco della conica descritta dal corpo più piccolo.

finite. Anche la lunghezza della traiettoria verrebbe a raddoppiare, mantenendo quindi in tal modo la continuità della velocità media orbitale.
Questa discontinuità nasce dalla degenerazione del sistema che si manifesta nel fatto che negli istanti in cui i due corpi venissero a coincidere tra loro la velocità del corpo in movimento dovrebbe diventare infinita, a causa della forma matematica che ha l'energia potenziale gravitazionale.
D'altra parte fisicamente l'esperimento non potrebbe realizzarsi in quanto i corpi si urterebbero tra loro. Se poi volessimo simulare l'esperimento supponendo di creare un pozzo che attraversi diametralmente il corpo di massa maggiore non potremmo applicare le equazioni viste in quanto, mano a mano che il corpo in movimento penetra nel pozzo, la forza attrattiva della massa maggiore andrebbe riducendosi fino ad annullarsi (vedasi paragrafo successivo), perché a tale forza contribuirebbe solamente la massa corrispondente alla sfera interna di raggio r, essendo r la posizione istante per istante del corpo in movimento.
Infine il paradosso nasce anche dal fatto che l'ipotesi di corpo puntiforme dotato di massa finita, richiederebbe per tale corpo una densità infinita che è incompatibile con quanto si osserva nel mondo reale.

8.5 Scavando un pozzo ...

Scavando un pozzo che attraversi diametralmente tutta la Terra immaginiamo di lasciarvi cadere un corpo pesante di massa m, ad esempio un sasso, e proviamo a calcolarne la legge del moto in assenza di attrito nell'ipotesi che la Terra abbia massa infinita rispetto al sasso e sia composta da materiale omogeneo di densità d.
La forza agente sul corpo in un punto generico r della sua traiettoria lungo l'asse del pozzo è equivalente alla forza di gravità esercitata dalla sottostante sfera di raggio r la cui massa può supporsi concentrata nel centro della Terra stessa.
La legge fondamentale della dinamica assume quindi la forma:

$$-\,G\,\frac{m}{r^2}\cdot\big(\frac{4}{3}\pi r^3\,d\big) \;=\; m\,\ddot{r}$$

Semplificando l'equazione e ponendo:

$$\omega \;=\; \sqrt{\frac{4}{3}\,\pi\,G\,d}$$

si ottiene la ben nota equazione differenziale del moto armonico non smorzato con pulsazione ω:

$$\ddot{r} + \omega^2\,r \;=\; 0$$

Se il sasso al tempo $t = 0$ possiede velocità nulla e si trova alla bocca del pozzo, cioè a distanza $R_T \;=\; 6\,371\,221\;m$ dal centro della Terra, allora la legge oraria è data dalla semplice funzione trigonometrica:

$$r \;=\; R_T\,\cos{(\omega t)}$$

La quantità fisica più interessante è senza dubbio il periodo di oscillazione P, cioè il tempo che il sasso impiega ad attraversare la Terra e tornare al punto di partenza.
Nel caso della Terra $(d \;=\; 5\,520\;kg/m^3)$ si ottiene:

$$P \;=\; \frac{2\,\pi}{\omega} \;=\; \sqrt{\frac{3\,\pi}{G\,d}} \;=\; 5\,059.4\;s$$

corrispondente ad una pulsazione $\omega = 1.24187 \cdot 10^{-3}\;rad/s$.

La velocità massima si raggiungerà nel momento in cui il sasso attraversa il centro della Terra, dove il suo modulo assumerà il valore:

$$|v_{max}| = \omega R_T = \frac{2\pi R_T}{P} = 7\,912.2\ m/s$$

E' molto interessante osservare che mentre la velocità massima dipende linearmente dal raggio della Terra, la pulsazione ed il periodo non dipendono in alcun modo dalle dimensioni o dalla massa, ma solamente dalla densità media della Terra supposta costante!

E ancora si osserva che assumendo condizioni iniziali del moto r_0 e v_0 del tutto generali, periodo e pulsazione resterebbero sempre e comunque invariati se risultano soddisfatte le seguenti disuguaglianze:

$$r_0 \le R_T \qquad\qquad |v_0| \le \sqrt{\frac{4}{3}\pi\, G\, d\, (R_T^2 - r_0^2)}$$

Queste condizioni impongono semplicemente che posizione e velocità iniziali siano tali che la traiettoria resti sempre confinata internamente alla sfera terrestre, in quanto questa è l'ipotesi con cui l'equazione del moto è stata dedotta.

Contents

List of Tables

References

[1] Claudio Beccari, *LaTeX, Guida ad un sistema di editoria elettronica*, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 1991

[2] Murray R. Spiegel, *Mathematical handbook of formulas and tables*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, 1968